

Jorge Juan y la Geodesia de la
Ilustración. Visión técnica e
histórica desde el siglo XXI

M^a Jesús Jiménez Martínez

18 de enero de 2011

Índice general

1. Introducción	5
2. Un precursor: Jerónimo Muñoz. Geodesta valenciano del siglo XVI	11
3. El siglo XVII. Revisión y controversia sobre la forma de la Tierra	17
3.1. Primeras mediciones geodésicas de arcos de meridiano	23
4. Siglo XVIII. Las misiones al Perú y Laponia	29
4.1. La Misión al Perú	29
4.1.1. Introducción a los métodos y la instrumentación	39
4.1.1.1. Cálculo de la distancia geométrica entre los extremos de la base	44
4.1.1.2. Reducción al horizonte. Reducción al nivel del mar	55
4.1.1.3. Cálculo del desnivel por visuales recíprocas y simultáneas	59
4.1.1.4. Cálculo de la refracción atmosférica	60
4.1.1.5. Determinación de la altura y nivelación barométrica aplicando la ley de Mariotte	64
4.1.1.6. Otro modo de determinación de la altura y nivelación barométrica.	72
4.1.1.7. Comprobación de la ley de Mariotte en el Ecuador Terrestre	77

4.1.2.	La Triangulación Geodésica	84
4.1.2.1.	Proyecto inicial	84
4.1.2.2.	Longitud horizontal de los lados de la triangulación	100
4.1.2.3.	Observaciones al Sol para calcular los azimutes de los lados occidentales de la serie de triángulos	101
4.1.2.4.	Deducción de la distancia entre los paralelos de los vértices	108
4.1.2.5.	Reducción de las distancias entre los paralelos de los vértices al nivel del mar	109
4.1.2.6.	La base de comprobación	110
4.1.3.	Primera formulación de resultados	111
4.1.3.1.	Sobre las observaciones de la triangulación	111
4.1.3.2.	Los resultados	113
4.2.	La Misión a Laponia	115
4.2.1.	Primera formulación de resultados	120
5.	Actuaciones geodésicas posteriores hasta nuestros días	125
6.	Sobre el control de calidad y resultados de los trabajos de ambas Comisiones	143
6.1.	Análisis geodésico de los trabajos en Perú	147
6.2.	Análisis geodésico de los trabajos en Laponia	148
6.3.	Análisis multivariante de recintos de error	151
6.3.1.	Aplicación a los trabajos en Perú	159
6.3.2.	Aplicación a los trabajos en Laponia	161
7.	Y Final	163

Capítulo 1

Introducción

Allá por el siglo V antes de Cristo la palabra griega “Geo-metría” designaba desde largo tiempo atrás una ciencia que etimológicamente significa “medida de la Tierra”, en sentido lato se ocupa de la medida y propiedades de la extensión, y había adquirido por aquel entonces tal importancia que en el pórtico de la Academia de Platón se prevenía taxativamente: “nadie entre aquí que no sepa Geometría”. De la Geometría nació la Geo-desia, de $\gamma\eta$, Tierra y $\delta\alpha\iota\omega$, dividir, que se ocupa específicamente de la aproximación al conocimiento cifrado de la métrica de grandes extensiones de la Tierra, o de la totalidad de ella.... Y los griegos eran simplemente unos recién llegados, comparados con los científicos babilonios y egipcios que en el siglo XVI antes de Cristo medían arcos de meridiano, según algunos egiptólogos, y mucho antes habían incluido información geodésica en la Gran Pirámide de Giza. De la esfericidad (o mejor, seudoesfericidad) de la Tierra jamás se ha dudado seriamente y, problemas puntuales filosóficos y religiosos aparte, algunos ciertamente más pertinaces de lo deseable, hasta se representaba al Sumo Hacedor en la profunda Edad Media del siglo XIII midiendo el mundo, esférico, con un excelente compás de puntas. Fig. 1.1.

Era preciso conocer el radio de nuestro Planeta. Y para ello había que dirigir el esfuerzo a medir la longitud de un arco rectificado que sea parte de una sección meridiana, y el ángulo subtendido en el centro. Teofrasto, algunos pitagóricos, y el peripatético Dicearco de Messana¹ llevaron a cabo diversos intentos con desigual fortuna. Y fue Eratóstenes de Cirene², Director de la

¹Dicearco de Messana (ca.350-290 a.d.C) renombrado cartógrafo griego que describe a la Ekumene con dimensión máxima de 60.000 estadios de Este a Oeste y 40.000 de Norte a Sur. Aceptando que se trate de los mismos estadios que utilizó Eratóstenes, sus mediciones fueron claramente menos precisas que las de este último.

²Eratóstenes de Cirene (ca.271-200 a.d.C). Discípulo de Lisaniyas de Cirene y Aristón



Figura 1.1: Códice 2554. Biblia del Siglo XIII. Biblioteca Nacional de Viena

Biblioteca de Alejandría y cumbre de la Ingeniería Cartográfica de su tiempo, quien a mediados del siglo III a.d.C. logró un éxito total, de la simple y genial consideración de que el Sol llegaba al fondo de los pozos el día del solsticio de verano en Siena (hoy Assuán), mientras que un gnomon (poste) situado en Alejandría arrojaba sombra. Fig. 1.2.

Supuestos paralelos los rayos de luz procedentes del Sol, los ángulos α son iguales por alternos internos. Conocida la distancia de Alejandría a Siena, ubicadas aproximadamente sobre un mismo meridiano, (y sea $S = 5.000$ estadios “de Olimpia” de 157,50 m., unidad de longitud muy probablemente utilizada por Eratóstenes) y medida la sombra del gnomon, es inmediato obtener $\alpha = 7^\circ 12'$. Y siendo R el radio de la Tierra, se sigue:

$$2\pi R = 50 S = 250.000 \text{ estadios} \langle \rangle 39.375 \text{ Km.}$$

$$R = 39.789 \text{ estadios} \langle \rangle 6.267 \text{ Km.}$$

Con un error inferior a 1,7% con respecto a valores actualmente aceptados. Así, el sistema de referencia del satélite global GRS80 ofrece a fecha de hoy el valor de 6.380 km. para el radio medio del Globo Terrestre. Y es indudable que el método resulta mucho más riguroso, cómodo y barato que el empleado por la expedición de Magallanes y Elcano 17 siglos después (1518-22). Además, aunque más heroicos, no determinaron radio terrestre alguno.

de Chios, contemporáneo de Arquímedes y Apolonio. Residió en Atenas hasta que fue requerido por Ptolomeo Evergetes para dirigir, y lo hizo hasta su muerte, la Biblioteca de Alejandría. Sobresalió en todos los géneros del saber humano. Sus contemporáneos le llamaron “Pentatlos” como los raros atletas que vencían en las cinco pruebas olímpicas. Su obra geodésica fundamental se ha perdido, pero la conocemos por otras fuentes, en especial a través de Estrabón. Eratóstenes reunió todas las medidas de terrenos conocidas en su tiempo: anotaciones de catastro, longitudes de los caminos de sirga, informes de los contadores de pasos. La inundación del Nilo alteraba cada año los mojones y las fronteras entre los campos cultivados y para fijar los derechos de propiedad los Ptolomeos habían nombrado en cada capital de departamento a un director de finanzas y catastro, encargado de inscribir las dimensiones de las “sfragidas”, parcelas medidas por los agrimensores reales. Eratóstenes anotó también las medidas relativas a la longitud del Nilo, que fluye entre Siena y Alejandría. La jornada de marcha era una unidad de medida utilizada ya por Herodoto y las rutas de Egipto, como las de todos los países helenizados, eran medidas por contadores de pasos profesionales. Aunque el Nilo corra aproximadamente a lo largo de una línea meridiana, Eratóstenes sabía muy bien que se desvía de ella ligeramente hacia el este. El error es de escasa cuantía, y junto con otros es posible que lograra compensarlos de alguna manera lo que explica la extraordinaria precisión del resultado que obtuvo. Entre las diversas unidades de longitud llamadas “estadios” existentes en la Antigüedad adoptó la más utilizada el “estadio de Olimpia”, que equivalía a 157.50 metros.

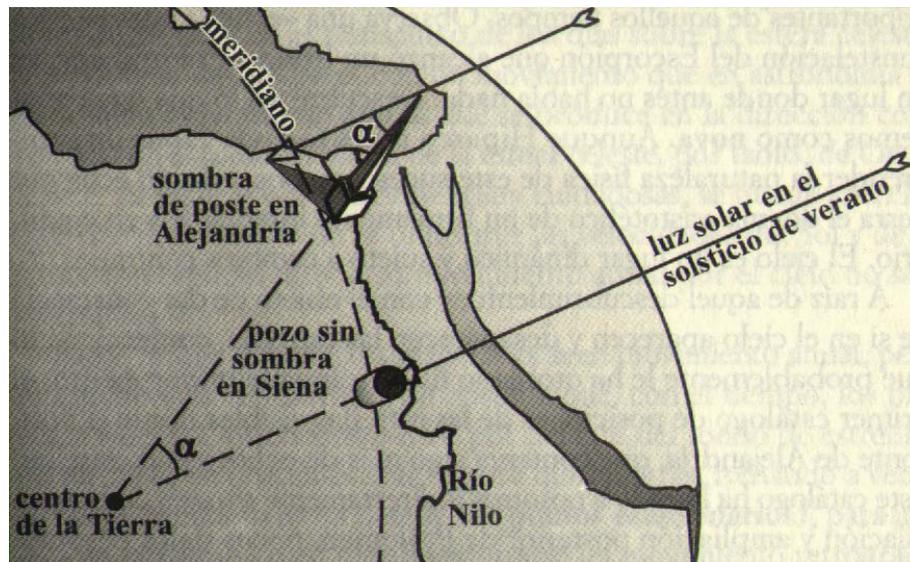


Figura 1.2: Fundamento geométrico de las mediciones de Eratóstenes del radio de la Tierra (270-195 a.de JC.)

La precisión citada impresiona aún más si se tiene en cuenta que Siena no está en el Trópico de Cáncer, sino algo más al norte, ni Alejandría sobre el mismo meridiano de Siena, sino 3 grados al oeste de este último. Y tampoco la distancia entre ambas ciudades era de 5.000 estadios, sino de 4.530 y además el ángulo α al parecer fue medido con alguna imprecisión. Pero los cuatro errores se compensaron perfectamente. Y todo parece indicar que Eratóstenes sabía como hacerlo. Después de medir la Tierra la dividió en 60 partes iguales de 6 grados cada una, de acuerdo con el modo de graduar de los babilonios y proyectó y dirigió una Cartografía Matemática que se ha perdido.

Según acostumbra a suceder, Eratóstenes no fue, a pesar de todo, inmune a la crítica y posiblemente menos a la envidia. Entre otros, Hiparco de Nicea (ca.166- 126 a.d.C.) le censuró abiertamente. Posidonio de Apamea (ca. 130-50 a.d.C) se dispuso a rectificarle y midió el meridiano de Rodas y su distancia a Alejandría. Se equivocó por defecto en casi un 25% , o fue malinterpretado a posteriori, tal vez por utilizar otro tipo de unidades de longitud llamadas también estadios. Sea como fuere, lo cierto es que, desde Marino de Tiro a finales del siglo I d.d.C y sobre todo Claudio Ptolomeo (90-168 d.d.C), reputados como autoridades incuestionables hasta la época colombina, se tuvo a la Tierra por mucho más pequeña de lo que realmente era. Unos 30.000 km. de arco de círculo máximo rectificadas, que conduce a un radio terrestre de 4.800 Km, datos con los que Cristóbal Colón programó sus viajes.

Y como América literalmente no “cabía” entre Portugal y Japón, la búsqueda del Gran Khan de Marco Polo se ofrecía asequible siguiendo hacia el Oeste la ruta del Sol.

Es preferible no pensar que la “Xunta dos Matemáticos de Lisboa”, vanguardia de la Ingeniería Cartográfica de la época, que rechazó la propuesta de Colón, estuviera al cabo de la calle de la verdadera dimensión de la Tierra y despidiera al Almirante como un pobre insensato, inepto y visionario, siendo conscientes de que infaliblemente su destino era morir de hambre y sed en un Océano sin límites, pilotando unos barcos incapaces de embarcar siquiera el agua y bastimentos necesarios para semejante viaje...

Capítulo 2

Un precursor: Jerónimo Muñoz. Geodesta valenciano del siglo XVI

El valenciano Jerónimo Muñoz (ca.1515 – 1592), catedrático de Matemáticas, Astronomía y Hebreo en las Universidades de Valencia y Salamanca, solo llevó a la imprenta cuatro trabajos en su plena y brillante vida profesional, todos ellos entre 1566 y 1585¹. Y posiblemente algo de culpa tendrían los sinsabores que le produjo su “Libro del Nuevo Cometa” (1573), en que estudiaba en detalle y con rigor científico la supernova en Casiopea que descubrió su contemporáneo Tycho Brahe. Muñoz, en contra de la ortodoxa teoría aristotélica vigente de la incorruptibilidad de las regiones celestes, observó que en ellas también existía el cambio y la mutación. Ello unido a su profundo conocimiento de la lengua y civilización hebreas, siempre sospechoso en su época, condujeron al prudente silencio oficial a un ingeniero cartógrafo de categoría mundial con uno de los cerebros mejor amueblados del siglo XVI.

En contrapartida, su labor manuscrita, hoy solo parcialmente recuperada, fue ingente. En ella destacamos sus “Seis libros de Instituciones Astrológicas y Geográficas”² en cuyo libro quinto “Acerca de las Latitudes y Longitudes”,

¹Victor Navarro Brotóns et al. “Jerónimo Muñoz: Introducción a la Astronomía y la Geografía”.pg.18 y sig. Consell Valencia de Cultura. Col·lecció Oberta. Valencia 2004. En Valencia, imprenta Mey, 1566 “Institutiones Arithmeticae ad Percipiendam Astrologiam et Matemáticas facultates necessariae”, el “Libro del Nuevo Cometa” (1573), sobre la observación de la supernova en Casiopea de 1572. Un folleto de ocho páginas en 1578 dedicado a estudiar el eclipse de Luna y paso de un cometa observados en 1577, y en Salamanca, 1585, “Alphabetum hebraicum cum ratione legendi cum punctis”.

²Ibidem., pg. 77 y sig. En castellano y latin.”Astrologiarum et Geographiarum institutionum libri sex”, auctore Hieronymo Munnos in Universitate Valentina, artium mathematicarum et linguae hebraicae publico professore.

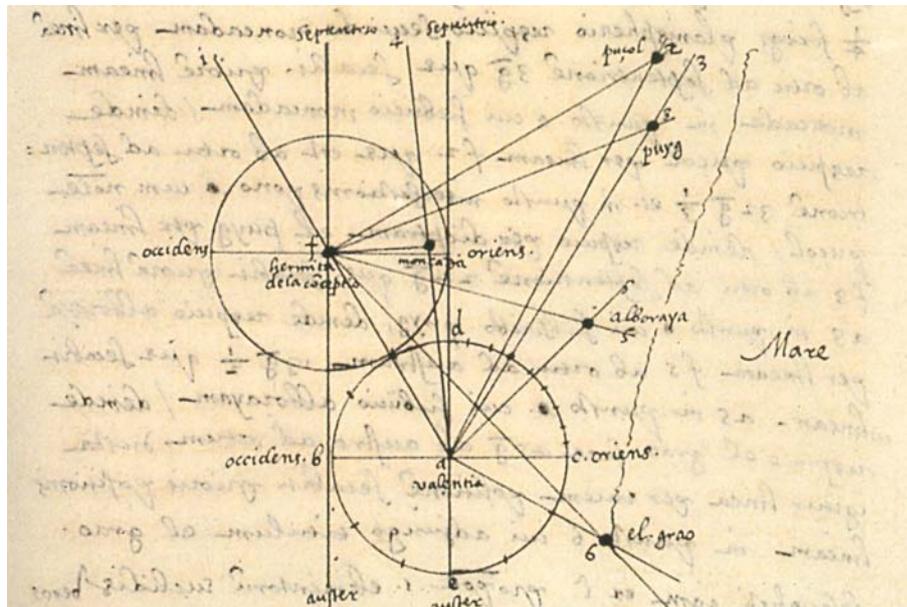


Figura 2.1: Levantamiento por intersección directa de la costa de Valencia por Jerónimo Muñoz

capítulo nueve “Sobre la descripción de los lugares por medio de los ángulos de posición” describe en detalle el método topográfico y geodésico de la intersección directa, y práctica consiguiente de la triangulación. Fig.2.1 y fig.2.2.

Y no se limita a una mera disquisición teórica. Antes bien, a lo largo de la costa valenciana lleva a cabo la primera aplicación de ingeniería cartográfica con metodología científica rigurosa de que tenemos noticia, incluyendo triangulación básica y relleno por destacados, cuya descripción incluye en el capítulo 16 de la obra citada³. Los trabajos parciales no han sido hallados, pero el resultado de conjunto es un Mapa de España con canevas de longitudes y latitudes en el que salta a la vista la comparativamente mayor fidelidad métrica de la costa valenciana con relación al resto de la Península Ibérica. Fig. 2.3.

Tenemos derecho a considerar como muy posible que el trabajo de Jerónimo Muñoz fuera mejor conocido y valorado en su tiempo de lo que es ahora.

Efectivamente, Muñoz completó su formación viajando por Europa, especialmente por Italia, y trabajó con Orencio Finé y con el tenido por padre del

³“Explicación de los nombres de las antiguas ciudades, de lugares, ríos, cabos y promontorios de España”

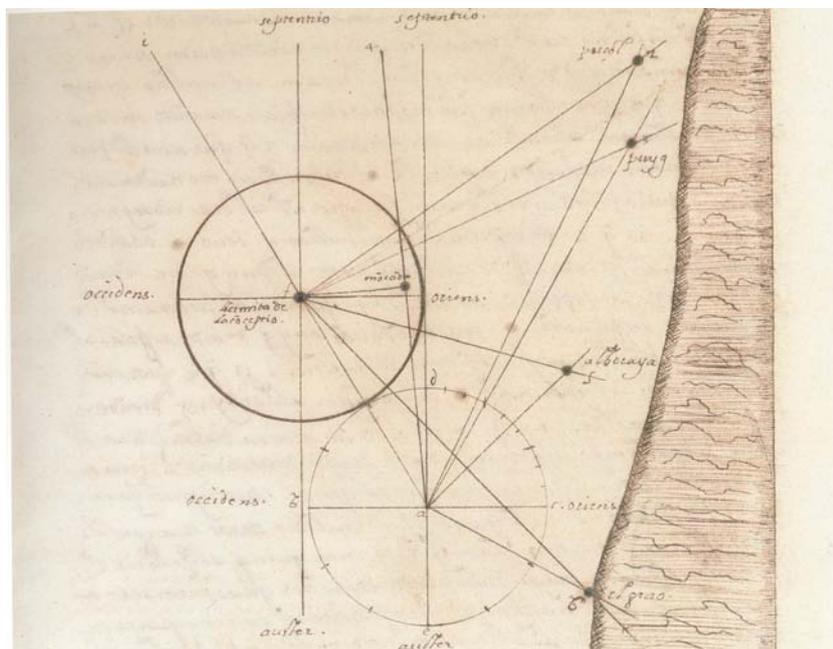


Figura 2.2: Triangulación de la costa de Valencia por Jerónimo Muñoz. Copia de Francisco Peña. Discípulo de Muñoz. Biblioteca Apostólica Vaticana, 1610

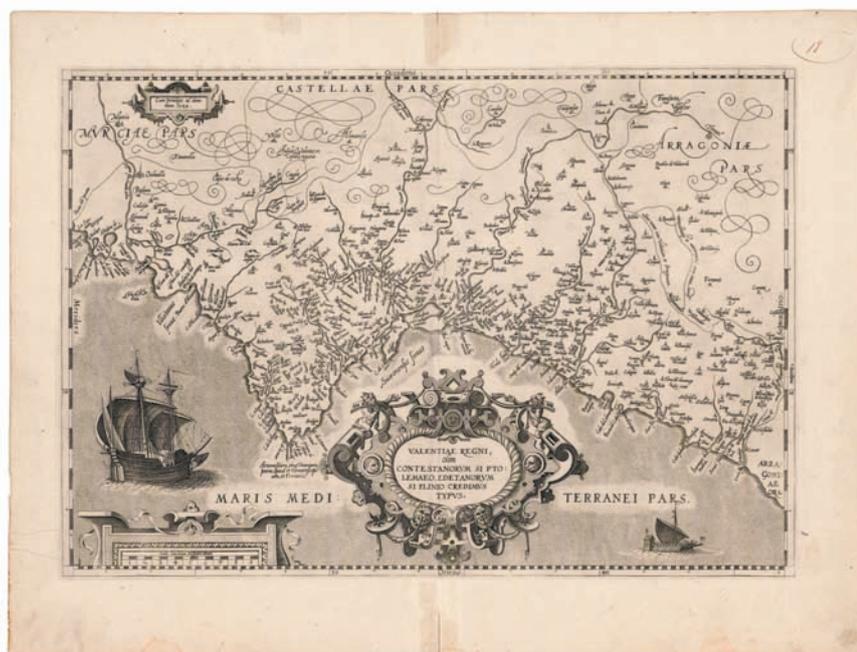


Figura 2.4: Primer Mapa del Reino de Valencia. Ortelius, 1584

método de la triangulación, Gemma Frisius⁴ al que llama “Institutor Noster”. Pero además parece indudable que el primer Mapa del Reino de Valencia, debido a Abraham Ortelius, contenido en su Atlas “Theatrum Orbis Terrarum” y fechado en 1584, se confeccionó a partir de los datos facilitados por el erasmista valenciano, humanista de prestigio pero no cartógrafo, Fadrique Furió Ceriol, que simplemente trasladó la obra de Muñoz⁵. Fig. 2.4.

Y visto lo visto, es difícil no asumir que Jerónimo Muñoz, ingeniero cartógrafo de primera magnitud, experto en el recién descubierto método de triangulación, no lo utilizara para mejor definir las proyecciones cartográficas a utilizar en sus mapas. Y ello equivale a lo menos a calcular el radio de la esfera terrestre local a partir de un arco de meridiano. No es demasiado atrevido tener a Muñoz como precursor notorio de los planteamientos y trabajos de Ingeniería Cartográfica que siguen.

⁴Jemme Reinerszoom “Gemma Frisius” (1508-55), geómetra, geodesta y matemático flamenco. Profesor en Lovaina. Se le considera pionero en la descripción teórica del método de la triangulación geodésica y topográfica. Ver Martín López, José “Historia de la Cartografía y la Topografía” pg. 207 y sig. CENIG. Madrid. 2004.

⁵Según Navarro, Opus. Cit. Pg. 12.

Capítulo 3

El siglo XVII. Revisión y controversia sobre la forma de la Tierra

La consideración de una Tierra esférica satisfacía cualquier exigencia científica razonable hasta bien entrado el siglo XVII. Sin embargo, todo empezó a cambiar cuando Jean Richer, físico y astrónomo francés, (ca. 1630 – 1696), académico desde 1666, fue enviado en 1675 a Cayena, capital de la Guayana Francesa, a $4^{\circ}55'$ al Norte del Ecuador, en comisión de estudio sobre diversos temas astronómicos. Entre otros, afinar los números en la determinación de la oblicuidad de la eclíptica.

A su vuelta tres años después publicó un detallado informe titulado “Observations astronomiques et physiques faites en l’île de Cayenne” (Paris, 1679) y ante la enorme expectación y perplejidad general, ya ciertamente sobre aviso, descubrió a la comunidad científica mundial que, después de una minuciosa campaña gravimétrica de cientos de observaciones, resultaba que el péndulo matemático que bate segundos cerca del Ecuador es 2,8 mm. más corto que en París, a $48^{\circ}50'$ N.

Hechas las oportunas correcciones de altitud y otras variables, la diferencia resultante solo podía explicarse por una menor aceleración de la gravedad en Ecuador que en Paris, incompatible con una Tierra esférica perfecta.

En efecto y en primera aproximación y para un mismo periodo T , la expresión del péndulo matemático relaciona longitudes y gravedad en ambos lugares según la igualdad:

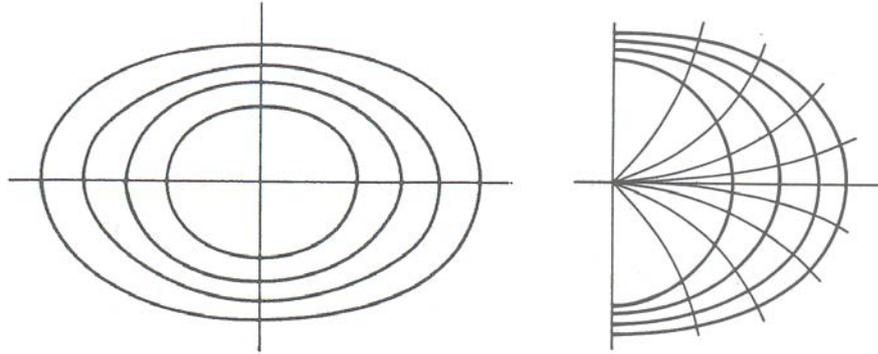


Figura 3.1: Modelo Newtoniano. Izqda. Superficies equipotenciales $U = U(x, y, z) = Cte$. Dcha. Campo gradiente $\phi = \text{grad}U$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{Cayena}}{g_{Cayena}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{Paris}}{g_{Paris}}}$$

es decir $\frac{l_{Cayena}}{g_{Cayena}} = \frac{l_{Paris}}{g_{Paris}}$

y si $l_{Cayena} < l_{Paris}$

resulta $g_{Cayena} < g_{Paris}$

Quizás todo podía explicarse por la incertidumbre propia del margen de error imputable a la instrumentación de la época. O a que ni siquiera se contaba, antes de la adopción del Sistema Métrico Decimal, con unidades de medida fiables, inalterables y reproducibles. Y el Análisis Dimensional era un ilustre desconocido. Pero quizás no. Y la controversia estaba servida.

En Londres, Sir. Isaac Newton estaba a punto de dar a la imprenta, empujado por el tesón de Edmund Halley y venciendo su retraimiento que rayaba en verdadera fobia social, sus “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, que salieron a la luz pública en 1687. Pero estaba en condiciones ya de adelantar la propuesta de un modelo matemático más evolucionado para la superficie terrestre, basado en el geopotencial asociado a la composición de las fuerzas gravitatorias y centrífugas . Fig. 3.1.

Así, siendo $U = U(x, y, z)$ la función de equilibrio geopotencial del globo terrestre referida a su centro de masas, podía considerarse como origen de un campo gradiente $\Phi = \text{grad}U$, composición vectorial en cada punto de las

fuerzas de gravedad y centrífuga. Y la deducción era inmediata, se tenía sucesivamente¹, con la notación usual. *Geopotencial* = $U = U_1$ (*Gravitatorio*) + U_2 (*centrífugo*). Y la deducción inmediata, con la notación usuales:

$$U = U(x, y, z) = U_1 + U_2 = G \int_v \frac{\mu dv}{\rho} + \frac{1}{2} w^2(x^2 + y^2)$$

$$\bar{\Phi} = \text{grad}U = (-G \int_v \frac{\mu(x - x_0)}{\rho^3} dv + w^2 x)i +$$

$$+ (-G \int_v \frac{\mu(y - y_0)}{\rho^3} dv + w^2 y)j + (-G \int_v \frac{\mu(z - z_0)}{\rho^3} dv)$$

La figura de equilibrio resulta un elipsoide oblato, de poca excentricidad, achatado por la línea de los polos. Las superficies de nivel, de geopotencial constante, resultan por consiguiente elipsoides concéntricos que se densifican junto a los polos y se expanden en el Ecuador. Y el campo gravitatorio supera el concepto rectilíneo de perpendicularidad, demostrando que las trayectorias de las líneas de fuerza al caer hacia el centro de masas de la Tierra no son rectas. Ni la distancia entre dos superficies de nivel es constante en todos sus puntos. Inglaterra y la Royal Society cerraron filas alrededor de Newton y en la Academia Francesa, en principio, se mantuvo una aparente neutralidad tensa a la espera de acontecimientos.

Y no tardaron en surgir. La sociedad científica francesa era fundamentalmente racionalista y cartesiana. Y no perderemos el tiempo aportando argumentos que han resultado erróneos, pero lo cierto es que, aceptando la elipsoidad terrestre, los cartesianos pretendían justificar y junto con Francia entera defendían ardorosamente la solución prolata, de elipsoide oblongo, alargado por la línea de los polos. Fig. 3.2.

Se complicó más el asunto cuando apareció la inevitable politización, bien adobada de nacionalismo. Y se envenenó del todo cuando se encontraron incluso connotaciones religiosas. Curiosamente, el Cartesianismo había derivado en una religiosidad más “tradicional”, con un Dios Creador, Impulso Primero, que luego descansa inactivo, y el Newtonianismo con un Dios en acción permanente que exigía demasiadas revisiones a los Sagrados Textos. La influyente Compañía de Jesús se declaró cartesiana² convencida, contribuyendo a embrollar aún más las cosas...

¹Cualquier manual de Topografía, Geodesia o Gravimetría. P. Ej. Manuel Chueca et al. “Tratado de Topografía, tomo II”t. Pg. 7 y sig. Editorial paraninfo. Madrid 1997. Deducción completa con la notación usual.

²Newton representaba un movimiento en cierto modo transgresor y rupturista. Y re-

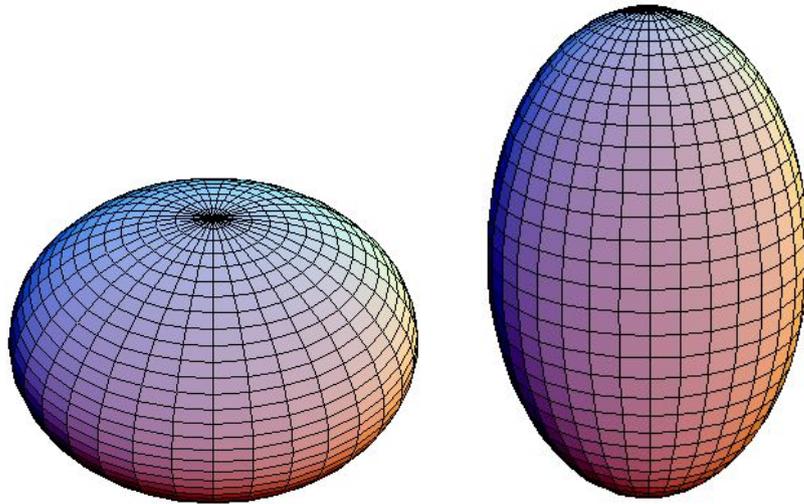


Figura 3.2: Izqda. Elipsoide Inglés, Oblato y Newtoniano. Dcha. Elipsoide Francés, Prolato y Cartesiano

sulta irónico leer su epitafio en el suntuoso mausoleo de mármol blanco que guarda sus restos en la Abadía de Westminster, entrando a la izquierda, en el trascoro. Allí se afirma, entre otras cosas, que “...animi vi prope divina Planetarum motus figuras, Cometarum semitas, Oceanique Aestus, Sus Mathesi facem preferente, primus demonstravit...”. (“...con fuerza de espíritu casi divina, los movimientos de los planetas, las figuras, las sendas de los cometas, las mareas del océano, con sus matemáticas como antorcha fue el primero en demostrar...”), (“...Sacra Scripturae sedulus, sagax, fidus Interpres, Dei Opt. Max. Majestatem philosophia asseruit, Evangelii simplicitatem moribus expressit...”). (“...de la Sagrada Escritura asiduo, sutil y fiel intérprete, afirmó con la filosofía la majestad de Dios, Optimo, Máximo y expresó con sus costumbres la simplicidad del Evangelio...”). Y resulta que además, siendo catedrático lucasiano titular en el Trinity College de Cambridge, en aquel tiempo Institución protestante y puritana donde las hubiera, profesaba la vieja y olvidada herejía arriana, que negaba precisamente el Dogma de la Trinidad y la divinidad de Cristo, con la suficiente astucia como para no ser acusado nunca de ello. Sin embargo su discípulo y catedrático sucesor William Whiston fue expulsado por confeso de dicha herejía en 1710, en vida de Newton y sin que éste moviera un dedo por defenderle. Es poco creíble que no fuera influenciado por su maestro. (vva. “Newton, vida pensamiento y obra” pg. 34. Grandes Pensadores. El Mundo. Centro Editor PDA S.L. Madrid 2008). Newton escribió generalmente en latín, que dominaba y consideraba única lengua capaz de expresar fielmente el pensamiento abstracto, hasta el extremo de oponerse mientras vivió a cualquier traducción de sus “Principia”, su obra cumbre, publicada en 1687. Son destacables así mismo la “Optica” (“Opticks”), en 1704, y la Aritmética Universal (“Aritmética Universalis”) en 1707. La cátedra que ocupó fue creada en 1663 mediante el mecenazgo de Henry Lucas, miembro del Parlamento por la Universidad de Cambridge. Su primer titular fue Isaac Barrow, en 1664. El segundo, Newton. Después, quince titulares más hasta la fecha. Entre ellos personalidades como Edgard Waring (1760-1798), Charles

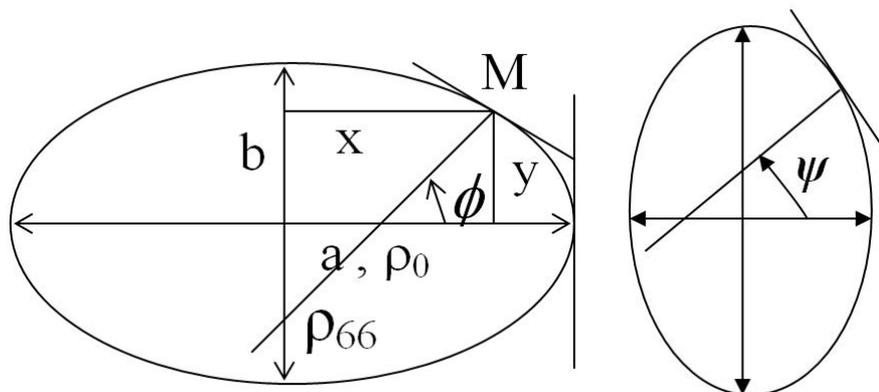


Figura 3.3: Izqda. Deducción de diferencia de arcos elementales en elipsoide oblató, a latitudes $\phi=0^\circ\text{N}$ y 66°N . Dcha. Figura básica en elipsoide prolato, con latitudes $\psi = \frac{1}{2}\pi - \phi$

Conociendo nuestra historia contemporánea en otras cuestiones, no debe extrañarnos que, en medio del tumulto que siguió, Jean Bernouilli llegara a escribir en 8 de Mayo de 1735: “Las ideologías han penetrado hasta tal punto en el debate científico que ni los propios experimentos pueden aportar pruebas concluyentes.... Si el observador está inclinado a encontrar la Tierra achatada o elongada, así la hallará”.³

Porque realmente, definido el elipsoide de revolución como la forma geométrica básica, todo se reducía a determinar la diferencia entre las longitudes rectificadas de dos arcos situados en el entorno de dos puntos en un cuadrante de una sección meridiana, que deberían escogerse suficientemente alejados para que el resultado no ofreciera dudas, es decir, a ser posible en los alrededores del Polo y del Ecuador... y aceptarlo sin reservas. Fig. 3.3 .

Por teoría bien conocida sabemos que el radio de curvatura de la elipse de semiejes a , b , excentricidad k , y sea oblata para fijar ideas, en el punto

Babbage (1828-1839), precursor de la Informática, George Stokes (1849-1903), autoridad indiscutible en Hidrodinámica y Cálculo Vectorial, Paul Dirac (1932 – 1969), propulsor de la Mecánica Cuántica y Stephen Hawking en la actualidad, tenido por el primer cosmólogo y astrofísico del mundo.

³Antonio Lafuente y Antonio Mazuecos “Los Caballeros del Punto Fijo” pg.72. CSIC/SERBAL. Madrid 1987. Citado por H. Brown “Science and the Human Comedy. Natural Philosophy in French literature from Rabelais to Maupertuis”pg. 174 y sig. Toronto y Buffalo. 1976. ”Mais, dites moi, Monsieur, les observateurs ont-ils quelque predilection pour l’un et l’outre des deux sentiments?. Car s’ils sont portés pour la terre applatie, ils la trouveront sûrement appalatie; si au contraire ils sont imbus de l’idée pour la terre allongée, leurs observations ne manquerant pas de confirmer son allongement.”

M(x,y), de latitud ϕ , vale

$$\rho_{\phi} = a \frac{1 - k^2}{(1 - k^2 \text{sen}^2 \phi)^{3/2}}$$

y particularizando para dos latitudes en el primer cuadrante $\phi_1 > \phi_2$ y siendo la expresión de un arco elemental rectificadado a latitud ϕ , $dl = \rho d\phi$, se tendrá

$$\frac{\rho_{\phi_1}}{\rho_{\phi_2}} = \left(\frac{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi_2}{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi_1} \right)^{3/2}$$

y con la condición de desigualdad impuesta

$$\text{sen} \phi_1 > \text{sen} \phi_2$$

$$1 - k^2 \text{sen}^2 \phi_2 > 1 - k^2 \text{sen}^2 \phi_1$$

y en definitiva

$$\frac{\rho_{\phi_1}}{\rho_{\phi_2}} > 1 \quad \rho_{\phi_1} > \rho_{\phi_2} \quad \rho_{\phi_1} d\phi > \rho_{\phi_2} d\phi$$

para $d\phi = d\phi_1 = d\phi_2$, resultando el arco elemental en ϕ_1 mayor que en ϕ_2 , para el elipsoide oblato. Y si el elipsoide es prolato, la argumentación es válida teniendo en cuenta que $\phi = \frac{1}{2}\pi - \Psi$, $\phi = \cos \Psi$, y el resultado obviamente contrario.

En resumen: “Si la longitud del arco crece con la latitud, el elipsoide es oblato y prolato en caso contrario. La diferencia entre dos arcos de igual amplitud, positiva o negativa, será por tanto máxima cuando uno esté en el Polo y otro en el Ecuador”.

La doctrina por lo tanto es inatacable y ya solo resta contrastarla con la práctica. Otra cuestión es que la tecnología de la época, inadecuada en instrumentos y medios para la dimensión del reto, y la categoría profesional de los técnicos comisionados lleguen a ofrecer un trabajo indiscutible, salvando el cúmulo de obstáculos y los niveles de incertidumbre que necesariamente iban a encontrar. Ese es precisamente el núcleo de nuestra historia.

Y por fin, ante la expectación general, la Academia de Paris en 1734 aprueba y promueve dos expediciones científicas. Una a Laponia, al N. del Círculo Polar Artico. A 66° N. Otra a Quito, en el Ecuador, con objeto de medir y comparar sendos arcos de meridiano ...

Pero es preciso retroceder en el tiempo un tanto porque antes ya se habían producido acontecimientos y efectuado trabajos que es preciso mencionar.

3.1. Primeras mediciones geodésicas de arcos de meridiano

Está generalmente admitido que las primeras campañas geodésicas conceptualmente acordes con la doctrina y praxis modernas se deben a la iniciativa y esfuerzo personal del Profesor Snellius⁴, de la Universidad de Leyden, en los Países Bajos, con la medición por el año 1615 del arco de meridiano Alkmaar-Bergen, mediante una cadena de triángulos, medida de bases de partida y llegada, orientación astronómica con determinaciones de latitud en los extremos, y operaciones de campo y cálculos y desarrollos de gabinete correspondientes. Como resultado, fijó la longitud del arco de 1° en 57.033 toesas $\langle \rangle$ 111.157 metros. Fig. 3.4.

En 1660, y tras la Restauración, Carlos II funda la “Royal Society of London” y en 1666 Luis XIV, a instancias de su primer ministro Colbert, la “Academie Royal de Sciences”. Ambas entidades lideran y, según hemos visto, compiten vigorosamente en los trabajos geodésicos europeos de los años siguientes, desde el principio y durante toda la Ilustración.

En 1665 Richard Norwood mide el Arco de meridiano Londres-York. Con 2°28' de amplitud, utilizando varillas métricas de acero rígidas y sin triangulación básica. Propone el valor de 57.300 toesas de París $\langle \rangle$ 111.735 metros para el valor del arco de un grado.

⁴Willebrord Snel van Royen, llamado Snellius (1580 – 1626). Profesor en la Universidad de Leyden fue el primero en proyectar, observar, calcular, ajustar errores, y orientar astronómicamente una cadena de triangulación con base de partida y llegada adecuada a lo largo de un arco de meridiano, uniendo en 1615 Alkmaar y Bergen en los Países Bajos. Con el material rudimentario de observación y la penosa metodología de cálculo asequibles en la época, su trabajo constituyó una verdadera proeza científica, concluyendo en la asignación de 57.033 toesas equivalentes a 111.157 metros para el valor del arco de un grado. A Snellius se debe también el primer manual de Geodesia conocido, donde se recoge el trabajo descrito, titulado “Eratostenes batavus de terrae ambitus vera quantitate a Willibrodo Snellio”. Lugduni Batavorum apud Iodocum a Colster. 1617.

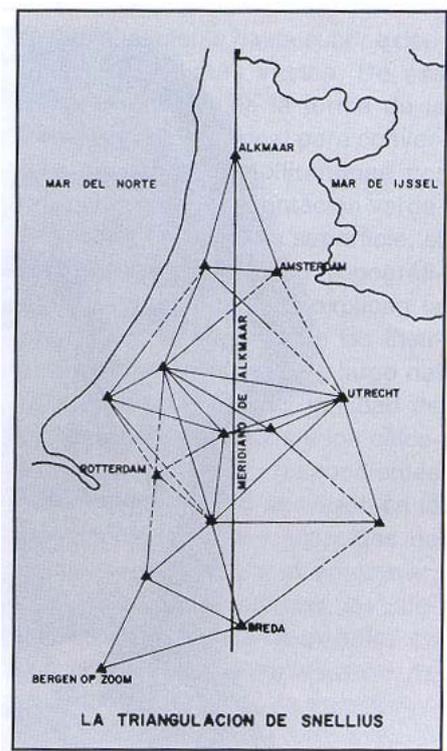


Figura 3.4: Triangulación del Arco de Meridiano Alkmaar-Bergen op Zoom

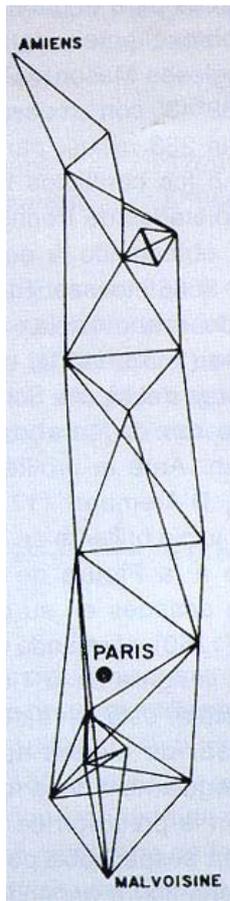


Figura 3.5: Arco Amiens-Paris-Malvoisine



Figura 3.6: Arco Dunkerque – Paris Collioure. Primer Mapa de Francia por hojas

En Francia el abate Jean Picard⁵ mide en 1670 el arco Amiens–Paris- Malvoisine. Empleando varillas de acero y triangulación. Calcula en 57.060 toesas <> 111.267 metros el arco de un grado.

Y desde 1683 a 1718, la saga de los Cassini⁶ toma el relevo midiendo el arco de Dunkerque – Amiens – Paris – Malvoisine – Collioure, cruzando toda Francia y triangulando una amplitud de 9° de latitud. Cerca de un millar de kilómetros de Norte a Sur. Es la base del primer Mapa de Francia a 1:86.400, en 182 hojas. Fig. 3.5.

Los Cassini fijan el valor del arco de 1° desde París hacia el Norte, hasta Dunkerque, en 56.960 toesas <> 111.072 metros. Y desde París hacia el Sur, hasta Collioure, en 57.097 toesas <> 111.339 metros. El resultado es un elipsoide prolato, con una excentricidad estimada en $k^2 = (a^2 - b^2) / a^2 = 0,144$.

La verdad es que los Cassini habían utilizado la doctrina y praxis disponibles de forma cuidadosa. Pero a los ojos de un observador moderno es lícito pensar que habían confiado demasiado en la certidumbre de sus mediciones. Los amplios márgenes de error que afectaban a metodología de observación y sobre todo a instrumentación, inadecuada por tosca e imprecisa a lo que se exigía de ella, y que en su decisiva componente accidental podían presentarse de forma equiprobable en sentido positivo o negativo, se habían acumulado aleatoriamente en el sentido y resultado descritos. En realidad habían determinado sin sospecharlo los dos valores anteriores con la certeza real de un margen de error superior a la diferencia entre ambos. Dicha diferencia carecía por lo tanto de poder de afirmación y resultaba inaceptable. Igualmente posible hubiera sido obtener los mismos valores intercambiados entre sí, derivándose de ellos la conclusión contraria .

La Escuela Cartesiana había quedado satisfecha, los newtonianos aparentemente derrotados, pero no convencidos, y la discusión científica, nacional y

⁵Jean Picard (La Fleche, 1620 – Prís, 1682). Astrónomo, geodesta y sacerdote francés. Formado en el Colegio de jesuitas de Henry le Grand. Autor en 1679 del primer Anuario Astronómico en lengua francesa.

⁶Giovanni Domenico Cassini (Perinaldo, Genova, 1625 – Paris, 1712). Astrónomo, geodesta e ingeniero italiano nacionalizado francés en 1673, con el nombre de Jean Dominique Cassini. Profesor en Bolonia emigró a Francia en 1669, fundando y dirigiendo el Observatorio de Paris. Autor de multitud de trabajos, su hijo Jacques Cassini (1677-1756) fue fundamentalmente geógrafo y geodesta. Académico en Londres y París, sucedió a su padre en el Observatorio y midió el arco de Dunkerque – Paris – Collioure. Inició el Mapa de Francia a 1:86.400. Su nieto Cesar Cassini (1714-1784) continuó el Mapa y el biznieto Jacques Dominique Cassini (1748-1845) lo concluyó. También siguió la tradición dirigiendo el Observatorio.

política tan encendida como antes, si bien la Academia se mostraba discretamente partidaria de los Cassini. En cualquier caso, se reconoce la necesidad de abordar la prueba decisiva. Y volvemos a París en 1734, con la aprobación de las dos expediciones científicas antes mencionadas.

Y vamos a tratar de estudiarlas por separado con criterios puramente científicos y desde el estado del conocimiento en el siglo XXI, tratando de analizar y cuestionar su viabilidad y el poder de afirmación del resultado, emitiendo una opinión cifrada y argumentada sobre si fue fruto solo del azar, o intervinieron otros factores dirimientes, metodológicos, materiales o humanos. Para ello evitaremos la aplicación del análisis pormenorizado de cada fase del trabajo, entre otras razones porque se ha hecho ya y concienzudamente en diversas publicaciones⁷ y utilizaremos sistemas de desarrollo estadístico – matemático avanzados de conjunto, entendemos que en buena parte originales, aprovechando que hoy conocemos con mayor aproximación los resultados que se buscaban en el siglo XVIII y por supuesto y a priori, una estimación asesgada y consistente de los errores absolutos que se cometieron.

⁷Vease a título de ejemplo Lafuente y Mazuecos, “Los caballeros del Punto Fijo” Opus. Cit. También Antonio Lafuente y Antonio J. Delgado “ La Geometrización de la Tierra (1735-1744)” CSIC. Instituto Arnau de Vilanova.Madrid 1984.

Capítulo 4

Siglo XVIII. Las misiones al Perú y Laponia

4.1. La Misión al Perú

El 16 de Mayo de 1735 la Academia Francesa autoriza formalmente las dos expediciones, al Perú y Laponia, que inician sus actividades de inmediato. La Comisión francesa al Perú estaba mandada por Luis Godin¹, astrónomo y matemático, y le acompañaban Charles Marie de la Condamine², químico y matemático, y Pierre Bouguer³, astrónomo, matemático e hidrógrafo. Todo embarcan en el navío “Le Portefaix” y arriban a Cartagena de Indias en 15 de

¹Luis Godin (1704-1760). Astrónomo y matemático francés, académico desde 1725. Discípulo de Joseph Nicolás Delisle. Jefe de la expedición al Perú, permaneció en aquellas tierras durante muchos años. Catedrático de Matemáticas en la Universidad de San Carlos de Lima. Intervino activamente en la reconstrucción de Lima y el Callao tras el terremoto de 1746. Director de la Escuela de guardias marinas de Cádiz donde murió. Escribió sus “Memorias”, “11 volúmenes de Historia de la Academia de Ciencias de París desde 1680 a 1699” y “Apéndice a las tablas Astronómicas de la Hire”.

²Charles La Condamine (1701-1774). Militar de profesión, académico desde 1730. Organizó por su cuenta una expedición por el Amazonas logrando importantes contribuciones al conocimiento de la quina, el curare, y el caucho. Autor de “La figura de la Tierra”, “Medida de los tres primeros grados de meridiano en el hemisferio austral, a partir de las observaciones de miembros de la Academia en el Ecuador”, “Relación de un viaje al interior de la América meridional”.

³Pierre Bouguer (1698- 1758). Experto en construcción naval, profesor de Hidrografía en El Havre, académico en la vacante dejada por Maupertuis. Designado el último para la misión al Perú después de la renuncia de Fouchy y Pimodan. El primero en regresar a Francia, publicó una relación de la misión en 1749, que envenenó definitivamente y hasta su muerte su relación con La Condamine.

Noviembre de 1735. Allí les están esperando Antonio de Ulloa y de la Torre-Guiral y Jorge Juan y Santacilia⁴, tenientes de navío de la Armada Española.

⁴El Diario de San Fernando (N° 30170) publicó el lunes 6 de Enero de 1913, año XI, el retrato y algunos datos biográficos de Jorge Juan aprovechando el segundo centenario del insigne marino:

Nació Jorge Juan en Novelda, el 5 de Enero de 1713 y fue bautizado en Monforte. Sus padres fueron Don Bernardo Juan y Doña Violante Santacilia; huérfano a los tres años quedó bajo la tutela de sus tíos Don Antonio y Don Cipriano, Bailío de Caspe. Cursó los estudios de Gramática latina en Zaragoza, y a los doce años pasó a la isla de Malta, donde tomó el hábito de caballero de esa orden. En 1730 figuraba ya como guardia marina de la Real Armada, en la compañía de Cádiz; hizo algunas campañas contra los moros y al zarpar para Nápoles el infante Don Carlos estaba embarcado en la escuadra. Marchó luego en la expedición contra Orán, siendo entonces sub-brigadier de guardias marinas. El año 1734 fue designado con su compañero Don Antonio Ulloa para desempeñar una comisión científica en la América del Sur, en unión de los delegados por la Academia de ciencias de París, con el propósito de averiguar la figura exacta de la Tierra. Siendo demasiado jóvenes, y para que tuvieran alguna mayor representación al alternar con las respetables personalidades extranjeras, se les concedió la graduación de tenientes de navío, saliendo de Cádiz en Mayo de 1735 y llegando, en Julio a Cartagena de Indias. Once años de perseverante y provechosa labor científica, al par de otra político-militar, invirtieron en América, retornando a Madrid en 1746. Ya capitán de navío desempeñó en Londres (Noviembre de 1748), una comisión reservada con los brigadieres de guardias marinas Don Pedro de Mora y Don José Solano, siendo tanta su habilidad y acierto que desde entonces el Gobierno estuvo constantemente ocupándole en diversas e importantes comisiones. Hizo más de veinte viajes, de orden superior, por toda España, y débesele la construcción de los arsenales de Ferrol y Cartagena con sus diques, y muchos trabajos también en el arsenal de la Carraca. Visitó las minas de Almadén, modificando diversos procedimientos, que resultaban favorables a los obreros y de positiva utilidad, pues las ganancias obtuvieron aumento. Hallándose en Cádiz en 1755 como ensayo de la Academia de Ciencias que se trataba de formar en Madrid, la "Asamblea amistosa literaria"; donde, los jueves discutían acerca de asuntos científicos y literarios. Era secretario Don José Carbonell. Académico de la Real de la Historia, y después comisario honorario de Marina y director de los estudios públicos de Cádiz. Don Juan Antonio Enriquez, que llegó a ser intendente de Marina y escribió sus "Efemérides" en 1804, tomaba parte de los trabajos de aquella asamblea. En 15 de febrero de 1767 con Sydi Amet el Gacel fue a Marruecos, nombrado embajador extraordinario cerca del emperador, llevando entre otros presentes 285 esclavos moros y turcos de Argel. En 1770 le confirió S.M. la dirección del Real Seminario de Nobles, tomando posesión el 24 de Mayo. Murió en Madrid, el día 21 de julio de 1773, a los sesenta años. Era de noble alcurnia, y pertenecía su familia a la casa de los condes de Peñalba. Residiendo en Cádiz, en 1753, fue a conocerle el almirante inglés Howe, que le ofreció una vez un banquete. Durante la invasión francesa, se demolió la capilla de Nuestra Señora de Balbaneda, donde reposaban los restos del ilustre marino, que fueron trasladados al Panteón de hombres ilustres, que proyectaban, rindiéndoles los enemigos honores de capitán general. Jorge Juan fundó en Cádiz el Real Observatorio, el año 1754, que se trasladó a San Fernando en 1799. Fundó la "Asamblea Amistosa" de la que hemos hablado. Estudió la organización para fundar en Madrid la Real Academia de ciencias exactas, físicas y naturales. Propuso la formación del Depósito hidrográfico de Marina. Construcción del Arsenal de Ferrol. Idem del de Cartagena . Obras importantes en el de la Carraca, Diques de Cartagena y

Ambos habían sido elegidos por José Patiño, ministro de Marina español a requerimiento del Conde de Maurepas, ministro de Marina y Vicepresidente de la Academia Francesa, cumplimentando una Real Orden de Felipe V que mandaba "... elegir dos de sus más hábiles oficiales, que acompañasen y ayudasen a los académicos franceses en todas las operaciones de la Medida ..."⁵. En el resto del texto se define muy claramente la calidad científica y

grada para los buques, de su invención, denominada de grada circular. Perfeccionamiento de la fábrica de jarcia y tejidos de la Carraca. Construcción de navíos, (según sus originales teorías), en los arsenales, y antes, de dos fragatas en el Perú. Construcción de las rudimentarias máquinas de vapor, llamadas en aquel tiempo bombas de fuego. Proyecto de canalización de aguas a Lorca y Plan, desde la sierra de Alcaraz. Obras importantes en las minas de Almadén, sofocando un incendio que duraba hacía dieciséis meses, y mejorando su salubridad y producción. Capitán de la compañía de Guardias marinas. Director del Real Seminario de Nobles de Madrid, elevando en dos años el número de alumnos, de 13 a 82. Poseía los honores y cargos siguientes: Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan; Jefe de Escuadra de la Real Armada; capitán de la compañía de Guardia marinas; Director del Seminario de Nobles; del consejo de S.M. en la Junta de comercio y moneda; de la Real Sociedad de Londres; de la Reales Academias de París y de Berlín; consiliario de la de San Fernando, y embajador extraordinario de España cerca de la corte marroquí. Fue autor de diecinueve obras científicas, y diez memorias, en todas las que difundió su profundísimo saber y originales concepciones, que lograron la admiración y el aplauso de los centros cultos y los hombres sabios de su época. Como testimonio honroso para la fama y consideración alcanzadas por el sabio Jorge Juan, publicamos una copia de este interesante documento: "Al esclarecido señor El Sr. D. Jorge Juan, Comendador de la Nobilísima Religión de San Juan, y dignísimo Capitán de navío de la Real Armada Española, etc., etc., etc. A cuya exima doctrina, perspicaz ingenio, suma de diligencia e infatigable trabajo puede ponderarse la República literaria por el continuo desvelo, que unido a un perfecto conocimiento de las ciencias matemáticas que aplicó para determinar la figura y magnitud de la Tierra: Obra que (concluida felizmente y demostrada después con la mayor elegancia en sus clarísimos escritos para utilidad del género humano) se ha granjeado entre los sabios el más agradable y distinguido lugar. Y en este testimonio de su mayor veneración, si no desdeña por corta la ofrenda, le dedica este trabajo. Conde Felipe de Stanhope." Tal fue el gran marino y sabio español cuya memoria gratísima, enaltecen en estos momentos sus paisanos los noveldenses, que también levántanle un monumento. La Marina y España pueden estar orgullosas de una gloria tan legítima, y tan diferentes de esas otras de oropel que hoy abundan y usurpan lo que en otro caso no habrían de obtener. ¡Loor eterno al esclarecido marino;

⁵"...no solo para que así pudiese hacerse con mayor facilidad y brevedad, sino también para que pudiesen suplir la falta de cualquier académico o de todos, temible en tantas navegaciones y diferencias de climas y para continuar y aun hacer enteramente ellos solos en caso necesario la Medida proyectada, para dar después cuenta de ella a la Academia Real... dos personas en quienes concurrieren no solo las condiciones de buena educación indispensables para conservar amistosa y recíproca correspondencia con los Académicos franceses, sino la instrucción necesaria para poder ejecutar todas las observaciones y experiencias conducentes al objeto, de modo que el resultado fuese fruto de sus propios trabajos, con entera independencia de lo que hicieran los extranjeros". Real Orden de 20 de Agosto de 1734.

humana que se exigía de ambos, la responsabilidad que se les encomendaba, y lo que se esperaba de su actuación. Nada menos que, entre otras cosas y en caso de necesidad, estuvieran dispuestos a hacer ellos solos todo el trabajo.

Y con estas premisas se optó, no por dos oficiales, sino por dos cadetes, guardias marinas de 21 años (Jorge Juan, 1713 – 1773) y 19 años (Antonio de Ulloa, 1616 – 1795) que destacaban en la Academia de Cádiz por su excepcional brillantez. Se consideró oportuno ascenderlos de golpe a tenientes de navío para que tuvieran adecuada graduación militar y así se hizo, sin pasar por alférez de fragata y alférez de navío. Puede asegurarse, y el tiempo luego lo confirmó, que la elección fue adecuada y los elegidos no eran cualquier cosa.

El 26 de Mayo de 1735 zarparon de Cádiz, Jorge Juan acompañando al Marqués de Villagarcía, que acababa de ser nombrado Virrey del Perú, en el navío “El Conquistador”, y Antonio de Ulloa en la fragata “Incendio”. El 7 de Julio arribaban a Cartagena de Indias.

El 7 de Diciembre de 1735 La Condamine escribe a Voltaire desde Cartagena de Indias: “... hemos encontrado dos camaradas de viaje nombrados por la Corte de España ...para secundarnos como geómetras y astrónomos.... tan pronto fueron elegidos pasaron súbitamente de la condición de guardiamarinas a la de tenientes de navío. Es así como se empieza a contar en España con las gentes que solo llevan al Perú el amor a la Física de pacotilla...”.

Porque François Marie Arouet “Voltaire” llevaba ya tiempo muy interesado en la Geodesia, en calidad de newtoniano convencido. Tal vez aunque solo fuera para llevar la contraria a la mayoría de sus compatriotas.

Voltaire había pasado una temporada en la Bastilla⁶ por haber ultrajado a un noble y consideró prudente exiliarse a Londres, donde permaneció entre 1726 y 1729. Conoció a Newton, asistió a sus funerales en 1727 y volvió a Francia encendido de fe en los “Principia”. También con las subversivas “Lettres philosophiques”⁷ bajo el brazo, publicadas en 1734 promoviendo un regular escándalo, que incluyó la quema pública en un cadalso y por un verdugo de algunos ejemplares. Buscando un clima más favorable para su salud en abril del mismo año se acogió al exilio interior de la aislada mansión

⁶Que fue la segunda, porque en 1723 había sido encarcelado por escribir una sátira a la memoria de Luis XIV.

⁷También llamadas “Lettres d’Angleterre”. Versión española como “Cartas Filosóficas”. Alianza Editorial, Madrid 1988. En ellas elogiaba la monarquía parlamentaria, el sistema judicial inglés y su tolerancia religiosa, comparándolos con la monarquía absoluta, el régimen de privilegios y el dogmatismo de la Iglesia católica en Francia que salían muy mal parados.

rural de Cirey-Blaise, Lorena, cerca de la frontera, propiedad de Florent Claude, Marqués de Châtelet-Lamon. Allí no se encontraba a la sazón el marqués, pero sí la marquesa, Gabrielle Emile Le Tonnelier de Breteuil, que pasando por alto la cara de gárgola del literato se transformó rápidamente en su amante, condición que solo resolvió la muerte de la dama de postparto (se supone que de una hija de Voltaire) en 1749. Todo muy banal. Pero lo llamativo del asunto es que, si bien Voltaire no sabía una palabra de Física, en cambio la Marquesa, muy estudiosa, cuidadosamente educada y dotada de una brillante inteligencia, era una científica de la categoría suficiente como para traducir del difícil latín de Newton sus Principia, labor que realizó aplaudida y estimulada por su amante entre 1738, con publicaciones parciales y divulgativas, y 1747 en que terminó su labor. No obstante, hasta 1759 no se publicó la obra completa, con un fervoroso prefacio de Voltaire. Hasta finales del siglo XX ha sido la única traducción al francés y una de los mejores disponibles de la Física newtoniana en cualquier otra lengua.

Con todo ello, Voltaire escribía a J.B.N. Formont en 1735: "... El Consejo de España ha nombrado a algunos pequeños filósofos españoles para aprender el oficio con los nuestros..." y en 1736 estrenaba en París con gran éxito de crítica y público la tragedia épica "Alzire ou les américains", sobre las vejaciones infringidas por los españoles a la población indígena. "La escena es en Perú, señores, estancia poco conocida de los poetas. La Condamine mide este país. Los españoles lo esquilman. Yo lo canto" explicaba a Ph. Berger.

Entre tanto los académicos franceses se dedicaban intensa y contumazmente a pelearse entre sí. Godin rompió muy pronto sus relaciones, incluso verbales, con Bouguer y la Condamine y estos dos últimos terminaron totalmente distanciados y discrepando profundamente. Al final, todos presentaron conclusiones por separado. No cabe duda que, para ser su primer trabajo profesional, a Ulloa y Jorge Juan no les faltaban dificultades. Pasemos por alto peripecias del calibre de dos guerras con los ingleses materializadas en Perú por las incursiones de la flota del Almirante Anson y la movilización consiguiente de Ulloa y Jorge Juan y todavía quedan las importantes dificultades y complicaciones propias del trabajo propiamente dicho, que tuvieron que abordar y resolver prácticamente solos, sin colaboración ni tan siquiera asesoramiento apreciables. Tan solo Louis Godin, por el que tomaron partido en su enfrentamiento con el resto del equipo francés, se tuvo que ocupar de ellos y pronto aprendió a valorar y respetar su labor. No cabe duda que su elección fue acertada.

Antonio de Ulloa se erigió en cronista e historiador oficial de los acontecimientos. Tal vez un punto menos técnico que Jorge Juan y un punto más marino

de guerra, como demostró después a lo largo de toda su vida militar, que cultivó y prefirió, llegando a los más altos empleos, mandos y grados, escribió el libro “Viaje a la América Meridional”⁸ Fig. 4.1. Es una obra literaria en la que con muy ligero o nulo soporte científico geodésico - astronómico, narra en forma viva y directa las épicas aventuras que corrieron durante NUEVE AÑOS (1735 – 1744) llenos de viajes, aventuras, enfermedades, penas, guerras, peligros y fatigas. Con disputas internas entre los académicos franceses, enfrentamientos con indígenas y criollos que estuvieron a punto de conducir a Jorge Juan a la cárcel por una simple cuestión de protocolo. Y también menosprecio inicial a dos cadetes veinteañeros que tuvieron que trabajar de firme para conquistar el posterior respeto a su profesionalidad impecable y su obra bien hecha.

Se ocupa no obstante en profundidad de la Geografía e Historia de América y de sus habitantes, usos y costumbres en las tierras visitadas, así como de su Botánica y Zoología. Con dibujos y descripciones de animales y plantas muy cuidadosos.

Termina con el retorno a España de Jorge Juan y él. Los franceses rindieron viaje por su cuenta e individualmente, como era de esperar, primero Bouguer, luego La Condamine y finalmente Godín, después de una serie de vicisitudes que le llevaron a la bancarrota primero y a profesor en la Universidad de San Carlos en Lima y Director en Cádiz de la Academia Española de Guardias Marinas, donde murió.

Todo ello constituye una nueva historia de aventuras que no es de este lugar. Sin embargo sí lo es consignar que Jorge Juan y Antonio de Ulloa decidieron volver a España en barcos distintos para asegurar la salvaguardia de la valiosa documentación que transportaban y su llegada a destino. Así, zarparon el 22 de Octubre de 1744 en el puerto de El Callao en las fragatas francesas “Liz” (Jorge Juan) y “Deliverance” (Antonio de Ulloa).

La “Deliverance” es apresada en Louisbourg por la fragata inglesa “Sunderland”. Ulloa arrojó al mar toda la documentación comprometida. Por ejemplo sus “Memorias Secretas de un viaje a América”⁹, muy apreciadas por

⁸Antonio de Ulloa “Viaje a la América Meridional”. Edición moderna en dos tomos de 350 pgs. cada uno. Edición de Andrés Saumell Lladó. Crónicas de América – Dastin Historia. Madrid 1997.

⁹Que era la parte reservada de la misión que les llevó al Perú, que también lo había. Redactadas por los dos oficiales, con una madurez y objetividad sorprendentes, trataban del estado político, diplomático y militar de aquellas provincias. “... siendo para instrucción secreta de los ministros, de aquellos que deben saberlo, y no para divertimento de ociosos, ni objeto de detracción de malévolos...” Fueron ascendidos a capitanes de fragata y tal vez más, como desgraciadamente sucede, por su actividad política que por su

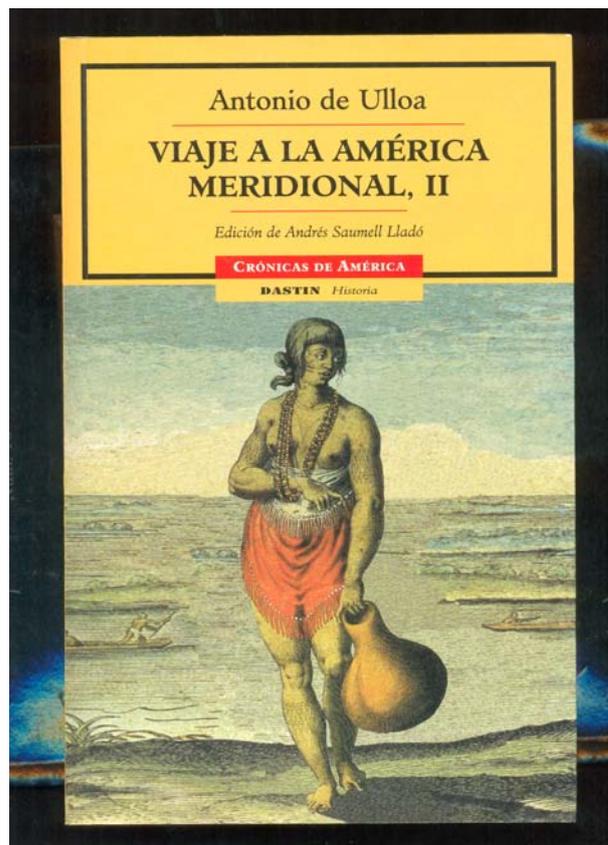


Figura 4.1: Portada de una edición moderna (1997) de la crónica de Antonio de Ulloa

Fernando VI (había muerto Felipe V) y su ministro, Don Zenón de Somodevilla y Bengoechea, Marqués de la Ensenada, protector de los dos marinos y hombres de ciencia hasta su caída en desgracia en 1755 por un turbio asunto de intrigas cortesanas en altas alcobas... Sin embargo conservó toda la documentación científica que se le ocupó al ser hecho prisionero no sin advertir del interés que entrañaba para todas las naciones de Europa.

Encerrado Ulloa en Portsmouth fue liberado por el Almirantazgo Inglés, en cuanto fue enterado de los hechos, representado por el Duque de Bedford ya que "...la guerra no debe ofender a las Ciencias ni a las Artes ni a sus profesores...". Y no solo eso, sino que, habiendo pasado a Londres, el Ministro de Estado Duque de Harrington, ex embajador en Madrid, le presentó a Martín Folkes, Presidente de la Royal Society, donde llegaron sus papeles desde el Almirantazgo para ser estudiados. En consecuencia, Folkes junto con el Conde Lord Stanhope¹⁰ le propusieron y promovieron con éxito como miembro de la Royal Society of London, ingresando en ella el 11 de Diciembre de 1746. Vieja y noble Europa.

Jorge Juan arribó sin novedad a Brest el 31 de octubre de 1745. Desde allí se dirigió a París, donde fue recibido en la Academia, teniendo la oportunidad de conocer a Marian, Clairaut, Reamur, Le Caille... y tantos otros famosos sabios y científicos. Con alguna reticencia inicial de La Condamine, al final todos reconocen su elevada contribución al progreso de la Ciencia, y es nombrado por unanimidad miembro de la Royal Academie de Sciences de París en sesión de 22 de Enero de 1746. Años después, en comisión oficial a Londres por el Gobierno Español, es recibido en 6 de Abril de 1749 también como miembro de la Royal Society of London. Tenía 36 años. En aquel tiempo era simplemente imposible mayor reconocimiento ni llegar a más. A su edad, mucho menos.

Parece que tampoco es menos cierto que año y medio después de su nombramiento tuvo que escapar de las Islas Británicas disfrazado de marinero y acompañado por un grupo de técnicos navales contratados de forma clandestina por algún asunto de espionaje industrial, llegando todos a España sin novedad....

aportación científica.

¹⁰Cuya descendiente Esther Stenoffo, Lady Stanhope, oficialmente excéntrica británica que viajó al Líbano hacia 1810, llegando a ser llamada "reina de los árabes" y vistiendo a su usanza, se sospecha que tuvo que ver con la muerte de Ali Bey (o Domingo Badía Lebllich) por ingestión de ruibarbo envenenado en 1818 en ruta desde Damasco a la Meca, como piadoso peregrino musulmán y espía por cuenta de Francia. Vicente Simó Santonja y Manuel Chueca Pazos "Cartografías fantásticas". Pgs. 117 y sig. Real Academia de Cultura Valenciana. Valencia. 2008.

El trabajo científico desarrollado por Jorge Juan y Antonio de Ulloa en la medición del arco de meridiano de Quito se recoge en su integridad y detalle en la obra “Observaciones Astronómicas y Phísicas hechas de orden de S. Mag. en los Reynos de Perú de las cuales se deduce la Figura y Magnitud de la Tierra y se aplica a la Navegación”. Por D. Jorge Juan, Comendador de Aliaga en la Orden de San Juan, Socio correspondiente en la Real Academia de Ciencias de París, y D. Antonio de Ulloa, de la Real Sociedad de Londres, ambos capitanes de Fragata de la Real Armada. Impreso de Orden del Rey Nuestro Señor en Madrid, por Juan de Zúñiga, en 1748. Se han hecho excelentes ediciones posteriores, y una última en 2007, que es la que hemos utilizado¹¹.

Como obligado y necesario acompañamiento al “Viaje a la América Meridional” se trata en este caso de un Tratado científico desarrollado sobre un trabajo geodésico completo de alta calidad, referido a la medición de un arco de meridiano de amplitud algo superior a 3° en el entorno del Ecuador, ciudades de Cuenca y Quito, desde el proyecto hasta la adopción de resultados, con observación de campo en los Andes a unos 3.500 metros de altura promedio (Cumbre del Pichincha 4.817 metros). Comprende medida de bases, orientación astronómica, triangulación y operaciones complementarias. Labor de gabinete completa y rigurosa. Resultados finales con evaluación de error temible adoptados por toda la Comisión. Fig.4.2 .

La localización concreta del trabajo se representa en el mapa de la figura 4.4 y en la 4.3 el desarrollo gráfico en croquis de la triangulación, compuesta por una cadena de 28 triángulos sobre el arco de meridiano de $78^\circ 45'$ de Long. Oeste de Greenwich, cercano a Quito, en la actual República de Ecuador, antiguo Virreinato del Perú, sobre los Andes y con una amplitud ligeramente superior al entorno comprendido entre el Ecuador y los 3° Latitud Sur. Todos muy bien conformados, de lado promedio en unos 25 km., resolubles directamente como planos con reparto del cierre angular o, en su caso, con la única precaución complementaria de aplicación del Teorema de Legendre¹², enlazando 30 vértices con bases de partida, llegada y comprobación en

¹¹Jorge Juan y Antonio de Ulloa “Observaciones etc...” Extramuros facsímiles S.L. Sevilla 2007.

¹²El Teorema de Legendre del que hablamos dice así: “Puede resolverse el triángulo esférico A'B'C' a partir del plano ABC, en el que los lados tienen la misma longitud que los correspondientes en el esférico, siendo los ángulos los del triángulo esférico corregidos en dos tercios del semiexceso esférico y siendo ambos triángulos equivalentes (de igual área)”. Sabemos con certeza que fue precisamente eso lo que hicieron los expedicionarios en Perú, repartir el error de cierre de cada triángulo entre los tres ángulos interiores. El triángulo elipsoidico puede considerarse incluso en geodesia de primer orden, como esférico sobre la esfera local, y el teorema de Legendre permite finalmente resolverlo como plano

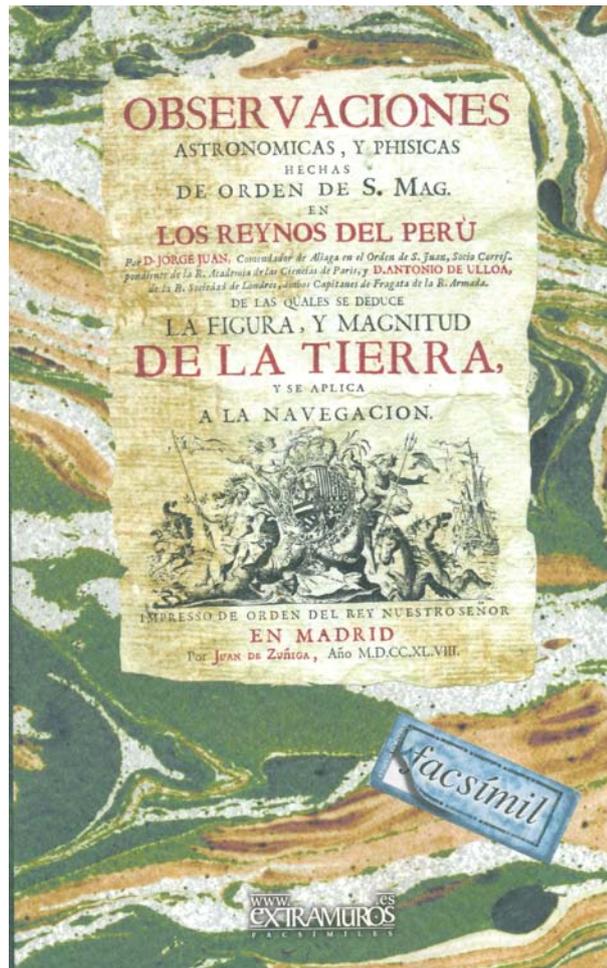


Figura 4.2: Portada de una edición moderna (2007) de las “Observaciones...”

Yarouqui, Cuenca y Tarqui.

4.1.1. Introducción a los métodos y la instrumentación

La Comisión planteó su trabajo de forma rigurosa y Jorge Juan lo desarrolla minuciosamente en sus “Observaciones”. Un triángulo queda definido por un lado y los ángulos adyacentes, por tanto bastará con medir un lado “base” de la triangulación proyectada y todos los ángulos para que la figura geométrica quede más que definida, con un ángulo redundante por triángulo que permite promediar. El lado o eje medio de la cadena es de triángulos es de 25 km., como ya hemos comentado resolubles todos como planos. Será prudente medir una base más “de llegada” y otra “de comprobación” a lo menos, para verificar la escala y el cierre lineal del levantamiento, repartiéndolo en su caso a lo largo de la cadena ya que compensarlo rigurosamente era inasequible en la época. Por observaciones astronómicas a diversas estrellas se determinan las latitudes de los extremos de la cadena y por diferencia, la amplitud de ésta, que debe resultar algo superior a 3° , a efectos de poder promediar y obtener con más precisión el valor de la longitud de 1° . Finalmente, será preciso reducir todo el trabajo al nivel del mar, que se entiende como superficie de referencia geoidal adoptada. Evidentemente, no será un elipsoide, pero, si la precisión es suficiente, podrá calcularse uno de aproximación.

Sin embargo, no hay que olvidar que la cuestión fundamental es definir sin vacilación el sentido positivo o negativo de la diferencia entre los arcos medidos por las dos Comisiones que dirimiran la solución oblata o prolata del globo. El resto es más bien un buen deseo. Y veremos que el trabajo de Jorge Juan (y por supuesto, de Ulloa) cumplía cualquier requerimiento razonable para la época. Algún otro, no tanto.

La doctrina básica está muy clara. Falta no obstante una Teoría de Errores complementaria que, a través del Cálculo de Probabilidades y la Estadística Inferencial Inductiva permitan juzgar rigurosamente y cifrar la calidad de las previsiones y los resultados. Porque de nada vale fijar un margen, intervalo, figura o recinto de error, que todo viene a ser lo mismo, si no se agrega el poder de afirmación, fiabilidad o probabilidad a priori de que sea cometido, es decir el riesgo de la aventura emprendida, y a posteriori y en los mismos términos, el resultado alcanzado.

Recordemos que el fracaso de los Cassini se debió seguramente a que no fueron conscientes de que el valor de la diferencia de los dos arcos sobre el

según es el caso habitual de cálculo.

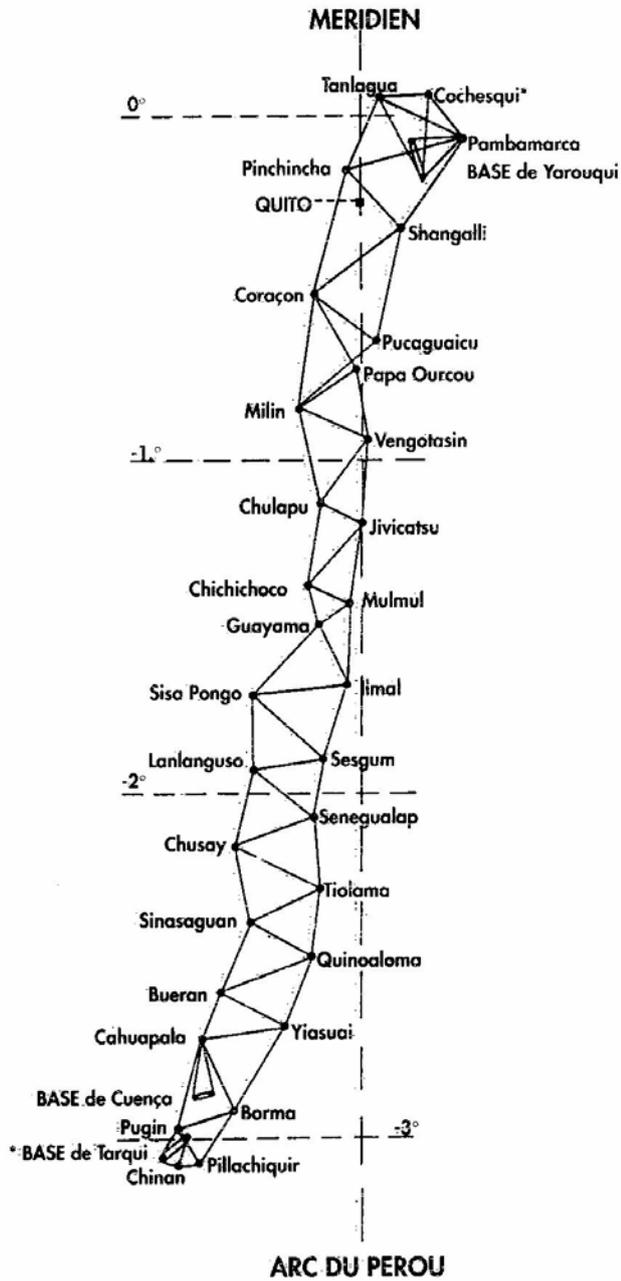


Figura 4.3: Esquema de triangulación del Arco del Perú (en el proyecto de Godin). Las triangulaciones observadas y calculadas por cada expedicionario tenían la misma configuración geométrica básica, diferenciándose tan sólo en puntos complementarios o de ampliación de bases



Figura 4.4: Localización geográfica de triangulación del Arco del Perú. Recorrieron alrededor de 400 km durante dos años. La flecha indica la longitud del arco de meridiano medido en Quito

meridiano que tenían que determinar estaba dentro del error temible que podían cometer y por lo tanto, los resultados obtenidos no tenían poder de afirmación alguno.

En cuanto a los medios materiales, nada podría hacerse si no se disponía de tecnología e instrumentación capaz de medir adecuadamente dentro de la mínima precisión exigible distancias lineales, para aplicar en la determinación de bases, y valores angulares, para observar la triangulación. Así pues, aparte de toda un conjunto de medios astronómicos complementarios, auxiliares y accesorios, los dos instrumentos fundamentales para la ejecución del trabajo fueron las reglas, que permitía determinar distancias lineales con un patrón de medida prefijado¹³ y los cuadrantes, instrumentos goniométricos que permitiera medir ángulos, en plano horizontal y vertical.

En goniometría era ya de utilización universal el sistema sexagesimal, con grados, minutos y segundos. La distanciometría se encontraba en una situación

¹³G. Bijourdan “Le système métrique de poids et mesures”. Paris, 1901. La toesa era la medida de longitud francesa y se utilizó en los trabajos que nos ocupan. Sus submúltiplos eran: 1 toesa <> 6 pies, 1 pie <> 12 pulgadas, 1 pulgada <> 12 líneas, 1 línea <> 12 puntos. Es inútil extenderse en las equivalencias que, con mayor o menor aproximación, se utilizaban entre los distintos territorios de Europa y dentro de la misma Francia. Con suficiente aproximación podemos asumir que una toesa equivalía a 1,95 metros.

cercana al caos, con unidades lineales distintas en cada nación de Europa y dentro de ellas, casi en cada territorio¹⁴. Se construyó un patrón de hierro de la toesa francesa de París que acompañó a los expedicionarios al Perú en calidad de fiel contraste al que se convino adaptar las mediciones. Godin ordenó construir una copia del patrón que quedó en París en previsión del deterioro que pudiera sufrir el otro durante el viaje. No obstante Maupertuis se llevó después la copia a Laponia. Teóricamente, el patrón se había materializado en un prisma de hierro fundido y sección triangular cuyas aristas medían 1 toesa, subdividida en pies, líneas y puntos. Dividir en partes realmente iguales algo es un problema evidentemente aún no resuelto con error cero. En la época que nos ocupa es fácil imaginar la situación. Y además, Mairan comprobó que la toesa del Norte era 1/20 línea más corta que la del Ecuador. Jorge Juan también encontró discrepancias entre ambas unidades. El resultado fue la comisión de errores sistemáticos cuya magnitud, seguramente importante, se extendió con efecto multiplicador por toda la red de triangulación.

En cualquier caso, no había otra cosa y la medición de bases se efectuó, con ampliación trigonométrica posterior, en la llanura de Yarouqui, alrededores de Quito, base fundamental, y en Tarqui y Cuenca, bases de llegada y comprobación. El método básico de trabajo era extender reglas entre perchas debidamente niveladas y leer los valores parciales sumándolos después. Aparentemente muy simple. En la realidad, un infernal sumidero de errores de alineación, nivelación, lectura, dilatación y contracción del material, ambientales, etc..., que requería grandes dosis de paciencia, concentración y profesionalidad.

Toda la instrumentación descrita había sido construida por el francés Langlois, que junto con Lemaire y el inglés Graham eran las firmas más prestigiosas del momento en artesanía de precisión.

Los cuartos de círculo o cuadrantes (Fig.4.5 y Fig.4.6) procedían de los mismos fabricantes mencionados.

Es subrayable que, cuando Jorge Juan redactó el primer proyecto de confección de un Mapa Nacional de España por hojas a escala 1:80.000 en 1751, a instancias del Marqués de la Ensenada¹⁵ que no llegó a iniciarse, consideraba como condición imprescindible el encargo a París o Londres de la instrumentación necesaria, en especial y como mínimo, 32 cuadrantes de importación de 20 pulgadas de radio¹⁶. Y también requería la formación de un

¹⁴Lafuente y Delgado, "La geometrización de la Tierra" Opus. Cit. Pg. 51 y sig.

¹⁵Manuel Chueca et alt. "Compendio de Historia de la Ingeniería Cartográfica", pg. 258 y sig.

¹⁶Jorge Juan "Método de levantar y dirigir un Mapa o Plano General de España, por

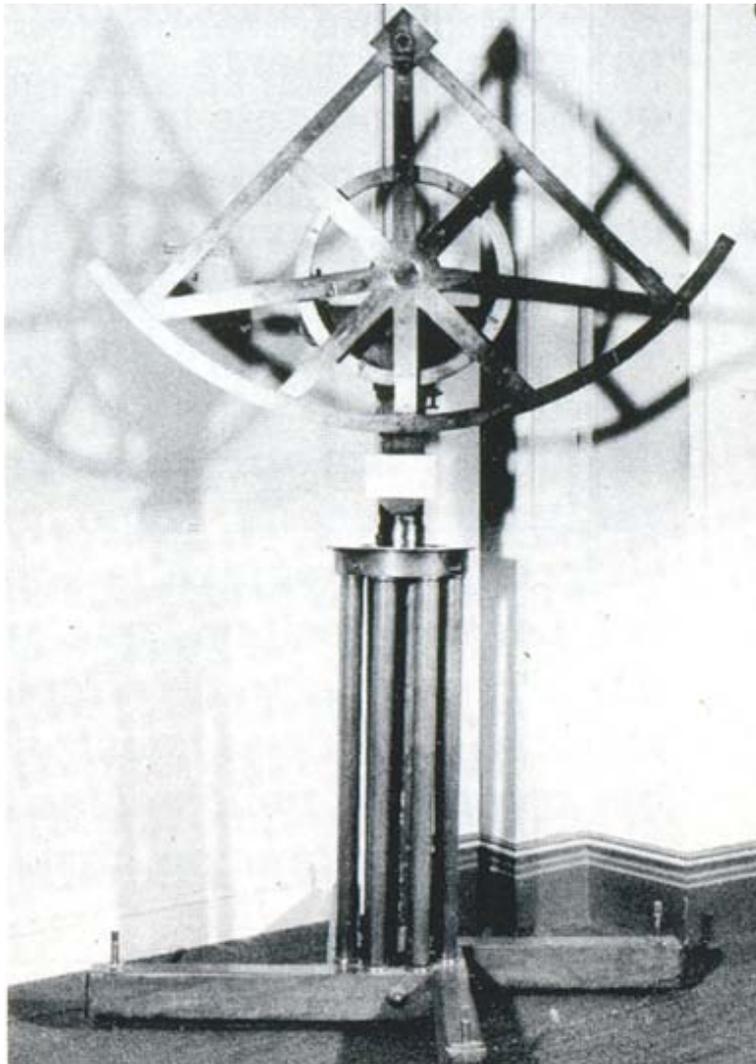


Figura 4.5: Fotografía del cuadrante utilizado por Jorge Juan y Antonio de Ulloa. Museo Naval de Madrid



Figura 4.6: Estaciones goniométrica diurna en los Andes

equipo de “... sesenta y cuatro hombres inteligentes para 16 compañías ... que no es tan fácil juntarlos...”.

Siguiendo, fundamentalmente, la teoría y la práctica que desarrollan Jorge Juan y Antonio de Ulloa en la obra “Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú...” en los siguientes epígrafes explicamos las fases y el método de la triangulación.

4.1.1.1. Cálculo de la distancia geométrica entre los extremos de la base

Mientras se resolvían las disputas dentro de la compañía sobre si debía medirse un arco de meridiano o de paralelo, el 8 de octubre de 1736¹⁷ se decide iniciar la medida de la base fundamental en la llanura de Yaruqui, lugar situado a unas cuatro leguas de Quito hacia el oriente “cuya llanura es muy unida, aunque con alguna inclinación; y solo se hallaba en las cercanías de Oyambaro una quebrada de 9 toesas de ancho, cuyo corto obstáculo no era de momento alguno”, escribe Jorge Juan. Inicialmente se pensó para dicha

medio de triángulos observados por buenos cuartos de círculos y reflexiones sobre las dificultades que pueden ofrecerse”. Informe presentado por Jorge Juan a la Secretaría de Estado y Despacho Universal de la Marina. Estudiado por Mario Ruiz Morales y Mónica Ruiz Bustos en su excelente trabajo “Jorge Juan y sus proyectos para un Mapa de España”. Universidad de Granada. Granada 2005.

¹⁷Los trabajos comenzaron el 18 de octubre de 1736 y terminaron el 5 de noviembre de 1736. Cuenta Juan que los primeros días no alcanzaban a medir más de 40 toesas, mientras que los últimos, con mayor experiencia midieron hasta 520 toesas. Página 150 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Jorge Juan y Santacilia & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

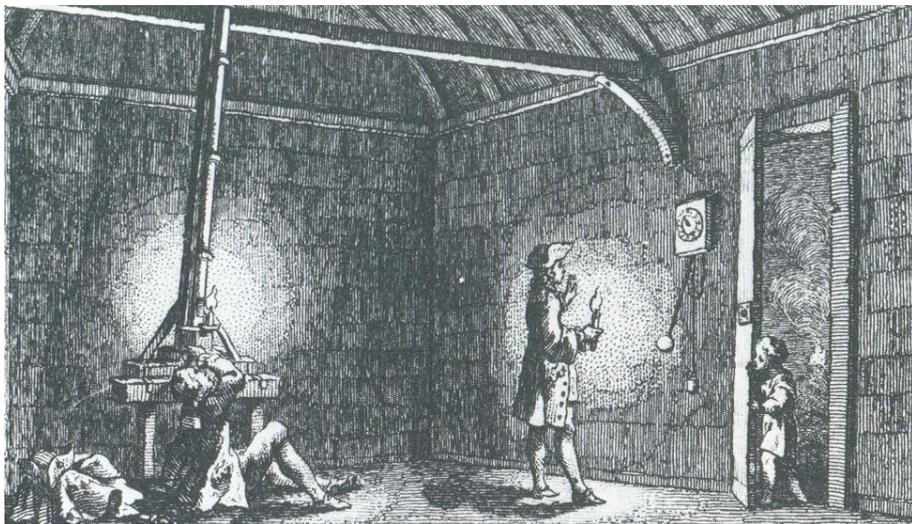


Figura 4.7: Estaciones astronómica nocturna cenital en los Andes

operación un lugar próximo a Cayambe, pero lo desecharon al descubrir un pronunciado desnivel del terreno. Pusieron señales a poco más de 600 toesas (1169.4 m), unas de otras, para guiar por ellas la medida en línea recta entre los extremos de la base. Estaban perfectamente alineadas. El método consistía en medir toesa a toesa la distancia indicada.

Así la longitud aproximada de la base era de 12 Km, entre las haciendas de Oyambaro y Caraburu, en la llanura de Yaruqui. Se formaron dos grupos: Bouguer, La Condamine y Ulloa (que midieron desde Caraburu a Oyambaro, y por otro lado Godin y Juan (desde Oyambaro a Caraburu). El terreno sobre el que se midió la base tenía un desnivel de 126 toesas¹⁸.

Comenta Juan: “El corto yerro de una línea cada 10 toesas produciría otro considerable de 61 de éstas en el grado”, 61 líneas equivalen a 0,138 m por lo que extreman las precauciones en la medida de la base¹⁹.

¹⁸Para la historia de la toesa puede consultarse G. Bijourdan, *Le Systeme métrique des poids et mesures*, Paris, 1901. También la obra de J.F. Lalande, *Astronomie*, 3 vols., París, 1792, III, hace reflexiones sobre el tema. La obra de C.Wolf, *Histoire de l’Observatoire de Paris de sa fondation à 1793*, Paris, 1902, pp. 91-3, cuenta los primeros intentos desde el observatorio de París para racionalizar el tema del sistema de medidas.

¹⁹Años más tarde, cuando La Condamine diera a conocer en las *Memoires de l’Academie* de 1746 sus trabajos en Quito escribe sin embargo: “Como sobre una distancia de más de 6000 toesas no se puede estar seguro en una medida real de algunas pulgadas, sería inútil alargar en la precisión del cálculo más allá de los límites de nuestra habilidad, tanto más cuanto que incluso un pie de error en la medida de la Base, no supondrá más que una toesa y un tercio de diferencia en el grado”.

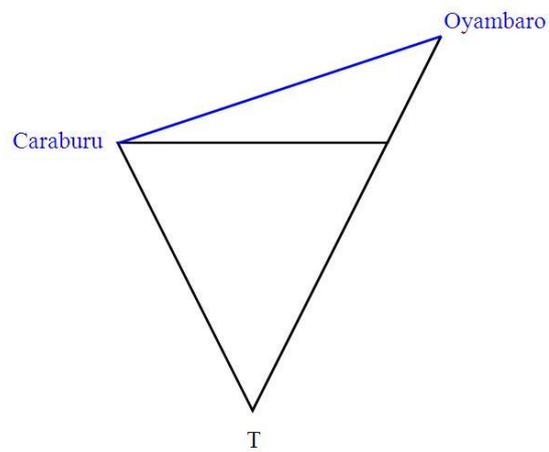


Figura 4.8: Base fundamental con un desnivel de 126 toesas, 245,574 m, entre sus extremos: Caraburu (1226 toesas s.n.m , 2389,48 m. s.n.m) y Oyambaro (1352 toesas s.n.m., 2576,58 m. s.n.m). Página 130 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Jorge Juan y Santacilia & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

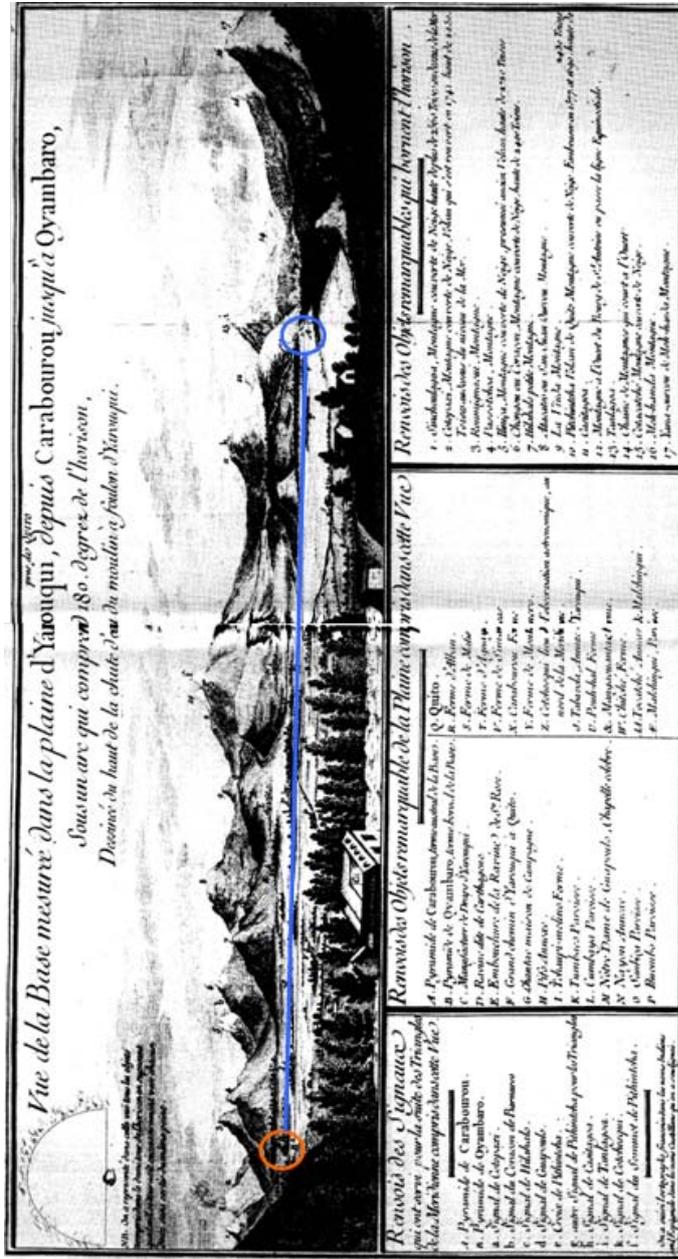


Figura 4.9: Vista de la llanura de Yarouqui. Las letras A y B, marcan los dos extremos de la base fundamental. El círculo azul señala la letra A (vértice Caraburu), el círculo naranja señala la letra B (vértice Oyambaro) y la línea azul la base. La Condamine, *Journal d'un voyage fait par ordre du roi à l'équateur* (París, 1751), página 20. Bibliothèque National. París

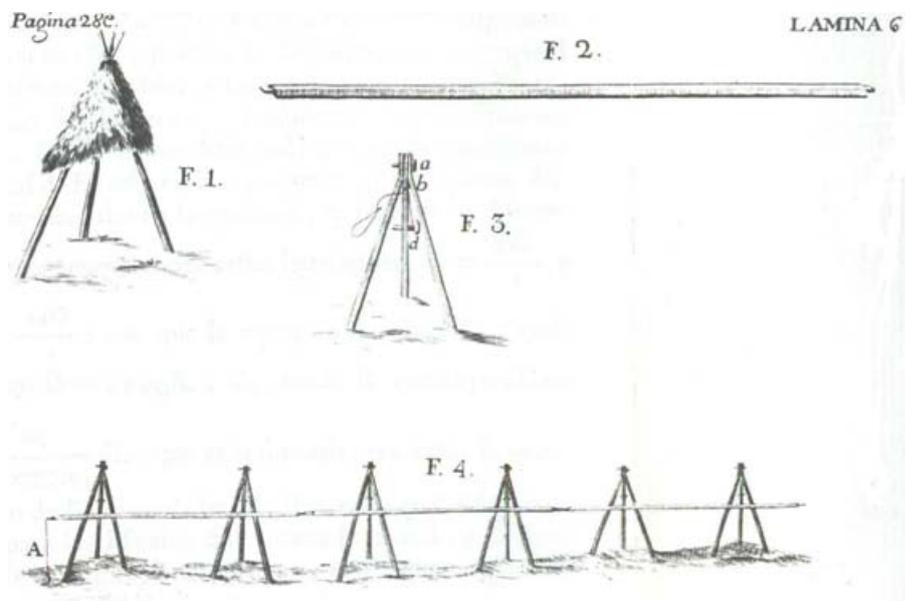


Figura 4.10: Colocación de las perchas y detalles constructivos, citados en el texto, necesarios para la medida de la base fundamental. Página 288 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

Años más tarde Jorge Juan, en su proyecto de mapa nacional, habla de la conveniencia de situar la base en el centro de la zona que se fuese a triangular, precaución que no se tuvo en este caso.

Emplearon 25 días en recorrer esa distancia. El procedimiento fue tan rudimentario como los resultados precisos. Los resultados de ambos grupos diferían tan sólo en dos pulgadas y diez líneas, siendo el error relativo de 10^{-5} . La cifra acordada de 6272 toesas 4 pies 3 pulgadas y 7 líneas, media aritmética de las efectivamente medidas, no era sino una medida que debía ser reducida a su valor sobre la superficie terrestre. Aquí comenzaron los verdaderos problemas técnicos y científicos de la expedición.

Los extremos de la base se marcaron con una gran señal sobre una rueda de molino que tenía una marca donde caía la vertical de la señal (figura 4.10, F.1). Se fabricaron tres perchas de madera bien seca de 20 pies cada una (6,48 m), y en sus extremos se les clavaban planchas de cobre de línea y media de grosor, (figura 4.10, F.2). Entre las tres sumaban 10 toesas (19,48 m).

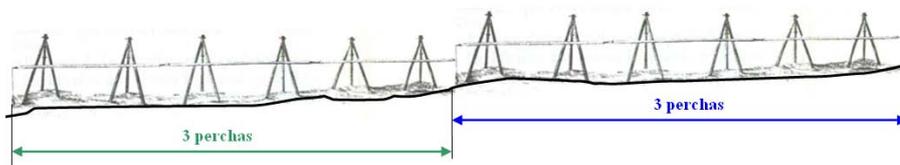


Figura 4.11: Alineación de perchas en la base fundamental como método de medida de su longitud. Cada percha medía 20 pies (6,48 m)

Las perchas se comprobaban varias veces al día con una toesa de París²⁰, de hierro, que se conservaba cuidadosamente y se medía la temperatura a la que se encontraba (tenían la precaución de ponerla a la sombra). Se medía con un compás la medida de la toesa patrón con las perchas, colocando las puntas del compás sobre unas tachuelas que se habían puesto sobre las perchas. Los extremos (inicial y final) de las perchas estaban inclinadas porque la plancha de cobre estaba más baja, así que se reducía esa inclinación al plano en que se medía las otras perchas, había 2/27 de línea de corrección. Las fluctuaciones termométricas afectaban a la toesa patrón y la medida de la base debía ser corregida de los efectos de la dilatación. Se trataba de fenómenos sobre los que apenas se conocía algo más que su existencia. La influencia de la dilatación de la toesa de París en las operaciones geodésicas era despreciable, cosa que ellos no entendieron así que iniciaron experimentos para ver como afectaba la temperatura a la base medida.

La colocación de las perchas en el campo, horizontales y en la dirección conveniente, se obtuvo con caballetes de pintor²¹ (consistía en tres palos taladrados en sus extremos por donde pasaba una clavija que los mantenía unidos, también colgaba un cordel, del que pendía la percha, y que se podía subir o

²⁰La Condamine en su obra *Mesure des trois premiers degrés du meridiene Dans l'hémisphère austral*, París, 1751, páginas 75-76, da la descripción física de la toesa que se utilizó en las medidas del grado del Ecuador; era un prisma de hierro pulido con una longitud de 1 toesa, 17 líneas y 4 líneas para sus tres lados. Juan sin embargo afirma que las dimensiones eran otras 1 toesa, 8 líneas y 3.5 líneas, cfr. página 91 de *Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación*, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

²¹“se hicieron unos caballetes, semejantes con corta diferencia, a los que describe M. Cassini en su *Medida de la Tierra* pag.100, pero con tanta lentitud y trabajo que nos fue preciso abandonarlos”. Página 147 de *Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación*, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

bajar), (figura 4.10, F.3). El canto o extremo de la primera percha se ponía perpendicularmente sobre el punto de inicio y con otra plomada en la mano se colocaba la percha en dirección de la Base y con un nivel de burbuja de aire que ponía encima de una regla de dos varas de largo, muy lisa y exacta que servía para evitar las desigualdades de la percha. Tras situar las tres perchas, por el mismo método, se marcaba con una plomada su final, (figura 4.10, F.4). Se trasladaba entonces la primera percha y se ajustaba al final de la primera.

Se trabajó así desde el 8 de octubre de 1736 hasta el 5 de noviembre del mismo año.

Se midió por geometría, utilizando una plancheta y con el cuarto de círculo, una pequeña quebrada que tenía una anchura de sólo 9 toesas, que agregada a la medida de las perchas, hechas todas las correcciones precisas era de 6272 toesas 4 pies 2 pulgadas y 2 líneas. Ulloa, Bouguer y la Condamine 6272 toesas 4 pies 5 pulgadas. La diferencia sólo fue de 2 pulgadas y 2 líneas²², 0,0586 m. La base adoptada por ambos grupos sería la media aritmética entre las efectivamente medidas, 6272 toesas 4 pies 3 pulgadas 7 líneas, 12225,5243 m.

Juan y Godin consideraron que la base real medida entre Caraburu y Oyambaro se encontraba a $1/3$ de la diferencia de altura entre los dos extremos²³, por encima de la superficie de nivel de referencia de Caraburu. Los puntos que constituían la base se aproximaban más a ese plano que a otro, como comprobaron por observación de sus ángulos cenitales.

Siguiendo la nomenclatura de la figura 4.12 y la simplificación de Godin y Juan, la distancia tendrá el valor medido de 6276 toesas 4 pies 3 pulgadas 7

²²La medida de la base por Ulloa, Bouguer y la Condamine fue muy similar a la de Juan y Godín y se explica con detalle en las páginas 214, 215 y 216 del libro Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

²³Jorge Juan justifica así la medida adoptada : “Si el terreno, en que medimos, hubiera sido uniforme, o estado todo en un mismo plano, la distancia establecida sería la de la horizontal que pasa por Caraburu, pero como el terreno no estaba en el mismo plano, fue necesario, asignar la base medida a otra elevación, . . . M.Godin y yo en varias ocasiones que premeditamos este punto, juzgamos que la distancia medida podía, sin yerro sensible, establecerse a un tercio de la elevación de Caraburu a Oyambaro, pues diez toesas de mas, o menos elevación, no aumentan, ni disminuyen la Base, mas que de $1/50$ de toesa con corta diferencia: por lo que observamos las varias inclinaciones del llano, para deducir por ellas la horizontal; que era la medida hallada: pues mas hubiera sido prolixidad, y perdida de tiempo, que utilidad”, J. Juan: Observaciones astronómicas , y físicas hechas de orden de S. Mag. en los Reynos del Perú, página 151.

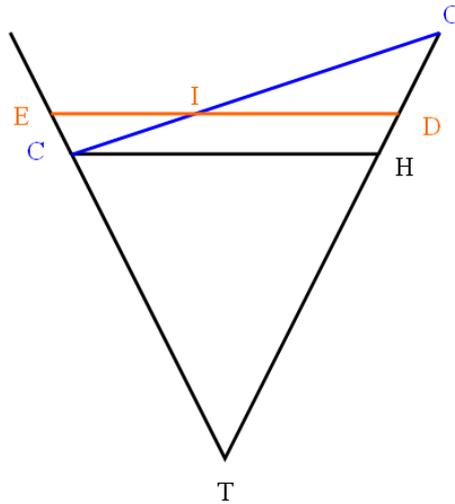


Figura 4.12: Triángulo COT

líneas, 12225,5243 m. Midieron en campo los ángulos de depresión y altura en los extremos de la base, entendidos como los ángulos por debajo o por encima de la horizontal del lugar, que en este caso tenían los valores: $1^{\circ}11'35''$ y $1^{\circ}6'30''$. A partir de éstos dos últimos datos podemos obtener los ángulos COT y OCT:

$$\text{COT} = 90 - 1^{\circ}11'35'' = 88^{\circ}48'25''$$

$$\text{OCT} = 90 + 1^{\circ}6'30'' = 91^{\circ}6'30''$$

Para calcular el ángulo interior del triángulo CTO, que Juan llama “ángulo en el centro de la tierra²⁴” se divide la distancia CO en toesas por 16 “pues el quociente dará el valor del ángulo en T en segundos”... “en el prefente cafo será de $6'32''$ ”:

$$\frac{6272^{\text{toesas}} \ 4^{\text{pies}} \ 3^{\frac{1}{2}\text{pu lg adas}}}{16} = 392^{\text{toesas}} \ 0^{\text{pies}} \ 3^{\text{pu lg adas}} \ 2.25^{\text{lineas}} = 392'' = 6'32''$$

²⁴Página 153 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

Se explica esta simplificación partiendo de la ecuación , con la que deducimos que para un radio de la Tierra, considerada como esférica, de 6370 Km, 1'' equivale aproximadamente a 31 m. Si el arco está medido en toesas, y sabiendo que una toesa equivale a 1,949 m, una sencilla regla de tres resuelve la cuestión:

$$d\vartheta(\text{en segundos}) = \frac{ds(\text{en toesas})}{16}$$

Si la figura de la Tierra no es esférica, las líneas CT y OT formarán diferentes ángulos según qué figura adopte, pero en cualquier caso Juan asegura que las diferencias en ese ángulo no pueden superar los 5''. Así que añade 5'' al valor calculado, y dice que 6'37'' está calculado con mayor exactitud²⁵.

Siguiendo con la teoría que empleó Juan se sumaron los ángulos interiores del triángulo COT para calcular el error debido a la refracción:

$$CTO + COT + OCT = 6'37'' + 88^{\circ}48'25'' + 91^{\circ}6'30'' = 180^{\circ} 01' 32''$$

Suponen que el error de refracción en ambos vértices, C y O, es el mismo, y tendría un valor de 46'', resultando de dividir el error de 01' 32'' por dos. Restando a los ángulos COT y OCT el ángulo de refracción²⁶ los ángulos corregidos tendrán el valor siguiente:

$$COT = 88^{\circ}48'25'' - 46'' = 88^{\circ}47'39'' \quad OCT = 91^{\circ}06'30'' - 46'' = 91^{\circ}05'44''$$

A continuación calculó el ángulo TCH y el CHT que tienen el mismo valor (cfr. fig. 4.13):

$$180^{\circ} = 6'37'' + 2 \text{ TCH}$$

$$\text{TCH} = 89^{\circ} 56' 41,5''$$

A partir de los triángulos IEC y OID Juan calculó la distancia CO de la base fundamental, como exponemos a partir de ahora.

Por definición , siendo h el incremento de cota entre Caraburu y Oyambaro, y en consecuencia podemos conocer la longitud de los lados EI e ID :

²⁵Bouguer y La Condamine para calcular el ángulo terrestre entre los dos extremos de la base lo hacen sumando los ángulos interiores del triángulo COT de la figura 4.13, resultando que CTO= COT + OCT-180. El método de obtención del ángulo terrestre es la diferencia que existente en los cálculos seguidos por los académicos para la reducción al nivel del mar de los lados de la triangulación.

²⁶En general las capas más densas son las más próximas a la tierra, y por ello la visual se curva con la concavidad.

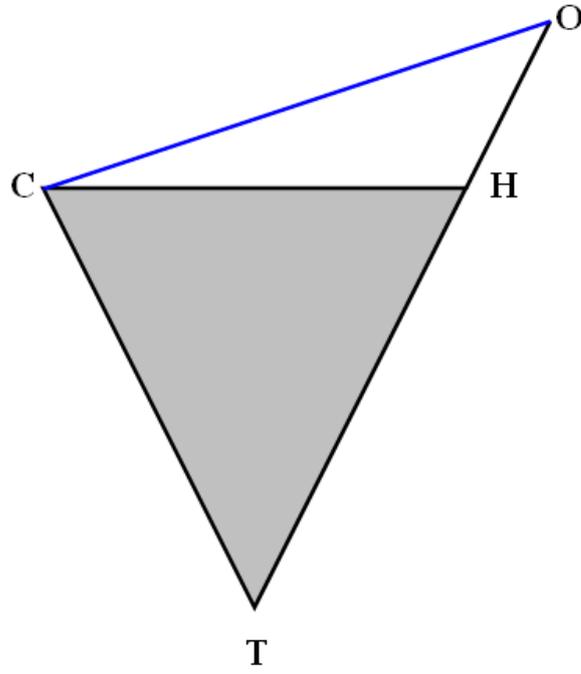


Figura 4.13: Triángulos COT y CHT

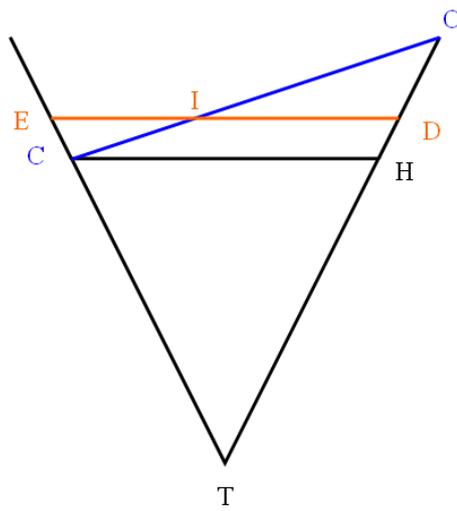


Figura 4.14: Triángulos COT y CHT. Alineación recta ED

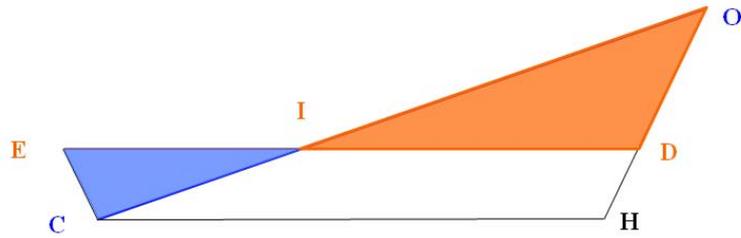


Figura 4.15: Triángulos IOD y CEI

$$EI = \frac{ED}{3} = 2090^{\text{toesas}} 5^{\text{pies}} 5^{\text{pulgadas}} 2^{\text{líneas}} = 4075,1740 \text{ m}$$

$$ID = \frac{2ED}{3} = 4181^{\text{toesas}} 4^{\text{pies}} 10^{\text{pulgadas}} 4^{\text{líneas}} = 8150,348 \text{ m}$$

y considerando que la desviación de la vertical en C respecto a la vertical en O no afecta al resultado obtenido.

Con el fin de conocer la distancia CO resolvió los triángulos IEC y OID necesitó los ángulos interiores de los dos triángulos, que ya había calculado. El primero de ellos con los ángulos.

Datos del triángulo IEC:

$$IEC = 89^{\circ} 56' 41.5'' = \text{TCH}$$

$$ICE = 180 - 91^{\circ} 6' 30'' = 88^{\circ} 53' 30''$$

$$EI = 2090^{\text{toesas}} 5^{\text{pies}} 5^{\text{pulgadas}} 2^{\text{líneas}} = 4075,1740 \text{ m}$$

Datos del triángulo OID:

$$IOD = 88^{\circ} 47' 39''$$

$$ODI = 180 - 89^{\circ} 56' 41.5'' = 90^{\circ} 3' 18.5''$$

$$ID = 4181^{\text{toesas}} 4^{\text{pies}} 10^{\text{pulgadas}} 4^{\text{líneas}} = 8150,348 \text{ m}$$

Resolviendo ambos triángulos, IEC y OID, obtuvo la distancia CO, como suma de los lados CI e IO de los triángulos anteriores.

$$CI = 2091^{\text{toesas}} 1^{\text{pies}} 8^{\text{pulgadas}} 7.5^{\text{líneas}} = 4075,9173 \text{ m}$$

$$IO = 4182^{\text{toesas}} 4^{\text{pies}} 4^{\text{pulgadas}} 10.6^{\text{líneas}} = 8152,1495 \text{ m}$$

$$CO = CI + IO = 6274^{\text{toesas}} 0^{\text{pies}} 2^{\text{pulgadas}} 1^{\text{líneas}} = 12228,0823 \text{ m}$$

El procedimiento de Godín y Juan para corregir la medida de la base de las irregularidades del terreno como hemos visto consistió en encontrar el plano horizontal que mejor se adaptara a las cotas de sus puntos. Por el contrario Bouguer utiliza el cálculo integral para la corrección de la esfericidad de la Tierra, lo que resulta en exceso laborioso y no necesariamente más exacto. La Condamine elegirá un método que le permite evitar ambos inconvenientes. Esencialmente, consiste en reducir la medida de toda la base a un número suficiente de tramos, aprovechando las irregularidades del terreno y sumando después los valores parciales. Este procedimiento permite no sólo corregir dichas irregularidades sino también liberar al resultado de la influencia de la refracción al ser la longitud de cada tramo mucho menor que la de la base completa. Así lo esperaba La Condamine. Realizada la operación, volverá a calcular su longitud en línea recta suponiendo que el verdadero ángulo de inclinación era la media entre el de altura y de depresión observados desde ambos extremos. Pretende así corregir de la refracción su medida inicial y compararla con el resultado antes descrito. Sin embargo la diferencia de 1 pie 8 pulgadas y 3 líneas habría de descorazonar al académico, quien finalmente adoptaría, 6274 toesas, 12228,026 m²⁷.

4.1.1.2. Reducción al horizonte. Reducción al nivel del mar

Antes de proceder a la reducción de las distancias al nivel del mar, era preciso conocer su valor en el plano horizontal²⁸. Esta corrección era la que menos complicación tenía, se trataba de resolver el triángulo formado por las dos verticales de los extremos de la base que se cortaban en el centro de la Tierra, supuesta esférica. De modo que redujeron la distancia geométrica de la base

²⁷A.Lafuente et al., La Geometrización de la Tierra (1735-1744), pág. 84., CSIC, Madrid, 1984.

²⁸Jorge Juan en su proyecto de mapa nacional español escribe "Por alguna inclinación que tenga el terreno, será forzoso observar la altura del más elevado y la depresión del más bajo para reducirla a la altura horizontal de uno de los dos terrenos.". Mario Ruiz Morales y Mónica Ruiz Bustos, "Jorge Juan y sus proyectos para un mapa de España". Editorial Universidad de Granada, Granada, 2005.

fundamental al plano de horizonte del extremo de menor altitud, que era Caraburu. Caraburu se hallaba a 1267,5 toesas sobre el nivel del mar y 126 toesas menos que Oyambaro.

Caraburu se hallaba a 1267,5 toesas²⁹ sobre el nivel del mar y 126 toesas menos que Oyambaro.

La longitud CO' de la figura 4.17 equivale a la longitud del lado CH de la figura 4.16, que se calcula resolviendo el triángulo CHO.

$$COH = COT = 88^{\circ}48'25'' - 46'' = 88^{\circ}47'39''$$

$$CHO = 180^{\circ} - TCH = 180 - 89^{\circ} 56' 41.5'' = 90^{\circ}3'18.5''$$

$$CO' = \frac{\text{sen } COH}{\text{sen } CHO} \cdot CO = 0,999779 \cdot (6274^{\text{toesas}} 0^{\text{pies}} 2^{\text{pulgadas}} 1^{\text{líneas}}) = (6272^{\text{toesas}} 3^{\text{pies}} 9^{\text{pulgadas}} 14^{\text{líneas}})$$

que equivale a 12229,2757 metros.

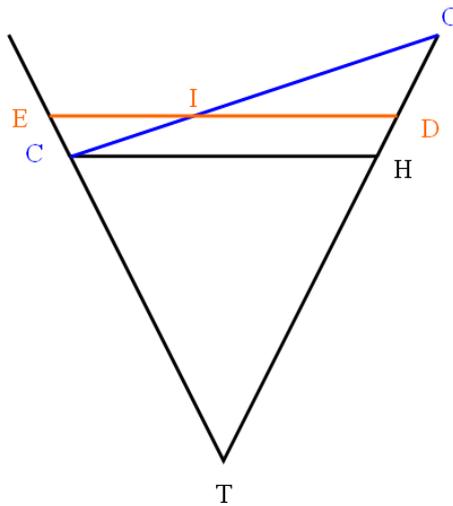


Figura 4.16: Triángulo COT

La reducción al nivel del mar ya es elemental, el calculo de C'O'' se reduce a resolver los triángulos semejantes de la figura 4.17, según la ecuación:

²⁹Página 130 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

$$\frac{C'O''}{CO'} = \frac{R}{H+h} = \frac{C'T}{C'T+C'C} = \frac{3276500}{3276500+1267,5} = 0,999613$$

$$C'O'' = 0,999613 \cdot (6272 \text{ toesas } 3 \text{ pies } 9 \text{ pulgadas } 14 \text{ líneas}) = 12220,6464 \text{ m}$$

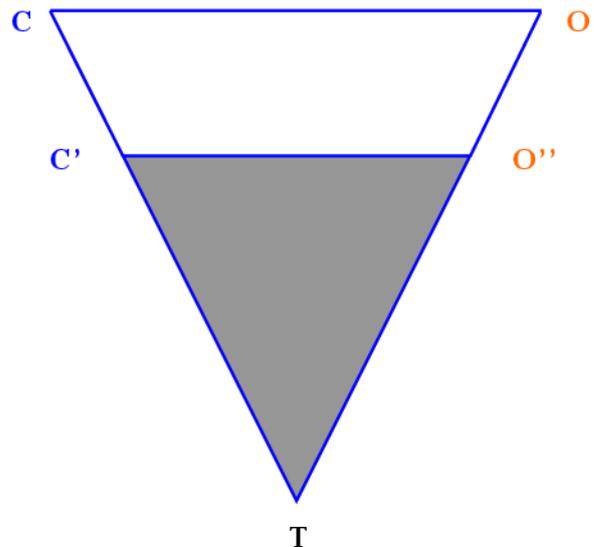


Figura 4.17: Triángulo CO'T

Aunque el valor adoptado del radio de la Tierra no alteraba sustancialmente el resultado final, dado que la longitud de la base era pequeña respecto a la de la Tierra, Godin eligió el valor propuesto por Newton 3276500 toesas³⁰, no el radio propuesto por Cassini³¹, su compatriota. De haber utilizado el radio de Cassini la diferencia en el resultado final habría sido de 1 pulgada 2.2 líneas, 0,0320 m, y sólo hubiese afectado en una cantidad del orden de 10^{-6} toesas, 0,0000002 m. Si cuantitativamente hemos de considerarla irrelevante, parece confirmar la sospecha de que los académicos encontraban más convincente la tesis de Newton antes de concluir sus operaciones.

Hoy nuestros cálculos hubieran sido más sencillos: tras considerar que la longitud CO' es igual a la longitud medida en campo (6272 toesas 4 pies 3 pulgadas y 7 líneas, 12225,5243 m) (cfr. figura 4.18) esta longitud se reduce al nivel del mar, con las mismas expresiones que utilizó Jorge Juan:

³⁰I. Newton, , Principia... , III, Propos. XIX, problema III. Desde los resultados de Picard concluía que el radio de la tierra en el ecuador era 3276433,333 toesas.

³¹Cassini usó en suelo francés 3269297 toesas y según las dimensiones de su elipse el radio ecuatorial de nuestro planeta era de 3255398 toesas.

$$\frac{C'O''}{CO'} = \frac{R}{H+h} = \frac{C'T}{C'T+C'C} = \frac{3276500}{3276500+1267,5} = 0,999613$$

$$C'O'' = 0.999613 \cdot (6270^{\text{toesas}} 4^{\text{pies}} 3^{\text{pulgadas}} 7^{\text{líneas}} = 12220,7931 \text{ m}$$

valor que es similar al obtenido por J. Juan, 12220,793 m.

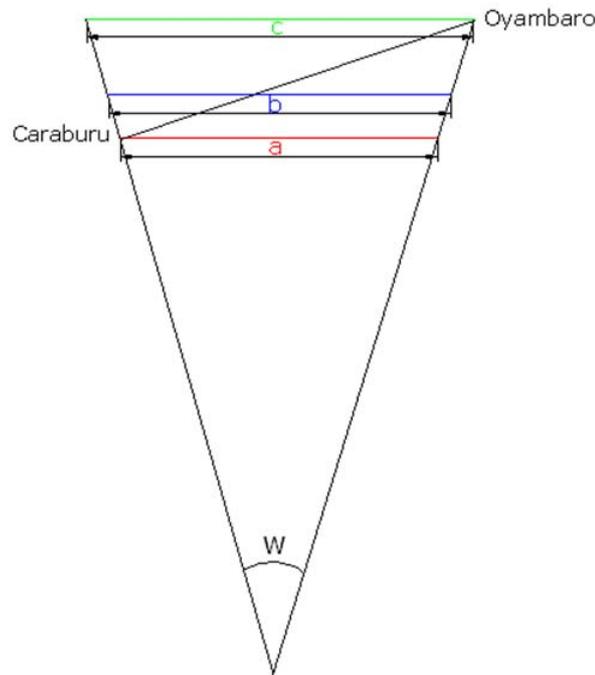


Figura 4.18: Según nuestros cálculos las diferencias entre las longitudes de los planos de comparación a, b (=1/3h) y c son mínimas, así b-a = 0,0793 toesas (15,4 cm) y c-b = 0,1587 toesas (30,9 cm). Podemos adoptar como plano de referencia el plano que pasa por Caraburu

La geodesia actual seguiría depurando el resultado con la reducción de la longitud de la cuerda C'O'' al arco³², pero es innecesario en este caso para los cálculos sucesivos. Una vez obtenido ese arco habría que reducirlo a la sección normal de la línea geodésica, pero sabemos que la longitud de

³²La ecuación que se utiliza es

$$D_{ijSN} = 2R_m \arcsen\left(\frac{D_{ij}}{2R_m}\right)$$

conocidos el radio medio de la Tierra (R_m) y la longitud de la cuerda (D_{ijCU}), en la visual ij.

la sección normal es equivalente a la longitud de la línea geodésica para distancias inferiores a 50 Km. (corrección del orden de 10^{-11}) cosa que se cumple porque nuestra base fundamental ronda los 12 Km.

4.1.1.3. Cálculo del desnivel por visuales recíprocas y simultáneas

Hemos querido comprobar el incremento de 126 toesas entre los extremos de la base fundamental calculados por Jorge Juan. Partiendo de los datos que nos facilita el propio Jorge Juan aplicamos la ecuación de visuales recíprocas y simultáneas³³ para el cálculo del desnivel entre los extremos de la base fundamental de la triangulación, pensamos que las condiciones de presión y temperatura serían muy similares en las estaciones de los extremos:

$$Desnivel = h' - h = D_r \cdot tg \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta)$$

La ecuación anterior nos permite calcular con bastante aproximación el desnivel prescindiendo de la constante de refracción y el error de esfericidad, con w pequeño, como es el caso.

A partir de los conocidos ángulos de depresión y de altura podemos obtener los ángulos cenitales desde la estación Caraburu a Oyambaro: y desde Oyambaro a Caraburu:

$$\Delta = 90^\circ + 1^\circ 11' 35'' = 91^\circ 11' 35''$$

$$\Delta' = 90 - 1^\circ 6' 30'' = 88^\circ 53' 30''$$

La distancia reducida CO' la hemos calculado con anterioridad:

$$CO' = 6272 \text{ toesas } 3 \text{ pies } 9 \text{ pulgadas } 14 \text{ líneas} = 12225,3777 \text{ m}$$

$$Desnivel = h - h' = D_r \cdot tg \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta) = (12225,377) \cdot (2,008 \cdot 10^{-2}) = 245,4856 \text{ m}$$

El desnivel en metros es de 245,4856 metros, que equivale a 125 toesas 5 pies 8 pulgadas y 8.8 líneas.

³³Cfr. Chueca Pazos, M. , Topografía, Tomo II, página 603 , editorial Dossat, 1982.

4.1.1.4. Cálculo de la refracción atmosférica

Como hemos hecho en el apartado anterior de nuevo comprobamos que el valor del ángulo de la refracción atmosférica de Jorge Juan es correcto.

Podemos calcular el coeficiente de refracción por observaciones en campo³⁴ con la ecuación:

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2w} \cdot (\Delta + \Delta' - 180) = 0,1158$$

siendo $w = 6' 37''$, $\Delta = 91^\circ 11' 35''$ y $\Delta' = 88^\circ 53' 30''$

(El coeficiente K en España tiene un valor promedio de 0.08).

Si entonces $K = \frac{r}{w}$, entonces $r = K \cdot w = 46''$, r es exactamente el valor del ángulo que deduce y utiliza Jorge Juan en el apartado anterior para obtener la distancia CO de la base fundamental.

Conocidos el radio de la Tierra y el ángulo que forman las dos verticales de los extremos de la base en el centro de la esfera terrestre: $R = 6385898,5$ m, $w = \text{COT} = 6' 37''$ y siendo $w = \frac{Dr}{R}$ entonces podemos también expresar como sigue la ecuación de K:

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1}{2D_r}(\Delta + \Delta' - 180) = \frac{1}{2} - \frac{6385898 \cdot (5' 5'') \cdot 2\pi}{2 \cdot 12225,3777^2 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60} = 0,1138$$

que varía respecto a $K = 0,1158$ porque se adopta $w = 6' 34,8''$, en lugar de $6' 37''$.

La corrección negativa³⁵ debida al error de refracción sobre el desnivel, si las observaciones no fueran simultáneas y recíprocas, sería:

$$-e_r = -\frac{D_r^2 K}{R} = \frac{12225,3777^2 \cdot 0,1158}{6385898,5} = -2,7103 \text{ m}$$

Nuestros académicos pensaron que el error debido a la refracción podía ser determinante. Su modo teórico de proceder podemos reconstruirlo con absoluta fidelidad por la correspondencia en la que se da cuenta de los métodos empleados por Godin, Juan y La Condamine³⁶. El ejemplo que reproducimos se refiere a datos de las estaciones de Tanlagua y Oyambaro.

³⁴Cfr Chueca Pazos, M. , Topografía, Tomo II, página 602 , editorial Dossat, 1982.

³⁵Cfr. Chueca Pazos, M. , Topografía, Tomo II, página 603 , editorial Dossat, 1982.

³⁶La Condamine a Bouguer, Quito, 24-IV-1741. AOP, ms.C-2-7, pag.7.

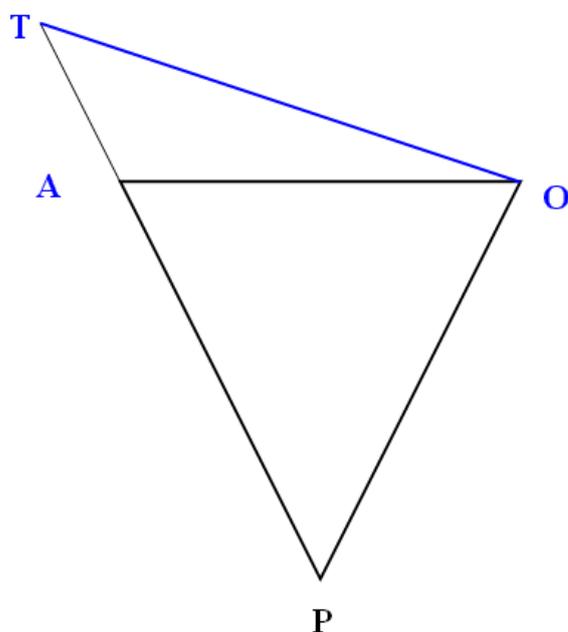


Figura 4.19: Triángulo PTO. El vértice P, en este caso, señala el centro de la Tierra

La distancia TO (distancia Tanlagua-Oyambaro) se obtuvo por trigonometría desde el triángulo anterior de las observaciones con un valor de 15659 toesas. Al igual que Juan obtuvo el ángulo w dividiendo la distancia en toesas por el número de toesas que contenía un segundo de arco, y así $w = 16' 25'' = \text{TPO}$.

Midieron en campo los ángulos de depresión y altura, entendidos como los ángulos por debajo o por encima de la horizontal del lugar, que en esta caso tenían los valores: $1^{\circ}33'48''$ y $1^{\circ}18'39''$. Con este método es necesario conocer el desnivel entre estaciones por medio de barómetro que daba errores considerables y modificaba el valor de la refracción. La altura sobre el nivel del mar de Tanlagua es 1857 toesas y de Oyambaro 1460 toesas. A partir de la resolución por trigonometría del triángulo de la figura 4.19 los valores de los ángulos PTO y POT son respectivamente $88^{\circ} 24' 37.37''$ y $91^{\circ} 18' 57.23''$, conocidas las distancias PT y PO a partir del radio de la Tierra y de la altitud de las estaciones.

Una vez resuelto el triángulo podemos conocer los ángulos teóricos de altura y depresión desde las estaciones de Tanlagua Oyambaro y de Oyambaro a Tanlagua, restarlas a las verdaderamente observadas y calcular el ángulo de

refracción, entendido como esta diferencia. Desde Tanlagua esa diferencia será negativa y de valor 18.23'', desde Oyambaro positiva y de valor 1° 34' 23''. Al resto del equipo no convence la refracción negativa, o antirrefracción como le llama Godín. Juan como hemos visto en el apartado 1.1, sobre el cálculo de la distancia geométrica en los extremos de la base, divide el exceso esférico por dos y dice que afecta por igual a las dos estaciones³⁷ y resuelve el triángulo sin el valor del desnivel entre estaciones.

Ángulo de refracción según Juan:

$$r_1 = r_2 = \frac{w - (\text{ángulo de altura} - \text{ángulo de depresión})}{2}$$

Veamos el tratamiento alternativo de La Condomine. Por sus observaciones conoce los ángulos de altura y depresión, conoce por trigonometría los lados CO y OH de la figura 4.20 y el ángulo en el centro de la Tierra. En primera aproximación, teniendo sólo presente la esfericidad de la Tierra puede suponer que: ángulo de altura = ángulo de depresión = $\frac{w}{2}$ y en consecuencia el ángulo $CHO = 90^\circ + \frac{w}{2}$. A continuación resuelve el triángulo CHO y calcula los ángulos OCH y COH. Puesto que el complemento de COH se puede conocer, siendo ese el valor teórico del ángulo de depresión, y si lo restamos al valor real observado en campo podemos conocer el valor de la refracción en esa estación O.

El método para calcular la refracción que nos parece más idóneo es el que utiliza Jorge Juan, considerando que no necesita el desnivel entre estaciones y que es una hipótesis válida considerar que la refracción entre estaciones simultáneas tiene un valor muy similar, por lo que la consideración de que es la misma en ambas estaciones tiene sentido.

³⁷“Por varias observaciones, que se hicieron de alturas, y depresiones de las Señales en toda la Serie de triángulos, procuré deducir la refracción, que le correspondía a cada señal respecto de su altura y distancia; pero hallé tal variedad en ello, que algunas observaciones daban la refracción negativa, o contraria de la que debían: por cuyo motivo, e inducir poco yerro el tomar un minuto más o menos grandes estos ángulos para las operaciones que se siguen, me pareció omitirlas; no obstante, en la ocasión que se observó altura y depresión de señales correspondientes; tomo un medio entre las dos, que es lo propio que emplear la refracción”. Página 176 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

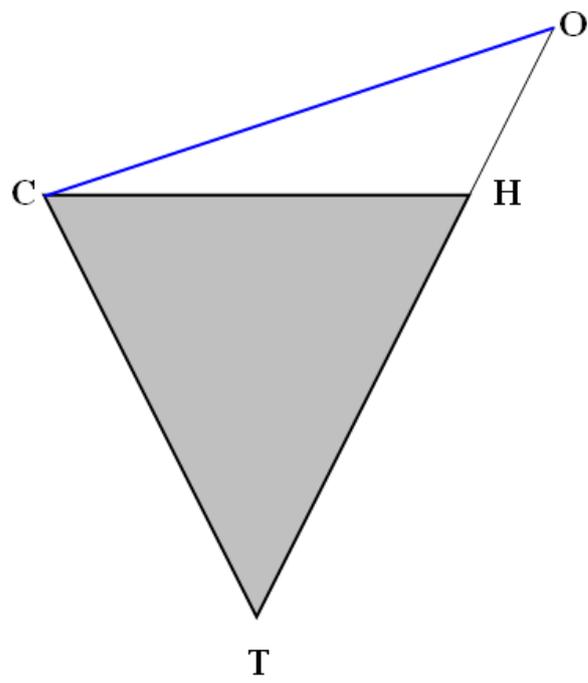


Figura 4.20: Triângulo COT

4.1.1.5. Determinación de la altura y nivelación barométrica aplicando la ley de Mariotte

Bouguer es partidario de realizar las observaciones necesarias para que permitiesen conectar la triangulación con algún punto que estuviese al nivel del mar, su única condición era que se le esperase para el inicio de la fase astronómica de la misión. Sin embargo Godin no está de acuerdo y lo explica diciendo que un error de 200 metros en la determinación de la altitud equivaldría a 4'' o 5'' en la amplitud del arco recorrido quedando dentro de los límites de precisión que cabía esperar. Godin piensa que no es necesario el enlace con un punto costero. Juan y Godín emplearon el barómetro, Bouguer y La Condamine lo hicieron por ambos procedimientos, dedicando más atención a la nivelación barométrica.

Parece que el empleo del barómetro para medidas de alturas comienza con la construcción del primer barómetro por Torricelli, en 1643, y su observación sobre la existencia de la relación presión y altitud geodésica. Jorge Juan escribe que Torricelli logró perfeccionar el barómetro, en 1646, gracias a los estudios e investigaciones de su maestro Galileo³⁸.

El barómetro de Torricelli constaba de un recipiente y un tubo lleno de mercurio cerrado en uno de sus extremos. Al invertir el tubo dentro del recipiente se formaba vacío en la parte superior del tubo. Esto era algo difícil de entender en su época, por lo que se intentó explicarlo diciendo que esa región del tubo contenía vapor de mercurio, argumento poco aceptable ya que el nivel de mercurio en el tubo era independiente del volumen del mismo utilizado en el experimento.

Blas Pascal repite los experimentos de Torricelli, y realiza, con ayuda del que era su cuñado, la famosa experiencia del Puy de Dôme (1648), pico de más de 1.000 metros de altitud, donde subió un barómetro con 4 kg de mercurio. Sorprendentemente, cuando el barómetro estaba en la cima, el nivel de la columna de mercurio en el tubo era mucho menor que al pie de la montaña. Analicemos lo sucedido.

Torricelli aseguraba la existencia de la presión de aire y decía que debido a ella el nivel de mercurio en el recipiente no descendía, lo cual hacía que el tamaño de la columna de mercurio permaneciera constante dentro del tubo. Así pues, al disminuir la presión del aire en la cima de la montaña, el nivel

³⁸Página 102 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.



Figura 4.21: Barómetro dibujado por Evangelista Torricelli en 1644. Aparece en la carta de Evangelista Torricelli a Michelangelo Ricci, fechada el 28 de Junio de 1644, Florencia. Publicado en *Opere dei Discepoli di Galileo*, Carteggio 1642-1648, a cura di P. Galluzzi e M. Torrini, Firenze Giunti-Barbera 1975, Vol. I, páginas 122 y 123

de mercurio en el recipiente subió y en la columna dentro del tubo bajó inmediatamente (se vació de manera parcial). Torricelli sugiere entonces el empleo del barómetro para determinar la altura de las montañas.

Este es el principio de la búsqueda de fórmulas de nivelación barométrica, es decir, de aquellas que establecen la diferencia de nivel o altura entre dos puntos mediante lecturas del barómetro, como ayuda o sustituto de lo que se sabía hacer geodésicamente. Este tipo de relaciones cuantitativas constituyen las primeras aplicaciones de la ciencia física y la ciencia matemática a la meteorología y sólo aparecen después de que Robert Boyle³⁹, en 1660, enunciase su famosa ley de los gases, que relaciona la presión P con el volumen V :

$$PV = \text{constante} , \text{ a temperatura constante}^{40}$$

Con esta ley se asocia también a Edme Mariotte⁴¹ a quien se le atribuye además el haber propuesto esta otra: la altitud crece según una progresión geométrica, mientras la presión decrece según una progresión aritmética. Desde John Napier o Neper los matemáticos sabían que cada vez que pueden aparearse los términos de una progresión aritmética con los de una progresión geométrica, se está en presencia de logaritmos⁴². Este hecho fue utilizado por Edmund Halley para expresar la ley de Mariotte como la relación siguiente:

$$\frac{h_2 - h_1}{\log b_1 - \log b_2} = \frac{h_3 - h_1}{\log b_1 - \log b_3}, \quad (1)$$

donde log designa a los logaritmos vulgares, y b_i a la lectura barométrica, en líneas, en la altitud ($i = 1, 2, 3$).

Una exposición de cómo Halley obtiene la relación (1) se encuentra en Juan & Ulloa⁴³, también en los estudios contemporáneos de Frisinger⁴⁴. Explicare-

³⁹La segunda edición del *Spring of the Air* (1662) contiene como apéndice los experimentos y tablas resultantes que relacionan la presión y el volumen del aire (a temperatura constante), y que demuestran cuantitativamente la elasticidad o resorte del aire.

⁴⁰Boyle, Robert, *The Works of the Honourable Robert Boyle*, Vol. I, páginas 97-104, Londres, 1744. Y Boynton, Holmes, *The Beginnings of Modern Science*, Walter J. Black, Inc., Roslyn, páginas 242-247, 1948.

⁴¹Mariotte, Edme, *Oeuvres de M. Mariotte*. Vol I, La Haya, 1740.

⁴²Edwards Jr., C. H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, Capítulo 6, New York-Berlin, 1979.

⁴³Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, *Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación*, páginas 118-119, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁴⁴Frisinger, H. Howard, *Mathematicians in the History of Metereology: the Pressure-Height problem from Pascal to Laplace*, *Historia Mathematica* 1, páginas 266-267, 1974.

mos con detalle, más adelante, la experiencia de Jorge Juan con el barómetro en el Ecuador, según relata él mismo.

Halley sabía muy bien que su fórmula no era lo suficientemente precisa, pues para determinarla consideraba a “la atmósfera como un cuerpo inalterado, que tiene constantemente en la superficie de la tierra la 800-ava parte del peso del agua y es capaz de rarefacción⁴⁵ y condensación ad infinitum”⁴⁶, y, por otra parte, también estaba consciente de que la densidad del aire se altera con la temperatura. Aun así estimaba que la relación (1) era lo suficientemente exacta para las altitudes generalmente consideradas. Por su parte, Mariotte propone una progresión aritmética en 1676, equivalente a:

$$H = 63 \cdot d + \frac{63}{168} \cdot \frac{d \cdot (d - 1)}{2}, \quad (2)$$

donde H y d son, respectivamente, la diferencia de alturas, en toesas, y la diferencia de lecturas del barómetro en líneas. Claramente 63 y 168 deben interpretarse como constantes experimentales resultantes de las observaciones⁴⁷.

Las relaciones (1) y (2) se utilizaron mucho en los finales del siglo XVII y los principios del XVIII, además de servir de base a casi todas las fórmulas de nivelación barométrica que se establecieron en este último siglo. Particularmente, la Academia de Ciencias de París y sus miembros se interesaron en el problema; por ejemplo, Jacques Cassini⁴⁸, propuso nuevas fórmulas que discrepaban, como él mismo lo reconoció, de sus resultados experimentales y geodésicos, concluyendo que no era posible conciliar las observaciones con una ley (modelo matemático) general y sencilla.

Jorge Juan admite el principio del barómetro para el cálculo de las altitudes de los vértices de la triangulación por la demostración de la Academia, que se explica y defiende en las Memorias de la Academia de las Ciencias de París del año 1687⁴⁹.

⁴⁵Acción de dilatar un cuerpo gaseoso haciéndolo menos denso. Se produce esa disminución de la densidad al separarse las moléculas que lo forman.

⁴⁶Halley, Edmund, On the height of the mercury in the barometer at different elevations above the surface of the earth: and the rising and falling of the mercury on the change of weather, Phil. Trans. Royal Soc. of London 16, página 109 1686.

⁴⁷Mariotte, Edme, Oeuvres de M. Mariotte. Vol I, La Haye, páginas 174-175, 1740.

⁴⁸Cassini, Jacques, Réflexions sur les règles de la condensation de l'air, Mémoires de l'Académie Royale de Sciences, páginas 61-74, 1705. Y Cassini, Jacques, Réflexions sur la hauteur du baromètre..., Mémoires de l'Académie Royale de Sciences, páginas 40-49, 1735.

⁴⁹Leçons de Phifique experimentale del Abate Nollet, tomo 3, pag.188. Philosophicas Tranfacciones, ò Memorias de la Real Academia de Londres. Núm. 305.



Figura 4.22: Dibujo del barómetro utilizado por Jorge Juan en el Ecuador y detalle del tubo de mercurio. Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, página 119, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

Las fórmulas (1) y (2) fueron verificadas y controladas en condiciones muy especiales en la América Meridional por la expedición a la que pertenecía Jorge Juan⁵⁰. Como ya hemos comentado, inicialmente, el cálculo de estas alturas se haría geodésicamente; pero la disposición del terreno no lo permitía, por lo que resolvieron deducir las alturas con el barómetro.

Juan tiene la oportunidad de experimentar en latitudes ecuatoriales la medición barométrica para comprobar si el nivel del mercurio en el barómetro a la altitud del mar sería inferior al nivel del mercurio en países de latitudes superiores, como defendían muchos físicos de la época. También quería comprobar que los incrementos del nivel del mercurio en un mismo punto eran inferiores que en Europa, eso demostraría que la densidad del aire en la “Zona Torrida” es inferior que en la zona templada, y que las lecturas serían menos sensibles que en Europa.

Junto a Godín, Juan, intentó hacer observaciones barométricas en el navío que les trajo desde Europa, antes de su llegada a la Martinica, pero sin ningún éxito, por la incomodidad o por el movimiento continuo del navío. Aprovechando el viaje hacia Quito hicieron medidas sucesivas: en la Martinica, Santo Domingo, Montaña pelada, Cartagena (estacionando en el Cerro de la Popa el mercurio no estaba bien purgado y las observaciones no fueron válidas), Portobelo, Chagres, Panamá (para poder observar diferencias entre los dos mares, como aseguraban algunos pero sin fundamento) Manta, Guayaquil, y donde más experiencias se hicieron fue en Quito, donde los altos cerros permitían lecturas con importantes variaciones de la altitud.

Juan piensa que el error del barómetro no afecta de manera importante a la medida del arco de meridiano, añadiendo que el enlace con una triangulación hasta la costa es muy difícil por la orografía del territorio. En efecto un error de 200 metros en la determinación de la altitud era poco significativa. Godín se manifiesta claramente a favor de una nivelación barométrica, que aunque produjese errores de esa magnitud, al menos haría más cómodos los trabajos. Tomada esta resolución, procedieron a utilizar las observaciones barométricas hechas durante el largo viaje de Europa a Quito y las tomadas in situ, para establecer las constantes experimentales que hicieran confiables

⁵⁰El barómetro que utilizó Jorge Juan tenía las siguientes medidas: la longitud del tubo de vidrio: con 30 o 60 pulgadas del pie de Paris, con un diámetro interior de 1 ó 2 líneas y de diámetro exterior de 2 ó 3 líneas.

las relaciones de Mariotte y Halley⁵¹. Jorge Juan⁵² propuso la siguiente versión de la progresión de Mariotte:

$$H = A \cdot \frac{\log d - \log a}{\log a - \log b}, \quad (3)$$

donde A es la diferencia de alturas entre Caraburu (lugar cuya altura sobre el nivel del mar, era de 1,228 toesas, como vértice de la base fundamental) y un lugar B cuya altura sobre Caraburu estaba determinada geodésicamente; a es la lectura en líneas del barómetro en Caraburu, b en el lugar B, y d en el lugar D cuya altura se quiere calcular. H es el incremento de altura a calcular.

Utilizando métodos geodésicos entre Caraburu y Oyambaro hay un desnivel del 126 toesa y entre Caraburu y Pambamarca 883,5 toesas. Las alturas que marca el barómetro son:

<i>Vértice</i>	<i>altura en líneas</i>	<i>altura en mm</i>
<i>Caraburu</i>	255,25 líneas	575,76 mm
<i>Oyambaro</i>	247,75 líneas	558,85 mm
<i>Pambamarca</i>	207,33 líneas	467,67 mm

El incremento de altitud entre Oyambaro y Caraburu es $A = 126$ toesas.

Con los valores anteriores Jorge Juan aplica la expresión (3) y calcula el incremento de altura de Pambamarca sobre Caraburu, con un resultado de 878.4 toesas. La diferencia respecto al resultado obtenido por métodos geométricos es de 4.1 toesas, error que debe ser considerado pequeño, pues unas pocas líneas de error en el barómetro suponían una veintena de toesas de desviación. Aplicando el mismo método barométrico se midieron los incrementos de altura de otros vértices:

⁵¹Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan de Zúñiga, páginas 105-110, Madrid. 1748.

⁵²Ibidem, páginas 118-119.

<i>Vértice</i>	<i>Con el barómetro</i>	<i>Por geometría</i>	<i>Diferencia</i>
<i>Altura de Pichincha sobre Caraburu</i>	1225 toesas	1204 toesas	21 toesas
<i>Altura de Tanlagua sobre Caraburu</i>	499 toesas	518 toesas	19 toesas
<i>Altura de Ancon sobre el nivel del mar</i>	88 toesas	101 toesas	13 toesas

A partir de los resultados expuestos Jorge Juan concluye que es correcto aplicar la ecuación (3), y que no influyen significativamente sobre el cálculo final de la longitud del arco los errores de 100 toesas, en la altitud de los vértices sobre el nivel del mar: “pues las diferencias que se hayan, son, ... despreciables, si obtenemos la altura del terreno, ..., sobre la superficie del Mar a 100 toesas de diferencia, será más de lo que se necesita”⁵³.

Bouguer⁵⁴, buscando procedimientos que proporcionen fórmulas mejor ajustadas y de base empírica, propone una variante de la ley de Mariotte:

$$H = 10.000 \cdot \frac{29}{30} \cdot (\log B - \log b), \quad (4)$$

donde H se da toesas, B es la lectura barométrica en líneas en la altitud menor, b la lectura en la mayor y log indica logaritmos vulgares tanto en (3) como en (4).

La constante 96666,6 que aparece en (4) difiere muy poco de la propuesta por Halley menos de sesenta años antes⁵⁵. Para las partes bajas, cercanas al nivel del mar, Bouguer reconoce que su fórmula no funciona ni en Europa ni en América Meridional, y se propone en el resto de su memoria de 1753

⁵³Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan de Zúñiga, página 122, Madrid. 1748.

⁵⁴Bouguer, Pierre *Rélation abrégée du voyage fait au Pérou*, página 119, 1744, Paris.

⁵⁵Frisinger, H. Howard, *Mathematicians in the History of Meteorology: the Pressure-Height problem from Pascal to Laplace*, *Historia Mathematica* 1, página 268 y página 271, 1974.

establecer la razón de éste y otros fenómenos, usando observaciones hechas en su viaje de regreso por el territorio colombiano⁵⁶.

Con la ecuación (4) Bouguer obtiene la altura de Pambamarca sobre Caraburu, con un valor en toesas de 873.

<i>Vértice</i>	<i>Altura de Pambamarca sobre Caraburu obtenida con la ecuación (3) de Juan</i>	<i>Altura de Pambamarca sobre Caraburu obtenida con la ecuación (4) de Godin</i>	<i>Altura de Pambamarca sobre Caraburu obtenida por observaciones topográficas, conocida la altitud de Caraburu</i>
<i>Pambamarca</i>	878,4 toesas	873 toesas	882,5 toesas

El mejor resultado se alcanza, según los datos expuestos, con la ecuación de Jorge Juan.

4.1.1.6. Otro modo de determinación de la altura y nivelación barométrica.

Todos los científicos del momento coinciden en afirmar que la ley de Mariotte es válida pero dadas las divergencias en los resultados locales obtenidos, buscan reglas empíricas para la determinación de alturas con más precisión. Se trataba de averiguar cuál era la altura que debía subirse para que el mercurio descendiese una línea en el barómetro. Siguiendo las experiencias de Cassini en Francia, que consistieron en medir con el barómetro en la orilla del mar y volver a medir a una altitud de 60 pies de Rey con el fin de que descienda una línea el nivel de mercurio del barómetro, ascender 60+61 pies para que sean 2 líneas del barómetro de mercurio, 60+61+62 si son 3 líneas, y así continuando en una progresión aritmética, cuyo primer término sea 60 y la razón de la progresión 1, que definen el término general de la progresión aritmética que interesa conocer y aplicar.

⁵⁶La fórmula (5) fue usada sistemáticamente por los expedicionarios franceses, página 22 de La Condamine, Charles Marie de. Viaje a la América meridional, Espasa-Calpe, 1942, Madrid = 1745 *Rélation abrégée d'un voyage à l'intérieur de l'Amérique Meridionale*. Pissot. Paris.

Jorge Juan propone que sean las progresiones definidas por las ecuaciones:

$$nx + \frac{1}{2}n^2z = A$$

$$mx + \frac{1}{2}m^2z = B, \quad (5)$$

Siendo:

x: primer término de la progresión

z: el exceso

n: n° de términos entre dos experiencias, cuya diferencia de elevación hallada por geometría es A

m: n° de términos entre otras dos experiencias, cuya diferencia de elevación es B

Resolviendo el sistema de ecuaciones a partir de los datos n, m, A y B Jorge Juan propuso determinar muchas veces la progresión aritmética y tomar una progresión media⁵⁷ que aúne todas las experiencias hechas por los miembros de la compañía, comprobando con medidas geométricas que los resultados eran aceptables. La progresión aritmética que define Jorge Juan finalmente tendrá como primer término 103.5 pies y de exceso (diferencia o razón de la progresión) 215/1000 de pie, si se empieza a nivel de Caraburu, y si se empieza a nivel del mar el primer término será 86.246 pies y el mismo exceso.

La tabla que aparece a continuación nos da un valor aproximado de los errores que pudieron cometer con las medidas barométricas utilizando la progresión aritmética⁵⁸:

⁵⁷Página 128 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁵⁸Página 129 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

<i>Vértices</i>	<i>Alturas sobre Caraburu obtenidas con la progresión de J. Juan (toesas)</i>	<i>Alturas sobre Caraburu obtenidas por observación topográfica (toesas)</i>	<i>Diferencias (toesas)</i>	<i>Diferencias (metros)</i>
<i>Cerro Pichincha</i>	1181	1204	23	44,83
<i>Pambamarca</i>	867	883	15,5	30,21
<i>Tanlagua</i>	542	518	6	11,70
<i>Oyanbaro</i>	130	126	4	7,8
<i>Corazón</i>	979,5	985	2,5	4,87
<i>Pucaguaico</i>	1058	1036	22	42,88
<i>Chusay</i>	741,5	727	14	27,29
<i>Sinafaguan</i>	1108	1106	2	3,9
<i>San Luis</i>	267	247,5	19,5	38
<i>Montaña de Petit-Goave, 1</i>	535	550	15	29,1
<i>Montaña de Petit-Goave, 2</i>	342	463,5	6,5	12,66
<i>Montaña de Petit-Goave, 3</i>	342	339,5	2,5	4,87
<i>Cerro Ancon en Panamá</i>	101,5	101,5	0	0

No es posible asignar una progresión única que sea aplicable a cualquier altitud. Pero podemos decir que el resultado es satisfactorio, en ningún caso se sobrepasa el límite de 100 toesas de error en la altitud, previsto por Jorge Juan. Aplicando la misma progresión “media” halló las alturas en la tabla que sigue a continuación, pero sin comprobación geométrica.

<i>Vértices</i>	<i>Alturas sobre el nivel del mar obtenidas con la progresión de Jorge Juan (toesas)</i>	<i>Alturas sobre el nivel del mar obtenidas con la progresión de Jorge Juan (metros)</i>
<i>Caraburu</i>	1267,5	2470,36
<i>Tarigagua en la montaña de San Antonio</i>	534	1040,277
<i>Guamac Cruz en la montaña de San Antonio</i>	1098,5	2140,98
<i>Ciudad de Quito</i>	1517	2956,63
<i>Ciudad de Cuenca</i>	1402	2732,5
<i>La Villa de Riobamba</i>	1728	3367,9
<i>El pueblo de Yaruquí</i>	1379	2687,67
<i>El pueblo de Alausí</i>	1302	2537,6
<i>El pueblo de Cañar</i>	1660	3235,34
<i>Cumbre de cerro Pichincha</i>	2471,5	4817

Aunque desde el siglo XVII se sabía que las lecturas barométricas se afectaban con la temperatura ambiente, quizás la primera persona en tomar seriamente este factor en la elaboración de una fórmula de nivelación barométrica fue el suizo Jean André De Luc, quien publicó sus resultados en los dos volúmenes de su tratado *Recherches sur les modifications de l'atmosphère*⁵⁹. En primer lugar, introdujo sustanciales mejoras en la construcción de termómetros y barómetros, aumentando su fiabilidad; en segundo lugar, para las fórmulas de nivelación barométrica que elaboró tuvo en cuenta los cambios de densidad del aire exterior y del mercurio de los barómetros debidos a la temperatura ambiente. Una de sus fórmulas, transcrita por Maskelyne⁶⁰, es la siguiente:

⁵⁹De Luc, André, *Recherches sur les modifications de la atmosphère*, Gênevè, 1772.

⁶⁰Maskelyne, Nevill, M. de Luc's Rule for measuring heights by the barometer, reduced to the English measure of length, and adapted to Fahrenheit's thermometer and other scales of heat, and reduced to a more convenient expression, *Phil. Trans. Royal Soc. of London*

$$H = 10.000 \cdot (\log B - \log b) \cdot \left(1 + \frac{C - 16 \frac{3}{4}}{215}\right), \quad (6)$$

donde H es la diferencia de alturas, expresada en toesas; B y b son las respectivas lecturas barométricas en las dos alturas, corregidas por una regla dada en función de las temperaturas señaladas, en grados de De Luc (mas pequeños que los de Réaumur)⁶¹, por sendos termómetros adosados a los barómetros; y C es la media aritmética de las lecturas de otros dos termómetros auxiliares graduados según De Luc, colocados al aire libre, uno en cada altura. Como observamos, nuevamente el punto de partida es la relación (1) de Halley.

En el último cuarto del siglo XVIII se continuaron haciendo esfuerzos por mejorar la fórmula (6), o sus variantes, por George Schuckburgh⁶², Jean Trembley y Samuel Horsley⁶³. Gregorio Fontana⁶⁴ y John Playfair tuvieron en cuenta en sus fórmulas la influencia de la gravedad; en particular, éste último consideró el decrecimiento de la gravedad con la altitud.

La influencia de la latitud en la altura del barómetro era sospechada por muchas personas. Durante la expedición, Bouguer, Juan y Ulloa realizaron observaciones para verificar esta sospecha, concluyendo los últimos que “la atmosphaera pesa igualmente en Europa, y América”⁶⁵; hoy sabemos que esto no es así, aunque la diferencia sea pequeña⁶⁶. Por otro lado, comprobaron que las alteraciones que afectan al peso de la atmósfera son menos sensibles en las cercanías del Ecuador que en latitudes superiores, y menos en las cumbres y cerros que en los valles, por lo que las observaciones hechas con el barómetro en cotas altas tendrán menos error que en las cotas bajas, y además si se hacen en latitudes próximas al Ecuador tendrán todavía más

64, páginas 158–163, 1774. Los grados de De Luc y los de Fahrenheit están en la proporción 80 : 178.

⁶¹Los grados de De Luc y los de Fahrenheit están en la proporción 80 : 178.

⁶²Schuckburgh, George, Observations done in Savoy, in order to ascertain the heights of mountains by means of the barometer, Phil. Trans. Royal Soc. of London 67(2), 513-592, 1777.

⁶³Horsley, Samuel, M. de Luc's rule for the measurement of heights by the barometer, compared with theory, and reduced to English measures of lengths ..., Phil. Trans. Royal Soc. of London 64, 241-301, 1770.

⁶⁴Fontana, Gregorio, Delle altezze barometriche, e più alcuni insigni paradossi relative alla medesima saggio analitico..., G. Bolzani, Pavia, 1771.

⁶⁵Página 111 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁶⁶Laplace, Pierre Simon de, Méchanique céleste. IV. Página 571. Paris.1805.

error. Las mediciones con el barómetro son menos sensibles a cotas bajas⁶⁷. Otra conclusión de los expedicionarios fue que los mares que midieron en Portobelo y Panamá, tienen la misma altura (el Pacífico y el Atlántico).

El siglo XVIII culmina brillantemente con la fórmula de Pierre Simon de Laplace⁶⁸ que contiene correcciones para la temperatura, la latitud, la diferencia de la gravedad a diversas alturas y variaciones de la humedad. Su obtención parte de la ecuación de Laplace

$$dp = \rho \cdot g \cdot dr$$

donde designa a la presión, a la aceleración de la gravedad y a la densidad del aire a la altura r. Esa fórmula aún se usa hoy⁶⁹.

4.1.1.7. Comprobación de la ley de Mariotte en el Ecuador Terrestre

Aunque citamos esta experiencia en último lugar dentro del epígrafe dedicado a la nivelación barométrica, fue previa a cualquier trabajo de los estudiados en las páginas anteriores.

Jorge Juan tiene la pretensión de dar validez universal a la ley de Mariotte, y aplicarla con rigor científico en el Ecuador terrestre, por primera vez. Jorge Juan afirma que "... el Aire se dilata en aquella región en razón inversa de los pesos, que le oprimen"⁷⁰, siguiendo las experiencias de Mariotte, que también

⁶⁷Página 109 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁶⁸Laplace, Pierre Simon de, Mécanique céleste. IV. Páginas 469-522. Paris.1805. Y también Frisinger, H. Howard, Mathematicians in the History of Metereology: the Pressure-Height problem from Pascal to Laplace, Historia Mathematica 1, páginas 281-284, 1974.

⁶⁹Esta ecuación puede expresarse como:

$$r = 18.336 \cdot (1 + 0.002845 \cdot \cos 2\varphi) \cdot \frac{[1 + 2 \cdot (t + T)]}{1.000} \cdot \frac{(1 + r)}{a} \cdot (\log h' - \log h) + \frac{0.868589 \cdot r}{a}$$

donde r = diferencia de altura de los dos lugares, φ = latitud del lugar inferior; t = temperatura, por encima del punto de congelación, del lugar inferior; T = temperatura, por encima del punto de congelación del lugar superior; a = distancia del centro de la tierra al punto más bajo; h' = altura del barómetro en el punto inferior; y h = altura del barómetro en el punto superior.

⁷⁰Página 111 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

comprobó Boyle en Inglaterra, Juan pretende acreditar esta ley en la “Zona Tórrida”. El 31 de agosto de 1737 estando en el cerro de Pambamarca junto a Godin, con un barómetro simple o barómetro de Torricelli, ya descrito, inicia sus experimentos con el barómetro⁷¹.

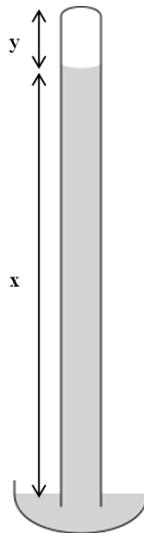
Para comprobar que es aplicable la ley de Mariotte a bajas latitudes aplica la teoría que sigue.

Supongamos un barómetro simple con la cubeta llena de mercurio y un tubo de 31 pulgadas de largo. Se llena el tubo de mercurio, dejando una longitud a con aire, y se invierte en la cubeta. Las variables son las siguientes:

l : longitud total del tubo a : longitud del tubo que contiene aire antes de invertirlo en la cubeta, cuando el aire está “dilatado”

f : presión con que la atmósfera oprime al mercurio de la cubeta x : altura a la que queda el mercurio, en el tubo invertido en la cubeta

y : longitud del tubo que ocupa el aire, en el tubo invertido en la cubeta



Además tiene en cuenta que:

$$x + y = l = \text{longitud del tubo}$$

⁷¹Jorge Juan adoptaría para el nivel del mar 756,8 mm. La Condamine haría sus cálculos con 757,9 mm.

$$f = 456,6 \text{ mm}$$

$f - x$: presión con que está oprimido el aire dilatado

Según Mariotte se debe cumplir la relación de proporcionalidad:

$$\frac{y}{a} = \frac{f}{f - x}$$

$$f \cdot y - x \cdot y = a \cdot f$$

y si sustituimos la variable x en la expresión anterior por el valor $x = (l - y)$, resulta:

$$y^2 + f \cdot y - l \cdot y = a \cdot f$$

suponiendo $l - f = b$:

$$y^2 + -b \cdot y = a \cdot f$$

$$y = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{a \cdot f + \frac{1}{4}b^2}$$

y si sustituimos la variable y en la expresión anterior por el valor $y = (x + l)$, resulta:

$$x = 1 - \frac{1}{2}b \pm \sqrt{a \cdot f + \frac{1}{4}b^2}, \quad (7)$$

Para la verificación de la ley de Mariotte Juan realizó las cuatro experiencias que a continuación reseñamos en las que compara la altura teórica del mercurio en el barómetro (obtenida con la ecuación 7) y la real (obtenida con el barómetro):

<i>Número de Experimento</i>	<i>a: longitud del tubo que contiene aire antes de invertirlo en la cubeta</i>	<i>Lo que ahonda el tubo en el mercurio de la taza</i>	<i>f: presión con que la atmósfera oprime al mercurio de la cubeta</i>
1	0	0	17 pu lg adas 10 líneas 4 puntos
2	5 pu lg adas 10 líneas 8 puntos	0 pu lg adas 7 líneas 0 puntos	12 pu lg adas 1 líneas 1 puntos
3	10 pu lg adas 4 líneas 0 puntos	0 pu lg adas 7 líneas 0 puntos	9 pu lg adas 1 líneas 6 puntos
4	15 pu lg adas 7 líneas 0 puntos	0 pu lg adas 9 líneas 9 puntos	6 pu lg adas 5 líneas 6 puntos

En la segunda experiencia los valores de las variables de la ecuación (7) son:

$$l = 31 - 7 \text{ líneas} = 30 \text{ líneas } 5 \text{ puntos}$$

$$a = 5 \text{ pu lg adas } 10 \text{ líneas } 8 \text{ puntos}$$

$$f = 17 \text{ pu lg adas } 10 \text{ líneas } 4 \text{ puntos}$$

$$b = l - f = 3 \text{ pu lg adas } 1 \text{ líneas } 8 \text{ puntos}$$

y resultado teórico que propone teórico con la ecuación (7) es:

$$x' = 11 \text{ pu lg adas } 10 \text{ líneas } 2 \text{ puntos}$$

y el valor de experimento:

$$x = 12 \text{ pu lg adas } 1 \text{ líneas } 7.5 \text{ puntos}$$

Del mismo modo se deducen los resultados de los experimentos 3 y 4:

<i>Número de Experimento</i>	<i>Valor de x con el experimento</i> $x = 1 - \frac{1}{2}b \pm \sqrt{a \cdot f + \frac{1}{4}b^2}$	<i>Valor de x' con la fórmula que propone Mariotte</i>
1	17 pu lg adas 3 líneas 4 puntos	
2	12 pu lg adas 1 líneas 7.5 puntos	11 pu lg adas 10 líneas 2 puntos
3	9 pu lg adas 1 líneas 6 puntos	8 pu lg adas 11 líneas 6 puntos
4	6 pu lg adas 5 líneas 1.5 puntos	6 pu lg adas 0 líneas 0 puntos

<i>Número de Experimento</i>	<i>Diferencia x - x'</i>	<i>Diferencia x - x' (mm)</i>
1		
2	3 líneas 6 puntos	7,9
3	2 líneas 0 puntos	4,5
4	4 líneas 4.5 puntos	9,9

Con estos resultados Jorge Juan verificó la ley de Mariotte para medida de altitudes de los vértices de la triangulación en el Ecuador terrestre, como hemos explicado que se hizo. La última columna de la tabla anterior que muestra la diferencia entre el valor observado y el teórico previsto, nos muestra variaciones que llegan hasta el 3 %, error que debe tenerse por pequeño si consideramos las circunstancias en que fueron realizados los experimentos:

“Las diferencias, que se hayan, entre las experiencias y por lo que se concluye por la ley de Mariotte (...) son aún mucho menores de lo que se puede esperar en la práctica: pues por poco que el Tubo de vidrio sea más angosto, o estrecho hacia el extremo abierto, se seguirá el efecto de quedar el Mercurio más alto en las experiencias, que lo que la ley diere, conforme a lo que nos ha sucedido; y si se añade además a esto las desigualdades interiores del mismo Tubo, y las materia heterogéneas, que se esparcen por el Aire, todo

lo que es inevitable en la práctica, cómo no hemos de esperar diferencias considerables”⁷².

Desde el punto de vista técnico la construcción de un barómetro presentaba numerosos problemas⁷³. Era preciso disponer de tubos de vidrio de sección regular que garantizaran variaciones constantes en la columna de mercurio. El propio mercurio usado ya era un problema, pues no sólo había que conseguirlo con unas mínimas garantías de pureza, sino que cualquier intercambio de observaciones entre científicos exigía un líquido estándar al que referirlas. Los métodos para la división de la escala, o la simple dificultad existente para rellenar un tubo de sección pequeña, constituirán dificultades de gran importancia. Otros problemas añadidos eran: el menisco que formaba el mercurio, el riesgo de rotura en el transporte, los procedimientos para purgar el mercurio y así evitar la formación de burbujas de aire y asegurar la luminosidad de la columna. Hacia la segunda mitad del setecientos los trabajos de Jean André De Luc logran mejorar la precisión de los barómetros⁷⁴.

Explica Jorge Juan, que “las dilataciones del Aire, a las varias alturas de la atmósfera se pueden expresar como lo hizo M.Halley⁷⁵, por las ordenadas de una y hipérbola entre sus asíntotas...”⁷⁶ como dibuja en la figura 4.23. Según M. Mariotte $\frac{a}{x} = \frac{z}{b}$, siendo a y x las alturas del mercurio en el barómetro en dos puntos diferentes y b, z la dilatación del aire en el interior del tubo para esas alturas a, x. Según Juan debe verificarse:

$$(altura\ de\ columna\ de\ mercurio\ en\ i) \cdot (dilatación\ del\ aire\ en\ i) = cte$$

Siguiendo el gráfico de Juan de la figura 4.23, B, H, D y K son las alturas del mercurio y C, I, E y F las dilataciones del aire correspondiente.

⁷²Páginas 114 y 115 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁷³Ver Frisinger, H. Howard, The history of Meteorology to 1800, New York, 1977.

⁷⁴Middleton, W.E.K, The history of the barometer, páginas 129-131 y 167 ss., Baltimore, 1964. La memoria de Jean André De Luc, Recherches sur les Modifications de l'Atmosphère, Ginebra, 1772, contiene una historia del barómetro hasta 1749.

⁷⁵Philosophicas Tranfacciones, o Memorias de la Real Academia de Londres N.181, año 1686.

⁷⁶Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, página 119, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

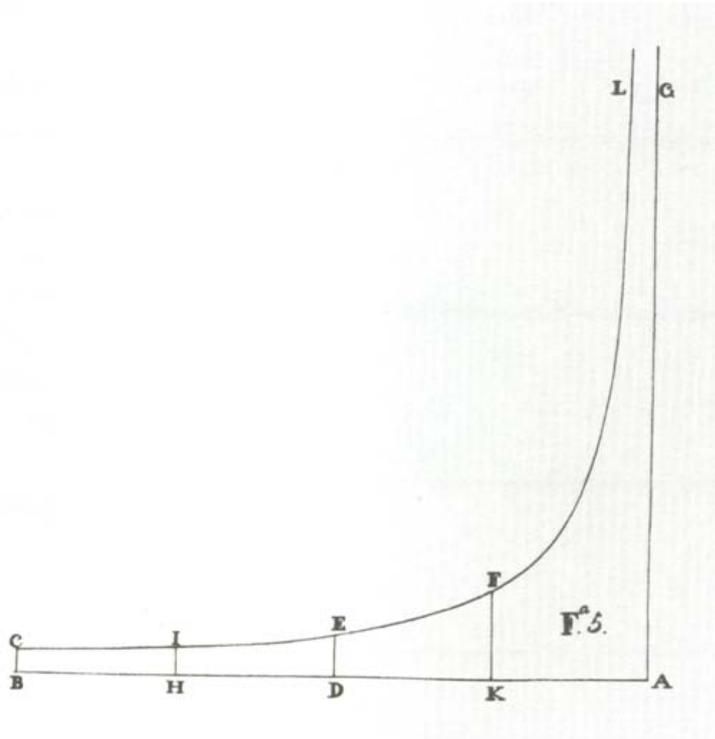


Figura 4.23: Dibujo de Jorge Juan de la parábola que representa la relación entre las alturas del mercurio en el barómetro (abcisas) y la dilatación del aire en el interior del tubo para las alturas correspondientes. Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, *Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación*, página 119, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

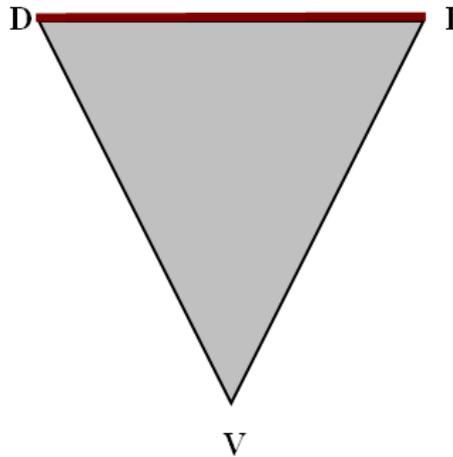


Figura 4.24: Triángulo VDI

4.1.2. La Triangulación Geodésica

4.1.2.1. Proyecto inicial

Concluida la medida de la base, se procedió a la medición de los ángulos de la serie de triángulos que cubrían el arco de meridiano. Con un cuadrante de círculo⁷⁷ se determinarían los ángulos interiores de los triángulos, y conocido uno de los lados podría calcularse por simple trigonometría plana todos los triángulos trazados por el método de intersección directa. Siendo el triángulo VDI, fig.4.24, de lado DI de longitud conocida y ángulos interiores d , i , v , se resuelve con las ecuaciones:

$$VD = DI \frac{\text{sen } i}{\text{sen } v}; \quad VI = \frac{\text{sen } d}{\text{sen } v}$$

Después de un reconocimiento geográfico y cartográfico de la zona se designaban los vértices de la triangulación que permitirían recorrer la distancia

⁷⁷Para observar los ángulos de la triangulación cada miembro de la compañía llevaba un cuarto de círculo provisto de anteojo y micrómetro. Salvo uno de los llevados por La Condamine que había pertenecido al caballero de Louville, todos poseían parecidas características y fueron construidos por Langlois. El de Juan y Ulloa, también realizado por este artesano entre 1735 y 1736 bajo la dirección de Du Fay, tenía dos pies de radio, estaba fabricado en hierro, el limbo sobre el que se grababan las divisiones era de latón y admitía dos rotaciones independientes, la primera según el eje que sustenta su base, para medir ángulos verticales y el segundo permitía definir planos de distinta inclinación respecto al horizonte. El anteojo podía deslizarse por el arco del sector entre los 0° y 90° .

deseada. Durante dos años se desplazaron, de norte a sur, los 400 kilómetros que aproximadamente constituían los más de 3° de incremento de latitud triangulados en las llanuras ecuatorianas.

Una condición previa a la triangulación fue la de tener buena visibilidad en cada vértice con respecto a todos los de alrededor, y poner allí las señales, los encargados de hacerlo fueron miembros de la expedición: Verguin y Marainville. En tres ocasiones fue necesario emprender triangulaciones auxiliares para verificar distancias entre señales. Otra condición previa fue que la configuración de los triángulos fuera tal que los ángulos no fueran inferiores a 30°, se buscaba con ello una buena conformación de los triángulos. La definición del terreno en el que se encontraban fue una dificultad añadida. Según cuenta Antonio de Ulloa⁷⁸ el acceso y la señalización de los vértices estuvo llena de incidencias, que prolongaron el tiempo dedicado a la triangulación. El frío extremo y persistente en la señal de Pichincha⁷⁹, casi le cuesta la vida a Bouguer por congelación, además, las nubes densas durante 23 largos días les obligaron a descender sin hacer ninguna observación, Juan y Godin decidieron elegir otro lugar para instalar la señal. En el vértice Caraburu les robaron las tiendas de acampar. El 1 de septiembre de 1738, en la señal Pambamarca del primer triángulo observado, fue especialmente difícil la observación angular, el viento y el frío extremo provocaron la huída de los ayudantes indios, Godin se despeñó y quedó herido. La situación sufrida les obligó a ir a Quito para hacer las comprobaciones de las divisiones del cuarto de círculo. La pendiente escarpada del vértice Tanlagua (al igual que en el vértice Yasuay) les llevó a subir gateando para evitar caídas, pero el equipo de Jorge Juan no pudo hacer las observaciones porque se lo impidieron las nubes. Algo parecido ocurrió en el vértice Pucaguaicu (de más de 4000 metros de altitud), el mal tiempo impidió las observaciones y los dos grupos tuvieron que subir dos veces, el que se accidentó en esta ocasión fue Jorge Juan. Ulloa cae gravemente enfermo en la señal de Chichichoco y no pudo estar presente en las observaciones hechas desde las señales Guayama, Ilmal y Nabuso. Debido a la falta de medios económicos, Godin y Juan tuvieron

⁷⁸Páginas 323-347 de La Relación Histórica del viaje a la América Meridional de orden de S.Mag. en los Reynos del Perú, Antonio de Ulloa, 2 volúmenes, Madrid, 1748.

⁷⁹El volcán Ruko Pichincha está situado junto a la capital actual de Ecuador, Quito. Escribe un montañero del siglo XXI (Julián Herranz), durante un alto en el camino, "... el Pichincha es tan alto como el Montblanc, pero sin nieve: sólo agujas de hielo en las fisuras de la rocas de la cumbre. El Sol ecuatorial, que abrasa y ciega, dio al traste con la nevada de anoche. Para mí superar los 4000 metros son palabras mayores: subo lentamente, saboreando más de lo ordinario el paisaje y el oxígeno...", "fue entonces cuando comprendí por qué el indígena lo llamaba *viento blanco*: el aire húmedo de la cuenca amazónica se convierte a esas alturas en mil agujas de hielo, que se van incrustando como finísima cuchillas en los pantalones, en el pasamontañas, en el anorak...".

que desplazarse a Quito desde el vértice Papaurcu (y más tarde en Ilmal), en el viaje Godin vuelve a enfermar. Mientras, el resto de los expedicionarios esperaban su regreso, se efectuaron las experiencias de la desviación de la vertical, aprovechando la importante influencia de las montañas como masas perturbadoras. Atravesando la cordillera de Azuay Bouguer tuvo una grave caída. En Sinasaguan corrieron peligro de congelación por las bajas temperaturas y no pudieron hacer ninguna medición hasta el último día. En el vértice Quinoaloma las observaciones fueron muy penosas y difíciles, para descansar pasaron a reconocer la llanura de Tarqui, donde se haría la medida de la base de comprobación. En las últimas señales al Sur se produjo el asesinato del cirujano M. Seniergues, miembro de la expedición⁸⁰, fue un ajuste de cuentas, parece ser por sus relaciones íntimas e ilícitas con algunas lugareñas. Y para finalizar la triangulación se midieron las bases de comprobación Cuenca y Tarqui. Antonio de Ulloa y Jorge Juan tuvieron que incorporarse a una campaña militar por los mares del Sur, al regresar continuaron su trabajo, fue en Mira donde los expedicionarios hicieron las observaciones astronómicas, entre el 14 de febrero de 1744 y el 23 de mayo de 1744. Aunque los peligros que corrieron fueron abundantes hicieron, con empeño constante, un trabajo científico muy riguroso.

En cualquier proyecto de triangulación contemporáneo la elección correcta de los vértices es imprescindible, por lo que se debe considerar con detenimiento antes de proceder a la señalización y la observación de cada triángulo. La buena conformidad de los triángulos, en la que se incluye la visibilidad en cada vértice con respecto a todos los de alrededor requiere la tarea de hacerse con cuanta cartografía de la zona exista, en el caso en estudio es evidente que la carencia de mapas resultó ser, aunque ellos no lo comenten, un obstáculo más. El insuficiente conocimiento de la geografía del país les impidió prever muchas de las dificultades a las que habrían de enfrentarse. Con los conocimientos topográficos y geodésicos actuales, la triangulación perfecta

⁸⁰Por el mes de julio de 1739, a punto de terminar la fase de triangulación para iniciar después las observaciones astronómicas en Tarqui y Baños, los expedicionarios estuvieron en las fiestas patronales de la ciudad de Cuenca. El último día al finalizar la corrida de toros —explica La Condamine— después de unas jornadas de tensión creciente, entre 150 y 300 hombres dirigidos por el vicario Juan Jiménez Crespo se amotinaron contra la presencia francesa, terminando por linchar al cirujano. Jorge Juan y Godin no se encontraban en el lugar de los hechos, cosa que en opinión de La Condamine habría estado a su alcance, pues "...el pueblo siempre esclavo del miedo, le profesaba un gran respeto y no había olvidado que dos años antes, valientemente, había librado a su camarada de un desenlace casi tan peligroso". Se refería sin duda a una ocasión en la que sacando sus armas evitó el prendimiento de Ulloa. Antonio Lafuente y Antonio Mazuecos "Los Caballeros del Punto Fijo" páginas 128 y 132. CSIC/SERBAL. Madrid 1987. Los autores citan la correspondencia de La Condamine.

estaría teóricamente compuesta por triángulos equiláteros. Por otra parte es la figura que cubre mayor superficie con un mínimo de triángulos.

Si partimos de una base conocida AB del triángulo y desde sus extremos se hacen lecturas a un tercer vértice V que define el triángulo a levantar, la elipse de tolerancia, en la que se encuentra el vértice V a levantar, de semeje mayor a , y siendo e_a el error angular en cota máxima afectado de ambas visuales, l la longitud del lado del triángulo isósceles teórico y α el ángulo interior del vértice, se cumple la ecuación⁸¹:

$$a = \frac{l \cdot e_a}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

que nos conduce a la resolución práctica de buscar ángulos lo más aproximados a 60° . Para $\alpha = 22.5^\circ$, $a = 5 \cdot l \cdot e_a$. Lo mejor será tomar $a = 5 \cdot l \cdot e_a$ evitando ángulos inferiores a 22.5° y tratando de conformar los triángulos a equiláteros, hasta donde el terreno lo permita.

Nuestros científicos intuían que la forma de los triángulos influiría notablemente en la precisión a esperar y por ello, a pesar de los numerosos y graves contratiempos ya enumerados, fueron extremadamente precavidos en la definición de los triángulos, que en ningún caso tuvieron ángulos inferiores a 22.5° . Es más, en las observaciones del triángulo n° 16, constituido por los ángulos interiores de los vértices Mulmul-Guayama-Ilmal, de valores $60^\circ 49' 38''$, $91^\circ 22' 25''$ y $27^\circ 47' 57''$ respectivamente, el ángulo de Ilmal les pareció sospechoso por ser inferior a los 30° previstos inicialmente y decidieron sustituirlo a él y al triángulo adyacente por dos nuevos triángulos. El resultado de la longitud del lado RS común, de la figura 4.25, fue casi el mismo en los dos casos planteados, de modo que decidieron no hacer modificación alguna al triángulo n° 16: “pero habiendo hallado el lado RS de igual magnitud, tanto por el primer método como por el segundo, a cortas pulgadas de diferencia, me parece que para no confundir la obra, será bueno no hacer mención de los triángulos puntuados”⁸².

Inicialmente quisieron observar los tres ángulos interiores de cada triángulo, pero para disminuir el tiempo de trabajo, decidieron dividir la compañía

⁸¹Cfr. Chueca Pazos, M. , Topografía, Tomo II, páginas 506-512 , editorial Dossat, 1982.

⁸²Páginas 162 y 163 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

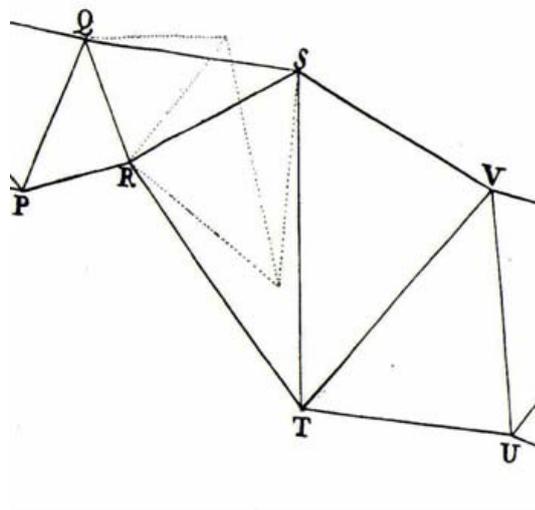


Figura 4.25: Los vértices Mulmul-Guayama-Ilmal del triángulo n° 27 de la triangulación se corresponden con el triángulo QRS de la figura. Los triángulos punteados son los que levantaron para medir el lado RS y el resultado fue el mismo utilizando los dos primeros triángulos o con los otros dos

en dos grupos⁸³, con un orden tal, que cada grupo medía dos ángulos y el tercero se lo comunicaba el otro⁸⁴. Un equipo estaba formado por Bouguer, La Condamine y Ulloa, y otro por Juan y Godin⁸⁵. Como se duplicaban las lecturas de ángulos horizontales podían comprobar que las observaciones eran fiables y hacer una media entre las lecturas que se repetían, una vez hecho esto las corrigen para que sumen 180° . Cada triángulo se estudia en solitario, esto quiere decir que si se dudaba más de un ángulo que de los otros dos, se hacía la corrección sólo sobre él, otras veces sobre dos y otras sobre tres, a partes iguales.

Los ángulos que refieren los expedicionarios en sus escritos no son los obser-

⁸³Página 158 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁸⁴Según Antonio de Ulloa, hasta la señal Chulapu cada grupo observó los tres ángulos de cada triángulo, a partir de ella sólo dos ángulos. Cfr. La Relación Histórica del viaje a la América Meridional de orden de S.Mag. en los Reynos del Perú, Antonio de Ulloa, 2 volúmenes, Madrid, 1748.

⁸⁵Una vez producida la ruptura definitiva entre Godin y Bouguer cada equipo resolverá los problemas a su arbitrio, sin que el jefe de la expedición pudiese hacer uso del poder que la Academia le había otorgado.

vados, sino los corregidos de los errores instrumentales y sobre los que, como hemos dicho, se hace la media aritmética:

“...los ángulos que observamos en la serie de triángulos, que se verá no tan solo fueron corregidos del yerro de los anteojos, y otros, que de ordinario se conocen por los Inteligentes, pero asimismo de los que pudimos conocer de la construcción de la división del Instrumento”⁸⁶.

Parece que esos errores a los que se refiere Jorge Juan son los debidos al grabado de las divisiones del limbo y a la falta de paralelismo entre el plano que define el anteojo y el del limbo⁸⁷ del instrumento. También puede ser la caída o alteración de las señales y cualquier circunstancia que alterara las condiciones del levantamiento.

El mismo Jorge Juan ilustra los dos usos que tenía el cuadrante de círculo, como se puede ver en la figura 4.26 y la figura 4.27.

El cuarto de círculo que utilizaron para triangular estaba constituido fundamentalmente por la cuarta parte de un círculo, compuesto de planchas de hierro para evitar deformaciones y dar estabilidad al instrumento, armado sobre 4 pies que permitían adaptarlo al terreno, como lo hacen las patas de los trípodes. En el centro del sector circular colgaba una plomada, que se cubría con una caja de igual longitud para que el viento no desplazara a la plomada. Sobre el cuarto de círculo se montaba uno o dos anteojos de dos lentes y retículo, formado por la intersección de hilos de seda en el foco del objetivo⁸⁸ para hacer puntería sobre el vértice observado.

⁸⁶Página 157 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁸⁷Godin, Ulloa y Juan, en el Ecuador y Maupertuis, en Tornea aplicaron varios métodos para evitar errores debidos a la incorrectas divisiones del limbo del instrumento:

- observar los ángulos interiores de un triángulo y restar a la suma 180° , de tal forma que pudieran hallar las correcciones a todas las posibles lecturas.

- observar cuatro ángulos rectos sumarlos o restarles 360° , y el resultado dividirlo por 4, que sería la corrección de la lectura 90° .

- observar un ángulo recto en dos de 45° , sumarle o restarle 90° , dividir por 2 para obtener la corrección de la lectura angular 45° , proceder así para obtener la corrección a cualquier lectura.

Cfr. páginas 156 y 157 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁸⁸Página 47 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid.

Para las lecturas de los ángulos verticales se utilizaba un anteojo y con la plomada se hacía la lectura, comprobando antes la verticalidad del limbo con esa misma plomada. Para las lecturas de ángulos horizontales se hacía girar el cuadrante hasta lograr que fuera normal a la vertical del lugar. Se utilizaban dos anteojos, uno de ellos permanecía fijo y en paralelo a uno de los radios del cuadrante, y el otro se desplazaba a lo largo del limbo con centro de giro en el mismo centro del cuadrante. Se apuntaba con los dos anteojos a los dos vértices que definían el ángulo buscado, y la lectura del ángulo horizontal se hacía con el anteojo que corría por encima del limbo y que llevaba un hilo de plata que señalaba la lectura del ángulo medido.

El mayor problema que tuvieron los constructores de instrumentos para mediciones angulares de la Ilustración fue el método del grabado del limbo. El cuarto de círculo de J. Juan exigía que sobre una longitud circular de 102.05 cm se hicieran 40 divisiones, la distancia entre dos señales era de 89 mm. El proceso seguido consistía en, una vez fijados los puntos 0° y 90° del arco, realizando bisecciones y trisecciones angulares sucesivas, se lograban partes iguales de 5° . El problema era cómo aumentar la precisión. Según describió La Hire (siglo XVII) el método consistía en trazar sobre el limbo el número de arcos adecuado para la subdivisión que se quería conseguir y, posteriormente, buscar las transversales ab, bC, cD... (cfr.4.28), teniendo en cuenta el carácter radial de los círculos “paralelos” empleados. El problema se reducía a la determinación del lugar geométrico XX' de los centros desde los cuales podían trazarse dichas transversales. La solución no tenía más complicaciones que las derivadas de buscar la circunferencia que pasase por los puntos O, a y B, es decir el centro del instrumento, la división 0° del círculo más interior y la división 5° del más exterior, respectivamente. El radio de dicha circunferencia proporcionaba el arco XX'. Los puntos en que aB cortaban a los seis círculos concéntricos definían otras tantas particiones de la amplitud angular de 5° , así como el punto b del círculo interior sobre el que habría de pasar la segunda transversal ObC. Reiterando el proceso descrito podían grabarse sobre el limbo las divisiones correspondientes a 1° de amplitud⁸⁹.

La precisión podría incrementarse incorporando un micrómetro al cuarto de círculo. El prototipo más generalizado en la primera mitad del siglo XVIII fue descrito por Azout. Consistía en una estructura metálica con dos filamentos

1748.

⁸⁹Una vez grabados los cuartos de círculo existían numerosos métodos para calibrar la precisión del trabajo efectuado por el artesano. Páginas 46-51 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

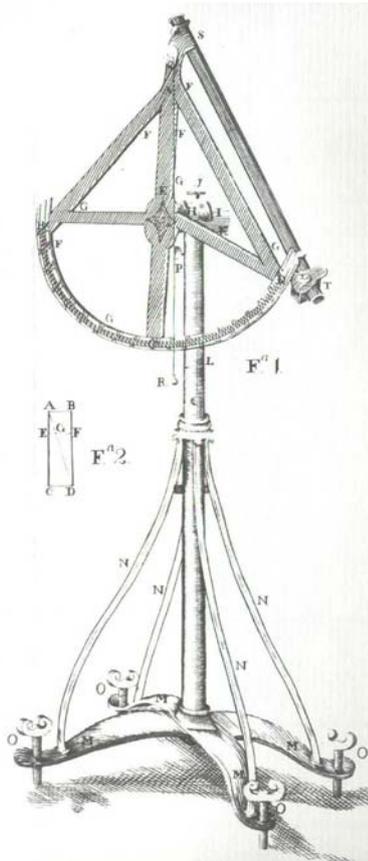


Figura 4.26: Cuadrante de círculo para lectura de ángulos verticales. Página 52, lámina 2, de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S. Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

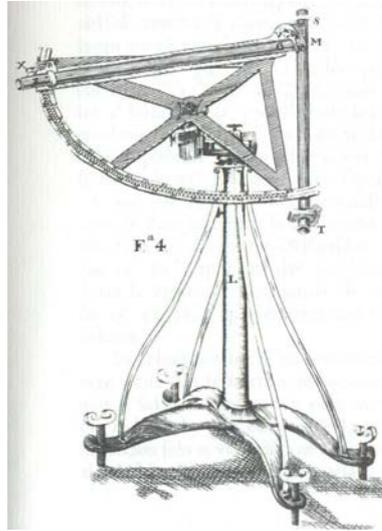


Figura 4.27: Cuadrante de círculo para lectura de ángulos horizontales. Página 52, lámina 2, de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748

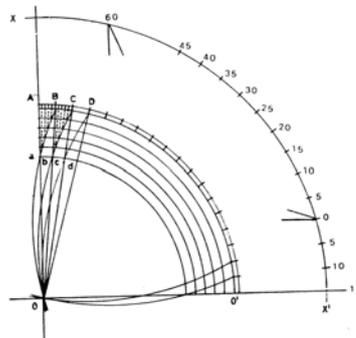


Figura 4.28: Trazado de divisiones sobre el limbo

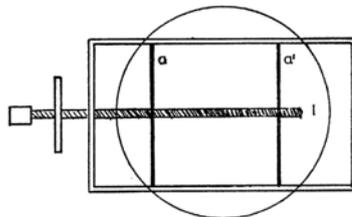


Figura 4.29: Micrómetro

de plata, uno fijo que indicaba el cero (a en la figura 4.29), y el otro móvil (a' en la figura 4.29), que se desplazaba accionado por un tornillo micrométrico a lo largo del eje del dispositivo. Se instalaba en el ocular del anteojo y podía ser utilizado, por ejemplo, para determinar el diámetro del Sol y los planetas. Se podían construir tornillos que precisaban tres vueltas para el filamento a' avanzase una línea. Los giros de tornillo quedaban reflejados sobre una rueda dividida en cien partes. Por tanto era factible apreciar hasta segmentos de $1/40.000$ pies de longitud⁹⁰. Para determinar el paso de rosca se hacía lo siguiente: conocida la distancia entre dos puntos, se instalaba en un extremo el cuarto de círculo, mientras en el otro se situaban dos objetos equidistantes de modo que de DC fuera perpendicular AB (cfr. figura 4.30). Desde A era recorrido con el filamento a' en ángulo alfa, determinándose la relación existente entre vueltas del tornillo y ángulo. El sector con que Bouguer hizo sus observaciones astronómicas tenía un micrómetro capaz de dividir un ángulo de $4'35''$ en mil partes, siendo cada una de ellas de $16''30$ ⁹¹. Vemos pues que la precisión teórica era espectacular. En la práctica este instrumento tenía deficiencias, y necesitaba correcciones, ya sea por motivos externos, como la refracción, o por motivos propios del instrumento.

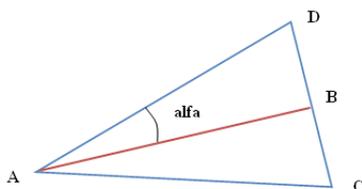


Figura 4.30: Esquema geométrico del micrómetro

La Condamine⁹² adopta unas precauciones que desde su punto de vista resultan imprescindibles:

1. Observar todos los ángulos de la triangulación varias veces 2. No utilizar las transversales para medir los ángulos del limbo. Las transversales sirven para aumentar la precisión del limbo y básicamente consistían en arcos para la subdivisión angular que se quería conseguir, el problema se reducía a la

⁹⁰M. Daumas, *Les instruments scientifiques aux XVII et XVIII siècles*, Paris, 1953, pag.249 y ss.

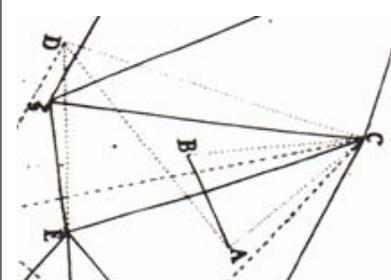
⁹¹P. Bouguer, "Table de la valeur des parties du micromètre du secteur de 18 pieds longuer", AOP, ms. C-2-7.

⁹²Cfr. La Condamine, *las Memoires de l'Academie de 1746*, sobre los trabajos de La Condamine en Quito, pag.624.

determinación del centro desde donde se trazaban esos arcos. 3. Una vez situado el anteojo en una división exacta del limbo determinar el ángulo por medio del micrómetro.

Todos los ángulos fueron medidos varias veces, Juan dice que son dos veces y que después se adoptó el valor medio de estas dos lecturas. El ángulo era referido al limbo (con incrementos de 10') y luego con el micrómetro, sin usar las transversales.

En el esquema de triangulación de triangulación del Arco del Perú, según el proyecto de J.Juan de la Fig.4.31, se midieron en total de 28 triángulos, si incluimos los triángulos de las figuras de ampliación de las bases, inicial y de comprobación, son un total de 33. Se perciben diferencias en los nombres de los vértices según los miembros de la expedición, como sucede por ejemplo en la señal que Godin llama Papa Ourcou y Jorge Juan llama Papaurcu. También se perciben diferencias y según se ha dicho en el número total de triángulos debido a diferencias en vértices complementarios y de ampliación trigonométrica de bases.

<table border="0"> <thead> <tr> <th>Señales</th> <th>Ángulos observados</th> <th>Ángulos corregidos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A Oyambáro</td> <td>63° 47' 40"</td> <td>63° 47' 42"</td> </tr> <tr> <td>B Caraburu</td> <td>77 35 30$\frac{1}{2}$</td> <td>77 35 32</td> </tr> <tr> <td>C Pambamarca</td> <td>38 36 44</td> <td>38 36 46</td> </tr> <tr> <td>Suma -</td> <td>179 59 54$\frac{1}{2}$</td> <td>180 00 00</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">2.</td> </tr> <tr> <td>A Oyambáro</td> <td>74 10 44$\frac{1}{2}$</td> <td>74 10 58</td> </tr> <tr> <td>C Pambamarca</td> <td>69 46 13</td> <td>69 46 32</td> </tr> <tr> <td>D Tanlagua</td> <td>36 02 20$\frac{1}{4}$</td> <td>36 02 30</td> </tr> <tr> <td></td> <td>179 59 17$\frac{1}{4}$</td> <td>180 00 00</td> </tr> </tbody> </table>	Señales	Ángulos observados	Ángulos corregidos	A Oyambáro	63° 47' 40"	63° 47' 42"	B Caraburu	77 35 30 $\frac{1}{2}$	77 35 32	C Pambamarca	38 36 44	38 36 46	Suma -	179 59 54 $\frac{1}{2}$	180 00 00	2.			A Oyambáro	74 10 44 $\frac{1}{2}$	74 10 58	C Pambamarca	69 46 13	69 46 32	D Tanlagua	36 02 20 $\frac{1}{4}$	36 02 30		179 59 17 $\frac{1}{4}$	180 00 00	
Señales	Ángulos observados	Ángulos corregidos																													
A Oyambáro	63° 47' 40"	63° 47' 42"																													
B Caraburu	77 35 30 $\frac{1}{2}$	77 35 32																													
C Pambamarca	38 36 44	38 36 46																													
Suma -	179 59 54 $\frac{1}{2}$	180 00 00																													
2.																															
A Oyambáro	74 10 44 $\frac{1}{2}$	74 10 58																													
C Pambamarca	69 46 13	69 46 32																													
D Tanlagua	36 02 20 $\frac{1}{4}$	36 02 30																													
	179 59 17 $\frac{1}{4}$	180 00 00																													
<p><i>Tabla de las observaciones angulares de Jorge Juan de los dos triángulos iniciales. En la primera columna el nombre del vértice, en la segunda columna los ángulos observados y corregidos de errores sistemáticos y accidentales, y en la tercera los ángulos compensados. El primer triángulo tiene un error de cierre de 5,5'' y el segundo de 42,25''</i></p>	<p><i>Dibujo de Jorge Juan de los triángulos ABC y ACD. También se puede ver la base inicial de Yarouqui. Sentido de la triangulación norte-sur</i></p>																														

Con los datos de las observaciones, que son los ángulos interiores de cada triángulo podemos obtener el estimador del error cuadrático, aunque de dudosa representatividad por sesgado y poco consistente:

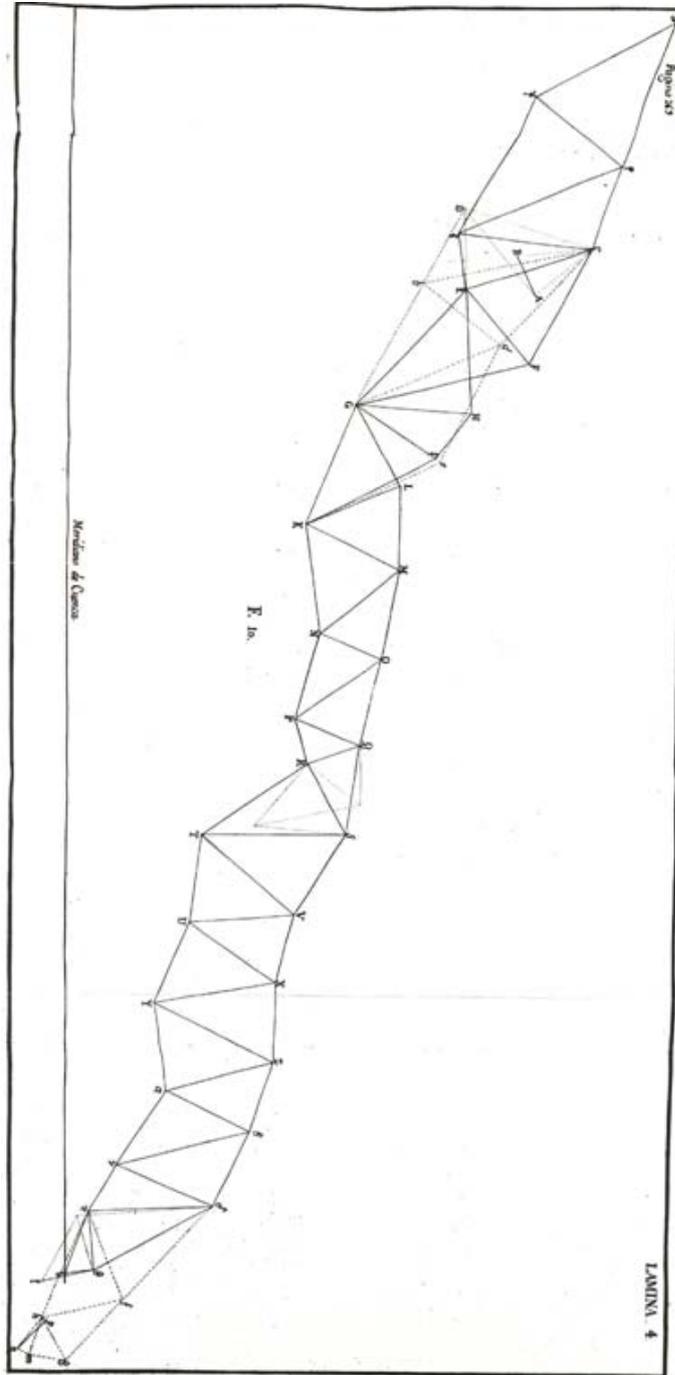


Figura 4.31: Esquema de triangulación de triangulación del Arco del Perú (proyecto de J.Juan)

$$\text{estimador del error cuadrático} = \frac{\sum |c|}{n}$$

c : diferencia entre la suma de los ángulos interiores de un triángulo y 180

n : número de triángulos

Autor	$\frac{\sum c }{n}$
Jorge Juan	11,86 segundos
Antonio de Ulloa	14,30 segundos

Si nos detenemos en las tablas de los ángulos observados de Juan o de Ulloa, la apreciación de las lecturas puede llegar al $\frac{1}{4}$ de segundo, gracias al micrómetro del instrumento. Cada ángulo interior de cualquier triángulo proviene de la media de dos lecturas a un vértice menos otra media de dos lecturas al segundo vértice.

160 OBSERVACIONES

Señales.	Ángulos observados.	Ángulos corregidos.
3.		
D Tanlagua	65° 39' 37"	65° 39' 42"
E Guápulo	67 17 33 $\frac{1}{2}$	67 17 33 $\frac{1}{2}$
C Pambamarca	47 02 38	47 02 44 $\frac{1}{2}$
	179 59 48 $\frac{1}{2}$	180 00 00
4.		
E Guápulo	72 08 53 $\frac{1}{4}$	72 08 52
F Guamaní	59 53 52	59 53 50
C Pambamarca	47 57 20 $\frac{1}{2}$	47 57 18
	180 00 06 $\frac{1}{2}$	180 00 00
5.		
E Guápulo	69 25 56 $\frac{1}{4}$	69 25 54
F Guamaní	74 00 14	74 00 12
G Corazón	36 33 56	36 33 54
	180 00 06 $\frac{1}{4}$	180 00 00
6.		
E Guápulo	38 05 12 $\frac{1}{4}$	38 05 10
G Corazón	58 53 29	58 53 26
H Chinculagua	83 01 27	83 01 24
	180 00 08 $\frac{1}{4}$	180 00 00
7.		
G Corazón	36 14 50 $\frac{1}{2}$	36 14 53
H Chinculagua	66 29 32	66 29 34 $\frac{1}{2}$
I Limpie-Pongo	77 15 30	77 15 32 $\frac{1}{2}$
	179 59 52 $\frac{1}{2}$	180 00 00

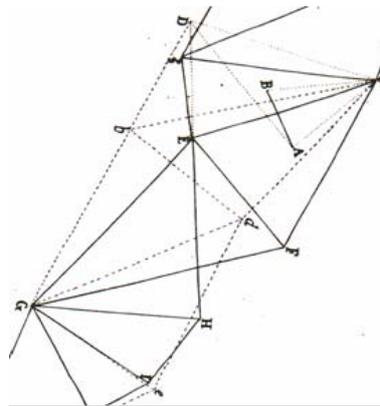


Tabla de las observaciones angulares de Jorge Juan de los triángulos 3-7 de la serie. En la primera columna el nombre de los vértices, en la segunda columna los ángulos observados y corregidos de errores sistemáticos y accidentales, y en la tercera los ángulos compensados

Dibujo de Jorge Juan de los triángulos 3-7 de la serie. Sentido de la triangulación norte-sur

HECHAS DE ORDEN DE S.M. 161.		
8.		
Señales.	Angulos observados.	Angulos corregidos.
G Corazón	66° 43' 23"	66° 43' 25"
I Limpic-Pongo	73 23 32 $\frac{1}{2}$	73 23 35
K Milin	39 52 57	39 52 59 $\frac{1}{2}$
	179 59 52 $\frac{1}{2}$	180 00 00
9.		
G Corazón	41 36 47	41 36 45
K Milin	44 16 48	44 16 47
L Papuraçu	94 06 28 $\frac{1}{2}$	94 06 28
	180 00 03 $\frac{1}{2}$	180 00 00
10.		
K Milin	60 31 59	60 31 59
L Papuraçu	60 31 32	60 31 34
M Vengotafin	58 56 27	58 56 27
	179 59 58	180 00 00
11.		
K Milin	52 18 08	52 18 06 $\frac{1}{2}$
N Chulapu	49 18 11 $\frac{1}{2}$	49 18 11 $\frac{1}{2}$
M Vengotafin	78 23 42	78 23 42
	180 00 01 $\frac{1}{2}$	180 00 00
12.		
M Vengotafin	34 47 55	34 48 21
N Chulapu	73 54 03	73 54 03
O Jivicatfú	71 17 36	71 17 36
	179 59 34	180 00 00

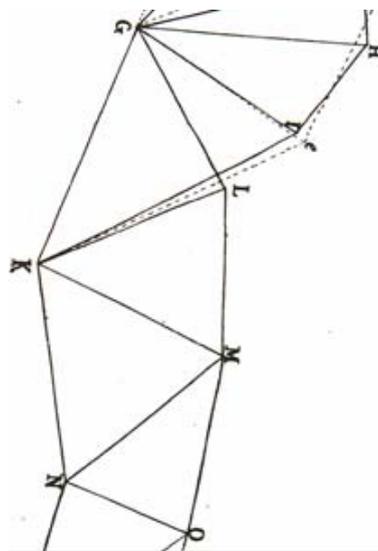


Tabla de las observaciones angulares de Jorge Juan de los triángulos 8-12 de la serie

Dibujo de Jorge Juan de los triángulos 8-12 de la serie

Conocida la longitud y la latitud de la base inicial y de la base de comprobación, en Yaruki y Cuenca respectivamente, decidieron prolongar la parte norte de la triangulación para alcanzar los 3° de longitud de arco. Añadieron 4 triángulos.

Jorge Juan explica textualmente “algunos han procurado persuadirnos de que no se debe medir más de 1° de meridiano para que la conclusión salga menos errónea, pero muy al contrario otros con razones más sólidas tienen por cierto, que cuanto más larga se hiciera la medida: estos es, cuanto más grande fuese el arco que se midiese, más exacto se tendrá la conclusión del grado”. Jorge Juan justifica que es mejor medir 3° que 1° porque los errores que se cometen son debidos a:

- los errores de las observaciones astronómicas para la determinación de los grados de amplitud del arco, a las que no afecta la longitud del arco cubierto, y además disminuye el error si lo que pretendemos es conocer el arco de 1° y medimos 3°, porque al dividir por 3 reducimos el error cometido en tres partes.

- los errores de las medidas geométricas, que aumentan a medida que aumenta la longitud cubierta, pero al dividir por el número de grados, en este caso 3°, disminuye.

30. Triangulo.			
Señales	Ángulos observados	Ángulos corregidos	
E Guápulo	72° 53' 15 ¹¹	72° 54' 10 ¹	
C Pambamarca	32 01 15	32 01 30	
ξ Campanario	75 02 20	75 04 20	
	179 56 50 ¹	180 00 00	
31.			
C Pambamarca	96 21 10	96 21 12	
ξ Campanario	38 07 36	38 07 38	
φ Cosin	45 31 08 ¹	45 31 10	
	179 59 54 ¹	180 00 00	
32.			
ξ Campanario	58 02 27	38 02 27	
φ Cosin	75 42 01 ¹	75 42 01 ¹	
ψ Cuicocha	66 15 49	66 15 31 ¹	
	180 00 17 ¹	180 00 00	
33.			
φ Cosin	59 48 00	59 48 04	
ψ Cuicocha	82 20 59	82 21 03	
ω Mira	37 50 49	37 50 53	
	179 59 48	180 00 00	

Tabla de las observaciones angulares de Jorge Juan de los 4 últimos triángulos. Decidieron prolongar la triangulación con 4 nuevos triángulos, en el sentido norte, para alcanzar los 3° de longitud de arco

Dibujo de Jorge Juan de los triángulos 30-33 de la serie. Sentido del trabajo en estos últimos trabajos sur-norte

Aunque estamos plenamente de acuerdo con el razonamiento de Jorge Juan y lo avalan sus buenos resultados, tenemos que decir que el error debido a la medida de la longitud de uno de los lados del triángulo, necesariamente conocido para la resolución del triángulo, se ve directamente afectada por el número de triángulos que componen la serie. El error transmitido a los triángulos posteriores aumenta a medida que aumenta el número de triángulos, y aunque dividamos por tres, podemos decir que este error es superior si el número de triángulos es mayor. Con los ángulos de todos los triángulos observados, comprobados y corregidos, y con la base de Yaruki de longitud 6274 toesas y 6 pulgadas se calculó, como veremos en los siguientes epígrafes

el valor de todos los lados de la parte occidental de la serie para calcular después el valor del arco terrestre⁹³.

4.1.2.2. Longitud horizontal de los lados de la triangulación

Después de medir todos los ángulos de la triangulación, comprobados, corregidos y compensados como hemos visto, y con la base de Yaruquí de 6274 toesas y 6 pulgadas se calculó el valor de todos los lados de la parte occidental de la serie⁹⁴, para llegar finalmente al valor del arco terrestre⁹⁵.

Para la determinación de los lados necesitaban conocer los ángulos horizontales de los vértices, para ello se servían del cuadrante como ya hemos enunciado en el epígrafe anterior.

Los ángulos horizontales medidos con el cuadrante no se proyectaban sobre el horizonte del lugar sino sobre el plano que definía el limbo del instrumento⁹⁶, y que en este caso seguía la alineación existente entre dos vértices observados.

Los lados de cada triángulo hubo que proyectarlos sobre el plano horizontal, por ser el terreno de Quito muy montañoso y quebrado, unas señales estaban muy elevadas respecto de otras, y sus distancias se midieron por consiguiente en distintos planos. La reducción se hizo de modo similar a como se hizo en la medida de la base fundamental, para ello se utilizaron los ángulos verticales corregidos de refracción⁹⁷.

El método utilizado por Ulloa para proyectar los lados en el plano horizontal es similar al que propone Juan, pero con una diferencia, calcula el ángulo

⁹³Páginas 167 y 168 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁹⁴El listado de las dos distancias y dos ángulos de cada triángulo aparece en las páginas 169-172 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁹⁵Página 169 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

⁹⁶Los teodolitos modernos leen las lecturas de los ángulos horizontales sobre el plano normal a la vertical del lugar.

⁹⁷Según Juan el valor de la refracción responde a la fórmula siguiente:

$$r_1 = r_2 = \frac{w - (\text{ángulo de altura} - \text{ángulo de depresión})}{2}$$

terrestre w sumando los ángulos interiores del triángulo COT de la figura 4.13, resultando que $w = COT + OCT - 180$, y Juan obtiene ese mismo ángulo w en segundos dividiendo el arco, la distancia CO, entre 16.

Ulloa después de haber reducido las distancias horizontales al nivel de la señal más baja hace una nueva reducción sobre los lados de los triángulos para que estén referidos todos al mismo plano, escogiendo la altitud del plano de Caraburu, que supone es de 1600 toesas sobre el nivel del mar y tomando como radio de la Tierra 3269297 toesas⁹⁸.

4.1.2.3. Observaciones al Sol para calcular los azimutes de los lados occidentales de la serie de triángulos

Llamamos meridiana o línea Norte-Sur, a la intersección del meridiano del lugar con el plano de horizonte. Esta línea que pretendemos conocer es la que junto al Este y el Oeste nos da los cuatro puntos cardinales (cfr. figura 4.32). La determinación de esta línea, y con ella el azimut buscado, es simple a partir de la observación de estrellas y en este caso del Sol. El observador ocupará la posición Q, extremo del lado QP, del que queremos conocer el azimut.

El procedimiento que utilizaron los expedicionarios para calcular el acimut de los lados de la triangulación fue el de resolver dos triángulos esféricos a partir de las observaciones desde un vértice que genéricamente llamaremos Q. El primer triángulo será el PZSOL y el segundo el NZSOL. A partir del ángulo del vértice Z, vértice común a los dos triángulos se puede hallar al final del proceso el azimut buscado.

El Sol, junto con los puntos P y Z (P = extremo del eje del mundo y Z = cenit del lugar), nos define el primer triángulo de posición, cuyos elementos son:

$$P - Z = \text{ángulo } PZ$$

$$P - SOL = \text{ángulo } PSOL$$

$$Z - SOL = 90^\circ - h$$

⁹⁸Página 251 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

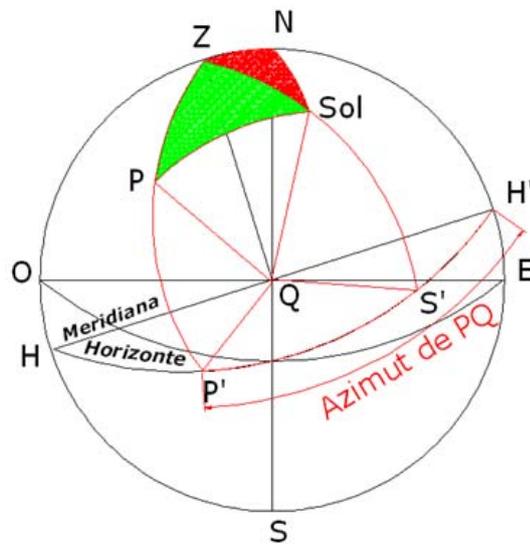


Figura 4.32: En el centro de la esfera celeste se encuentra la posición del observador sobre la Tierra

El ángulo PSOL se mide con el cuadrante observando desde Q el Sol, con un antejo, y observando el vértice P desde el otro antejo del instrumento. Los ángulos verticales PZ y ZSOL se miden desde Q con el cuadrante en vertical. Las observaciones al Sol se realizaban a una hora determinada mediante el péndulo horario, cuando la posición era la SS'.

La resolución del triángulo P, Z, SOL, nos permite calcular el ángulo PZSOL.

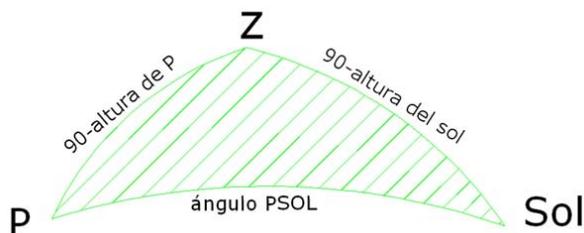


Figura 4.33: Triángulo esférico P-Z-Sol

Por consiguiente partimos de los tres lados de un triángulo esférico y vamos a calcular el ángulo Z (cfr. figura 4.33). Partimos de la primera fórmula de Bessel⁹⁹:

⁹⁹Tratado de trigonometría rectilínea y esférica, L. Octavio de Toledo, Librería General de Victoriano Suárez, Preciados 40, Madrid, páginas 227-234.

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{senc} \cdot \cos A$$

en la que sustituyendo los valores correspondientes tendremos:

$$\cos PSOL = \operatorname{sen} h_p \cdot \operatorname{sen} h_{SOL} + \operatorname{cosh} h_p \cdot \operatorname{cosh} h_{SOL} \cdot \cos Z$$

observadas las alturas en campo:

$$\begin{aligned} h_p &= \text{altura de } p \\ h_{SOL} &= \text{altura del Sol} \end{aligned}$$

y despejando $\cos Z$ resulta:

$$\begin{aligned} \cos Z &= \frac{\cos PSOL - \operatorname{sen} h_p \cdot \operatorname{sen} h_{SOL}}{\operatorname{cosh} h_p \cdot \operatorname{cosh} h_{SOL}} = \frac{\cos PSOL - \cos ZP \cdot \cos ZSOL}{\operatorname{sen} ZP \cdot \operatorname{sen} ZSOL} = \\ &= \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{senc}} \quad (\text{ecuación 1}) \end{aligned}$$

Siendo:

$$A = Z, \quad a = PSOL, \quad b = ZP \quad \text{y} \quad c = ZSOL,$$

nomenclatura que nos simplifica las ecuaciones que siguen;

Para utilizar la ecuación 1, en la resolución del triángulo esférico, era necesario prepararla para el cálculo logarítmico. La gran cantidad de operaciones para resolver los 33 triángulos hacía necesario que la fórmula de Bessel del coseno pudiese expresarse de modo que la aplicación de los logaritmos facilitara el trabajo.

Sustituyendo el valor de $\cos A$ en la expresión:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2} A &= \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{senc}}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{senc} - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{2 \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{senc}}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos(a)}{2 \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{senc}}} \end{aligned}$$

Y haciendo uso de la fórmula que nos permite transformar en producto la diferencia de cosenos:

$$\cos(b-c) - \cos(a) = -2\operatorname{sen}(b-c+a) \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c-a)$$

Y sustituyendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{1}{2}A &= \pm \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos(a)}{2 \cdot \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{sen}c}} = \pm \sqrt{\frac{-2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c+a) \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c-a)}{2 \cdot \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{sen}c}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}b \cdot \operatorname{sen}c}} \end{aligned}$$

Y aplicando la ecuación:

$$a+b+c = 2p \quad \text{de donde :}$$

$$b+c-a = 2(p-a)$$

$$c+a-b = 2(p-b)$$

$$a+b-c = 2(p-c)$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b \cdot \operatorname{sen}c}}$$

recordando la nomenclatura del triángulo esférico de la figura 4.33:

$$A=Z, a = \text{PSOL}, b = \text{ZP}, c = \text{ZSOL}, \text{ y}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\text{PSOL} + \text{ZP} + \text{ZSOL}}{2}$$

Llegando finalmente a la ecuación:

$$\operatorname{sen}\frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-\text{ZP}) \cdot \operatorname{sen}(p-\text{ZSOL})}{\operatorname{sen}\text{ZP} \cdot \operatorname{sen}\text{ZSOL}}}$$

Que tomando logaritmos se resuelve:

$$\log \operatorname{sen} \frac{Z}{2} = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(p - ZP) + \log \operatorname{sen}(p - ZSOL) - \log \operatorname{sen} ZP - \log ZSOL];$$

$$\operatorname{sen} \frac{Z}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{anti} \log [\operatorname{sen}(p - ZP) + \log \operatorname{sen}(p - ZSOL) - \log \operatorname{sen} ZP - \log \operatorname{sen} ZSOL]$$

Si tomamos los datos de Jorge Juan para medir el ángulo entre la señal Pambamarca y el centro del Sol podemos aplicar la formulación anterior y obtener los resultados siguientes:

<i>Variables</i>	<i>Resultados</i>
Altura del centro del Sol	11°40'55''
Refracción	0°4'40''
90-Altura verdadera del centro del Sol = ZSOL	78°23'45''
90-Altura de la señal de Pambamarca = ZP	85°39'31''
Ángulo observado del centro del Sol (corregido del semidiámetro del Sol) = PSOL	66°44'53''
Suma = PS + ZP + ZS	230°48'09''
P = Semisuma = (PS + ZP + ZS)/2 p	115°24'4.5''
p-Zp, diferencia primera	37°00'18.5''
p-Z0, diferencia segunda	29°44'33.5''
Seno del ángulo PZO/2	23°34'04''
Resultado: Ángulo horizontal entre la señal Pambamarca y el centro del Sol	67°8'8''

Luego el ángulo horizontal entre la señal Pambamarca y el centro del Sol (ángulo P'ZS' en la figura 14) es: 67°8'8''.

Una vez conocido el ángulo PZSOL podrá encontrarse sin dificultad el ángulo SOLZN (cfr. figura 4.34) que sumado al PZSOL nos proporciona el azimut del lado QP.

El problema no presentaba a los académicos mayores complicaciones desde el punto de vista teórico, dados los conocimientos astronómicos conocidos y aplicados sobradamente en la época¹⁰⁰.

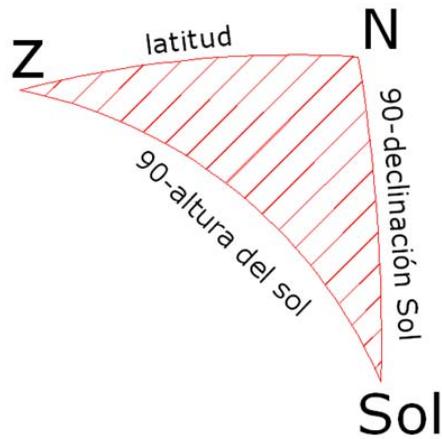


Figura 4.34: Triángulo Z-N-Sol

Los datos que necesitamos para calcular el triángulo esférico de la figura 4.34 siguiendo con el ejemplo tomado de los datos de Jorge Juan son:

¹⁰⁰El cálculo de la longitud era un objetivo prioritario en todos los estados europeos y se intentó resolver fundamentalmente con métodos astronómicos (como son las observaciones a los eclipses lunares, la posición de la luna respecto a la eclíptica, el paralaje de la luna con estrellas tabuladas, la ocultación de las lunas de Jupiter). La astronomía se aplicaba desde muy antiguo, y en el siglo XVIII era una herramienta conocida y estudiada con profundidad por los científicos.

<i>Variables</i>	<i>Resultados</i>
90-Altura verdadera del centro del Sol = ZSOL	78°23'45''
Latitud de Oyambaro	89°48'40''
90-Declinación del Sol a la hora de la observación	69°06'13''
Suma = ZSOL + NSOL + ZN	237°18'38''
Semisuma = p	118°39'19''
p-Zp, diferencia primera	40°15'34''
p-Z0, diferencia segunda	28°50'39''
Seno del ángulo PZO/2	34°20'34''
Azimut del centro del Sol a la hora de la observación	68°41'8''

Para calcular la declinación del Sol se tomó la máxima oblicuidad de la eclíptica que a finales de marzo de 1737 fue de 23° 28'20'', cifra que también se halló en el observatorio de París en 1738, como se refiere en Los Elementos de Astronomía de M. Cassini, página 113¹⁰¹.

El azimut del centro del Sol a la hora de la observación será 68°41'8'', que, añadido al ángulo horizontal P'ZS' = 67°8'8'' (ver figura 4.32):

$$\text{Azimut del lado PQ} = 68^{\circ}41'8'' + 67^{\circ}8'8'' = 135^{\circ}49'16''$$

Conocido el azimut de uno de los lados del triángulo, la determinación de los siguientes se obtenía con una simple suma algebraica de los ángulos interiores que constituían los triángulos. Aunque hay que decir que los académicos preferían medir el azimut de los lados directamente porque evitaban mayor acumulación de errores¹⁰².

Como ya sabemos las lecturas de ángulos horizontales hechas con el cuadrante seguían la alineación de los dos vértices visados con los anteojos. Ese ángulo no estaba proyectado sobre el plano de horizonte del observador, así que de nuevo se veían obligados a reducirlo con la fórmula de Bessel, antes de sumarlo al azimut calculado.

¹⁰¹Página 18 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

¹⁰²La Condamine, Mem.1746. página 652.

4.1.2.4. Deducción de la distancia entre los paralelos de los vértices

Halladas los acimutes de los lados de la serie de triángulos respecto del meridiano, podemos calcular las distancias entre los paralelos de los vértices.

Sea Z una señal y sea A otra señal, ZN el meridiano de Z , ZA un arco del azimut, y AN un círculo máximo que pasando por la señal A cruza perpendicularmente al meridiano ZN . El objetivo era calcular la proyección del lado AZ de la figura 4.35, conocido su azimut, sobre el meridiano NZ .

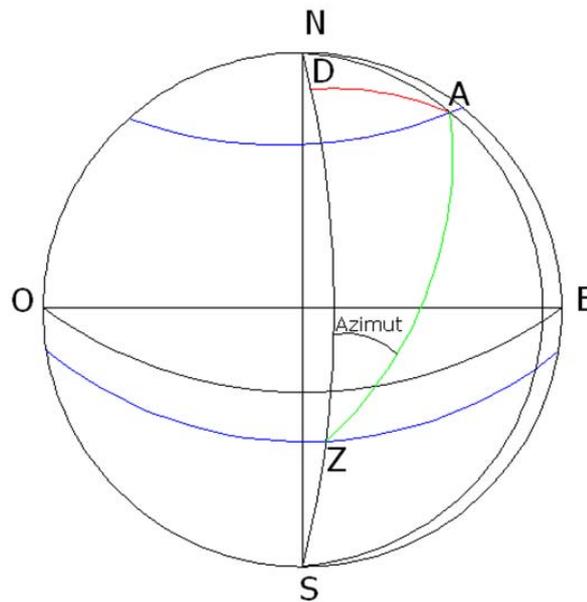


Figura 4.35: ANZ constituye un triángulo esférico. Sea Z una señal, sea A otra señal, ZN el meridiano de Z , ZA un arco del azimut coloreado en verde, y AN un círculo máximo que pasando por la señal A cruza perpendicularmente al meridiano ZN , coloreado en rojo. Los paralelos de Z y A son de color azul

Como las mediciones están hechas muy próximas al Ecuador Jorge Juan propone resolver el triángulo rectilíneo de la figura 4.36 en lugar del esférico ANZ , considerando que la diferencia entre la longitud ZD y ZN son mínimas.

Conocidos el azimut de la alineación ZA y la distancia horizontal entre Z y A se obtiene la longitud entre los paralelos de Z y de A .

Sirvan de ejemplo los datos entre las señales E y G de Jorge Juan:

Distancia horizontal entre E y G : 21953,234 toesas, 42786,853 m

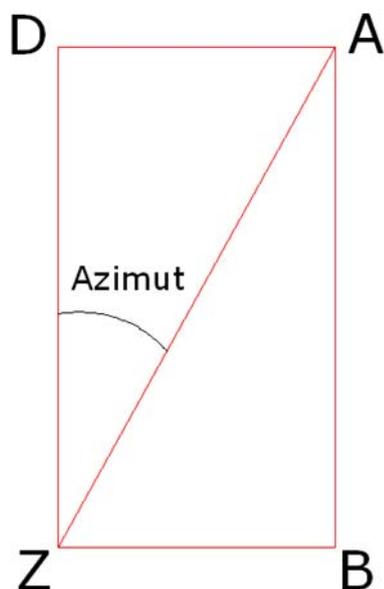


Figura 4.36: Triángulo rectilíneo ZAD. DZ es el meridiano de Z y AB el meridiano de B. El ángulo ZDA es el mismo que el ZBA

y el resultado obtenido:

Distancia entre los paralelos que pasan por E y por G: 19272,536 toesas, que equivale a 37562,173 m

Tras revisar los datos de Jorge Juan hemos comprobado que la reducción del lado GK no parece correcta. La distancia horizontal GK tiene un valor de 16173.809 toesas y la distancia entre los paralelos de GK es 18854.333 toesas, que según el método seguido no es un valor reducido, sino aumentado¹⁰³.

4.1.2.5. Reducción de las distancias entre los paralelos de los vértices al nivel del mar

La gran distancia a la que se encontraba el mar y las persistentes nieblas que ocultaban los puntos más altos, desde donde quizá se pudiera enlazar con puntos costeros, hacían inviable la nivelación de nuestra triangulación

¹⁰³Página 202 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

con puntos sobre el nivel del mar. Hubiera sido necesaria otra triangulación este-oeste, y ello hubiera añadido errores que disminuirían la precisión de los trabajos. En abril de 1739, cuando se aproximaba el final de los trabajos geodésicos, Bouguer se ofrece formalmente para hacer las mediciones necesarias para enlazar con la costa. Su única condición era que se le esperase para el inicio de la fase astronómica de la misión. El 28 de abril de 1739 Godin le envía un sector de 12 pies traído desde Francia y le comunica su decisión de romper definitivamente los contactos entre ambos grupos. Le parecía un retraso para el final de los trabajos la proposición de Godin y totalmente innecesario, porque un error en la determinación de la altura sobre el nivel del mar sólo equivaldría a 4'' o 5'' en la determinación del arco de meridiano, dentro de los límites de la precisión que cabía esperar. El estado de sus relaciones ya no habría de mejorar en los años que restaban para la conclusión de los trabajos. Las protestas de Bouguer y La Condamine no conseguirían doblegar la voluntad de Godin, pero temiendo que la Academia descalificase su actuación, solicitan que por lo menos haya intercambio de datos y de observaciones.

Godin y Juan emplearon el barómetro, y Bouguer y La Condamine lo hicieron por los dos métodos aunque prestaron más atención al método barométrico. Conocidas las alturas de los vértices de la triangulación se redujeron las medidas al nivel del mar tal y como ya hemos explicado con detalle en el epígrafe dedicado a la reducción al nivel del mar de la base fundamental.

4.1.2.6. La base de comprobación

Los trabajos de la triangulación finalizan con la medición de una base durante veintiún días, siguiendo los mismos procedimientos que se emplearon en la llanura de Yaruqui. Cada grupo eligió un lugar diferente: Juan y Godin se quedarían en Cuenca mientras que La Condamine y Bouguer un lugar más meridional llamado Tarqui. No se eligió un lugar lo suficientemente adecuado, en ninguno de los grupos. En Yaruqui la pendiente era excesiva y en Cuenca las dificultades fueron mayores: "... tuvo algunas paredes que derribar, y dos Ríos de tres cuartas a una vara de agua de profundidad, que pasar midiendo: lo que hicimos por medio de caballetes... Otro Río algo más caudaloso, que es el que pasa cerca de Guanacauri, lo medimos geométricamente por dos pequeños triángulos: cuyos ángulos observamos con el cuarto de círculo"¹⁰⁴.

¹⁰⁴Página 166 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S.Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

Los resultados fueron muy acordes con el valor esperado.

	<i>Base medida (toesas)</i>	<i>Base inducida (toesas)</i>	<i>Diferencia (toesas) (metros)</i>
<i>Bouguer</i>	5259,8571	5259,6487	0,2084 (0,4061 m)
<i>Godin</i>	6197,6111	6196,5972	1,0139 (1,976 m)

Justifican la divergencia en los resultados por la diferencia de temperatura entre Cuenca y Yaruquí, un incremento de 7 °C, que afecta a la dilatación de los metales y en consecuencia al valor adoptado para la toesa traída de París, en la que se apoyaban todas las operaciones de medida de la base. Según los cálculos de J. Juan a cada toesa medida de la base de comprobación le correspondía 18.5/100 de línea de dilatación, de modo que a las 6197 toesas le corresponderían 7 pies y 11,5 pulgadas, que restadas a la diferencia entre la base inducida y medida resultaba ser 1 pie y 10,5 pulgadas, valor pequeño después de una serie de triángulos tan larga.

Podemos decir que la influencia de la dilatación de los metales resultó despreciable en las operaciones geodésicas, aunque los expedicionarios tuvieron la precaución de estudiar esta posible fuente de error en profundidad. Los materiales que utilizaron para estudiar cómo afecta la temperatura a la dilatación fueron: hierro pulido, acero, cobre batido, latón forjado, latón fundido, tubo de vidrio y un pilar de piedra¹⁰⁵.

4.1.3. Primera formulación de resultados

4.1.3.1. Sobre las observaciones de la triangulación

Como ya hemos comentado en epígrafes anteriores el instrumento básico utilizado en la triangulación estaba formado por una sustentación de hierro

¹⁰⁵Páginas 91 y 92 de Observaciones astronómicas y físicas hechas por orden de S. Mag. en los Reynos del Perú de las cuales se deduce la figura y magnitud de la tierra y se aplica a la navegación, Juan y Santacilia, Jorge & Antonio de Ulloa, Juan de Zúñiga, Madrid. 1748.

con cuatro patas dotadas de tornillos de anclaje nivelantes, sobre la que se estacionaba el cuadrante (de dos pies de radio en el caso descrito: 65 cm. aproximadamente) con limbo de latón en el que se grababan las divisiones y anteojo astronómico de colimación y lectura (ocasionalmente dos). Podían realizarse colimaciones en plano horizontal y vertical desde cenit a nadir, rotando adecuadamente limbo y anteojo.

Todo ello define un aparato al que cualquier operador de campo moderno exigiría a lo menos, con firmeza pero con muy poco éxito; a) estabilidad de la armadura metálica, b) perpendicularidad y paralelismo de ejes y planos de colimación, c) correcto y sobre todo, homogéneo, divisionado del limbo. Cuanto menos para poder aplicar antes de cada estación el protocolo imprescindible de verificaciones y correcciones que aseguren la eliminación o compensación de toda una larga serie de errores sistemáticos posibles. Es pura doctrina geodésica ineludible.

Agreguemos las características inherentes al trabajo en plenos Andes, en estaciones diurnas a distancias de más de veinte kilómetros sobre señales que llevan al límite la visibilidad de punterías y el alcance y capacidad de anteojos y observadores, o nocturnas sobre hogueras, y astronómicas desde cabañas en las condiciones extremas que se reflejan en la Fig.4.7. Entonces no había alternativa.

Como consecuencia de lo expuesto, resulta inaplicable a nuestro entender conseguir, siquiera sea para la triangulación aislada, un vector de observables angulares suficientemente libre de errores sistemáticos como para poder aplicar un análisis moderno riguroso que requiere el cumplimiento previo de la hipótesis básica según Gauss-Markov, veremos en seguida. Y en sana práctica geodésica, un buen vector de observables cuidado es condición imprescindible para alcanzar buen fin.

$R \sim N(0, s^2Q)$ = distribución normal del vector de residuos o correcciones

$$\text{Con } C = OT + R$$

Siendo: OT = vector de observables promediados, C = vector de observables compensados, R = vector de correcciones, s^2 = factor de varianza, y Q = matriz cofactor de varianzas de observables y correcciones.

Y ya todo va bien, por lo que puede aplicarse el algoritmo de cuadrados

mínimos y toda la doctrina de recintos de error bien conocida¹⁰⁶, tanto a priori, en fase de proyecto, como a posteriori, en control y contraste de resultados.

Es bien cierto que nuevas tendencias en investigación geodésica han desarrollado últimamente la teoría de los tests llamados robustas, con un condicionado previo menos exigente. Pero su poder de afirmación aún es a lo menos opinable y el método descrito, consagrado por innumerables aplicaciones, no lo es. Además y sin entrar en discusiones que no son de este lugar, para los efectos perseguidos y teniendo en cuenta que creemos haber llegado por el camino que luego se verá a una ampliación original del método que podemos llamar clásico con un resultado razonablemente satisfactorio, preferimos continuar manteniéndolo en nuestra argumentación.

Para quien no esté familiarizado con la notación y algoritmos citados, basta con entender que, como resumen, encontramos muy difícil, quizás imposible, la aplicación rigurosa y directa de criterios geodésicos del siglo XXI para el trabajo de Jorge Juan y sus compañeros de Comisión. Pero que hemos conseguido de alguna manera según luego se expondrá adaptarlos específicamente, desarrollando algunas ideas originales, y vamos a ello.

Y que, desde luego, nos descubrimos ante el titánico trabajo realizado por Jorge Juan y sus compañeros, realmente al límite de lo imposible. Tal vez sea una constante histórica permanente la exigencia de llevar recursos humanos, métodos e instrumentos siempre a la frontera de sus posibilidades teóricas y prácticas. Ahora también sucede.

4.1.3.2. Los resultados

Ultimado el trabajo de la Comisión, las circunstancias que concurrieron en el trabajo, disensiones en el equipo francés especialmente incluídas, dieron lugar a que se disponga de cinco resultados distintos. Tal vez deberían considerarse cuatro, pues Jorge Juan y Antonio de Ulloa colaboraron siempre y no tuvieron enfrentamiento alguno. Pero es bien cierto que sus resultados fueron los más cercanos al promedio de conjunto, fueron adoptados como definitivos por todos y merece la pena considerarlos por separado, con lo que adquieren

¹⁰⁶Puede consultarse para mejor información: Manuel Chueca - Herráez - Berné. "Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia". Editorial Paraninfo. Madrid 1996. Chueca - Anquela - Baselga "Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño". Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 2007. Chueca-Berné. Anquela-Baselga. "Avances en la interpretación de resultados en redes locales. Recintos de error." Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 2002.

un justificado peso doble. Dice mucho a favor de la honestidad profesional de los académicos franceses y de la categoría científica de los representantes españoles que, al final, fueran sus cifras las que prevalecieran. A pesar de su corta edad y falta de experiencia ...

En consecuencia puede establecerse el cuadro que sigue¹⁰⁷, que expresamos en toesas y metros, con una equivalencia de 1,95 metros por una toesa.

	<i>Louis Godin</i>	<i>Jorge Juan</i>	<i>Antonio de Ulloa</i>	<i>Pierre Bouguer</i>	<i>La Con-damine</i>
<i>Longitud del arco</i>	195776,5	195725,4	185743,7	176873,3	176887,0
<i>Valor del arco</i>	3°26'46"4	3°26'53"	3°26'52"5	3°07'01"	3°07'01"
<i>Valor del grado</i>	56809,1	56764	56771,6	56745,6	56750
<i>Valor adoptado</i>	56810	56767,8	56767,8	56753	56750
<i>Valor medio</i>			56767,8		
<i>Desviac. media</i>			22,63		
<i>Error medio</i>			0,04 %		

RESUMEN:

Longitud de arco de 3° /promedio: 186201,00 toesas <> 363092,0 metros

Longitud de arco de 1° /promedio: 56769,70 toesas <> 110701,0 metros (1)

Longitud de arco de 1° adoptado: 56767,80 toesas <> 110697,0 metros (2)

¹⁰⁷Y que tomamos de dos fuentes, Lafuente y Delgado "La geometrización de la Tierra" pg. 257 Opus cit. y Lafuente y Mazuecos "Los caballeros del punto fijo" pg. 185. Es destacable que los últimos consignan en la casilla correspondiente el valor medio aritmético 56769,78 toesas. Los primeros, directamente el valor de Jorge Juan, que nosotros también aceptamos.

Desviación típica media: 22,63 toesas $\langle \rangle$ 44,1 metros

Porcentaje de error temible: 0.04 %

Y a pesar de que existen toda clase de indicios que inducen a considerar que estamos frente a un trabajo de excepción, podría ser que los estimadores calculados, considerados desde nuestra perspectiva actual, dieran en sesgados y/o poco consistentes y la muestra de cinco valores descentrada y menos fiable, por las toscas condiciones de instrumentación y carencias teóricas que hemos señalado anteriormente. No disponemos aún además de información de probabilidad y recintos de error, y por todo ello dejamos aparcado aquí el desarrollo, que reemprenderemos más adelante, hasta su conclusión final.

4.2. La Misión a Laponia

La expedición francesa, al mando de Pierre Louis Moreau de Maupertuis se inició en Dunkerque levando anclas con rumbo a Estocolmo el 2 de Mayo de 1736¹⁰⁸, donde llegan el 21 del mismo mes. Desde allí ponen rumbo a Tornea, ciudad situada en el Golfo de Böttnia, desembocadura del río del mismo nombre a 66° de Latitud Norte, región de la Laponia Noruega, frontera con Finlandia, lindando por el Sur con el Círculo Polar Ártico¹⁰⁹. Allí desembarcan el 18 de Junio de 1736, establecen su base de operaciones principal en la isla de Swentzar, desembocadura del Tornea e inician los trabajos.

Durante algo menos de un año triangulan y miden algo menos de un grado de Meridiano, entre Tornea y la ciudad de Kittis, aproximadamente a 67° de Latitud Norte. La amplitud, medida por observación astronómica de latitud a las estrellas α y δ Draconis, se discutió ampliamente antes y después del viaje, estableciéndose como cifra más fiable en 57'28"3/4 de arco¹¹⁰. Ultimadas las operaciones se inicia el tornaviaje a Francia en 9 de Junio de 1737. Fig. 4.37. La expedición estaba compuesta por su jefe el citado Pierre de Mauper-

¹⁰⁸Pierre Louis Moreau de Maupertuis "Discours qui a été lu dans l'Assemblée Publique de l'Académie Royale des Sciences le 13 Novembre 1737". También "Sur la figure de la Terre", mismo autor.

¹⁰⁹Latitud de los círculos polares Ártico y Antártico, 66°39' Norte y Sur respectivamente.

¹¹⁰Lafuente y Mazuecos "Los caballeros del punto fijo" Opus cit. pg 74 y sig. La duda procedía de la influencia del fenómeno de aberración de las estrellas fijas, entonces poco conocido, que podía afectar en casi un minuto.



Figura 4.37: Localización Geográfica y esquema de triangulación del arco de Laponia

tuis¹¹¹, prestigioso matemático y académico, los también académicos Alexis Claude de Clairaut¹¹², Charles Etienne Louis Camus¹¹³, y Pierre Charles Le Monnier¹¹⁴, el abate Reginaud Outhier¹¹⁵, y el célebre físico sueco Anders Celsius¹¹⁶.

El origen y la conexión del grupo hay que buscarlo en la facción de “los jóvenes geómetras” que alentaba Maupertuis en la Academia, partidarios de las ideas newtonianas frente a las cartesianas. “Son, en efecto, los jóvenes geómetras, tanto de Francia como de los países extranjeros, los que han decidido la suerte de las dos filosofías”¹¹⁷. Entre los miembros extranjeros estaba Celsius, además de Boscovitch y, en especial, Euler. Ferviente partidario de dicha corriente de opinión era, como hemos visto, Voltaire, que se proclamaba discípulo y seguidor. “Soy su prosélito y pongo mi profesión de fe en vuestras manos”, escribía a Maupertuis¹¹⁸.

¹¹¹Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698 – 1759). Matemático, físico, filósofo. Discípulo de Bernouilli en Basilea. Primer académico francés defensor de las tesis newtonianas. Propone el Principio o Ley Física de la Mínima Acción. Autor de “Sur la figure de la Terre” (1738), “Eléments de Geographie” (1742), “Astronomie Nautique” (1746) ... y muchas más publicaciones, incluyendo una incursión en la Biología y la herencia genética titulada “Venus Physique” con pintorescas connotaciones eróticas. Aclamado y admirado, aceptó el ofrecimiento de Federico el Grande para fundar y presidir la Academia de Ciencias de Berlín (1746). La Guerra de los siete años entre Prusia y Francia le llevó a una situación difícilísima que no pudo sortear. Se retiró en 1757 al sur de Francia, pero se vió obligado a volver a Basel (Prusia), donde falleció entre la indiferencia general.

¹¹²Alexis Claude de Clairaut, (1713 – 1765) . Matemático y físico precoz. Académico desde los dieciséis años con su trabajo sobre curvas alabeadas “Recherches sur les courbes a double curvature”, publicado dos años después (1731). “Theorie de la Figure de la Terre” (1743), a la vuelta de Laponia es una síntesis del conjunto de trabajos realizados. Uno de los más caracterizados “jóvenes geómetras” de Maupertuis, defensores de la escuela de Newton.

¹¹³Charles Etienne Louis Camus (1699 – 1768), matemático, arquitecto y mecánico, miembro, o “Fellow” de la Royal Society de Londres. Publicista sobre temas matemáticos, destacando su excelente “Cours de mathematiques” (1766), fruto casi póstumo de su larga experiencia científica.

¹¹⁴Pierre Charles Le Monnier (1715 – 1799). Astrónomo, geodesta y matemático, hijo del matemático del mismo nombre. Astrónomo “de cámara” de Luis XV. “Historia Celeste” (1741). “Theorie des cometes” (1746), “Institution Astronomique” (1746).

¹¹⁵Reginaud Outhier (1694 – 1774). Sacerdote francés, astrónomo y artista. Autor “Journal d’un voyage au Nord de 1736 a 1737”, (1744) en que narra con abundantes ilustraciones la historia de la expedición y sus aventuras.

¹¹⁶Anders Celsius (1701 – 1744). Matemático, astrónomo, y sobre todo, físico sueco de fama mundial. Profesor en la Universidad de Upsala. Director en 1740 del Observatorio de dicha ciudad. Inventor de la escala centígrada del termómetro, a la que dio su nombre.

¹¹⁷J.R.D’Alembert “Discurso preliminar de la Enciclopedia” (1751). Lafuente y Mazuecos. “Los caballeros del punto fijo” Opus. Cit. Pg. 48.

¹¹⁸Ibidem. “Los caballeros...” pg. 242, nota 64.



DISCOURS
QUI A ETE LU
DANS L'ASSEMBLEE
PUBLIQUE
De l'Académie Royale des Sciences,
Le 13 Novembre 1737.
**SUR LA MESURE DU DEGRE
DU MERIDIEN
AU CERCLE POLAIRE.**

JEXPOSAT, il y a dix-huit mois, à la même Assemblée, le motif & le projet du Voyage au Cercle Polaire; je vais lui faire part aujourd'hui de l'exécution. Mais il ne fera peut-être pas inutile de rappeler un peu

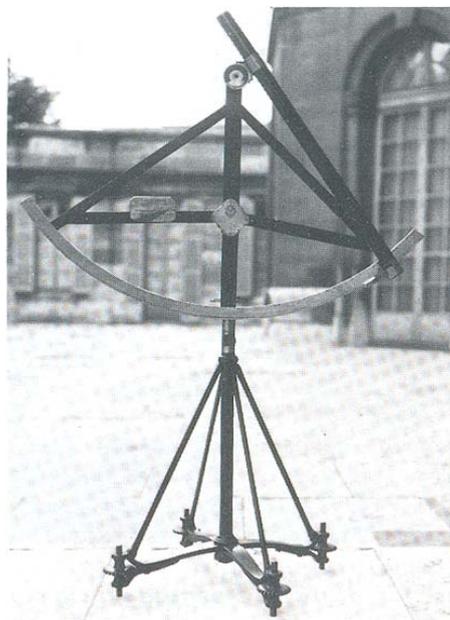


Figura 4.38: Discurso de Maupertuis ante la Academia de Ciencias de París. Y el cuadrante utilizado en los trabajos geodésicos

Y así nos encontramos en la curiosa situación de que a Voltaire y a quien no era Voltaire, por ejemplo La Condamine y la mayoría de la opinión pública francesa, en 1734 le fascinaba la arrolladora juventud de Clairaut (21 años) y de Le Monnier (19 años), expedicionarios científicos polares, y abominaba de la de Jorge Juan (21 años) y Antonio de Ulloa (19 años), expedicionarios científicos ecuatoriales. Posiblemente sería una cuestión de clima.

Aunque por paradójico que parezca, los viajeros al Ecuador se quejaban amargamente de ventiscas, tormentas y frios glaciales en los Andes, mientras que en Laponia, Celsius escribía a Delisle "... una prodigiosa cantidad de camaradas nos ha incomodado más que ninguna otra cosa. Los insectos aquellos nos han picado el rostro y las manos de forma cruel..."¹¹⁹. A veces es difícil averiguar a qué carta quedarse. En principio, el trabajo encomendado a la Misión Lapona era el mismo que a la Misión Ecuatorial y la metodología a seguir e instrumentación a utilizar, idénticas. Solamente difiere y mucho la interpretación práctica que se dio al proyecto, cuya responsabilidad ha

¹¹⁹Reginaud Outhier "Journal d'un voyage au Nord de 1736 a 1737". Correspondencia de Celsius a Delisle. Tornea, 20 de Noviembre de 1736.

de atribuirse a Maupertuis. Así, la medición de tres grados de amplitud de arco practicada por Jorge Juan y sus compañeros se sustituyó por un solo grado, las cinco valoraciones independientes también por una sola, y en consecuencia los nueve años de trabajos se redujeron a una campaña de un año escaso. Comparativamente es lícito considerar que la Ley de la Mínima Acción descubierta por Maupertuis fue aplicada en su versión de Mínimo Esfuerzo.

De vuelta a París, ante el Pleno de la Academia reunido y con una expectación que desbordaba con mucho el ámbito científico, Maupertuis leyó su famoso discurso de 13 de Noviembre de 1737¹²⁰. Fig. 4.38. En 1738 lo publicó, corregido y aumentado, en forma de libro y con el título “Sur la mesure de la Terre”. No hemos tenido acceso a la totalidad de la segunda obra, pero nos atrevemos a escribir que la primera es una magnífica narración con un contenido científico que a lo menos puede calificarse de escaso y poco riguroso, aún teniendo en cuenta el nivel de conocimiento de la época, y sobre todo si se compara con las “Observaciones” de Jorge Juan y Ulloa.

En cualquier caso y como la conclusión era taxativa, cifrando y describiendo el esferoide terrestre como un elipsoide oblato, Voltaire tuvo ocasión de escribir su famoso juicio “Os felicito, señor, habéis aplastado a la Tierra y a Cassini”.

Sin embargo, la opinión oficial, la facción de los Cassini, y buena parte de la opinión pública seguían siendo cartesianos. Funcionaban las maniobras y el juego sucio y no vamos a entrar en su descripción, pero sí puede dar cumplida idea de la situación la carta que nuestra conocida Madame Châtelet-Lamon escribió al ilustrado italiano Francisco Algarotti en 10 de Enero de 1738. Entre otras cosas, contaba lo siguiente: “En este país se considera heréticos a los newtonianos. Conocéis sin duda el regreso de Mr. De Maupertuis, la exactitud y belleza de sus operaciones.... las fatigas que ha experimentado... la recompensa a tanta exactitud y tantas fatigas ha sido la persecución. La vieja Academia se ha sublevado contra él, Mr. De Cassini y los jesuitas, que como sabéis han encontrado en China la Tierra alargada se han puesto de acuerdo.... Han intentado mil dificultades para impedir la impresión de la relación de su viaje y de sus operaciones....Se le han dado pensiones tan mediocres que Mr. De Maupertuis¹²¹ ha rechazado la suya y rogado que sea

¹²⁰Maupertuis. “Discours qui a été lu dans l’Assemblée publique de l’Académie Royal des Sciences le 13 Novembre 1737 sur la mesure du degré du méridien au cercle polaire”. Hemos obtenido de la web una versión completa facsímil.

¹²¹1200 libras de pensión otorgadas por el Ministro de Marina y Vicepresidente de la Academia Jean Frederic Philipeaux, Conde de Maurepas, promotor inicial de todo el Plan. Claramente insuficientes para acallar a los expedicionarios.

repartida entre sus compañeros...”¹²².

Se desata entre tanto la controversia, sin reparar en la maledicencia, y Maupertuis es satirizado en versos clandestinos que hablan incluso de aventuras amorosas con laponas. Claro que Maupertuis tampoco ayuda mucho, haciéndose retratar vestido a la usanza lapona y aplastando a la Tierra con su mano derecha. Figura 4.39. Ni declarándose enamorado de una joven lapona con la que se pasea por París y posiblemente es el detonante de su distanciamiento con Voltaire, en este caso pintoresco ejemplo de defensor del pudor, la moralidad y la modestia, que le dedica una especie de historia satírica de ciencia ficción con extraterrestres y todo titulada “Micromegas”.

Al final, la verdad científica se impone, Jacques Cassini, afectado de una gran depresión dimite como Director del Observatorio de París. Lo que no impide que le suceda su hijo y después su nieto. Y en medio de todo este Gran Gignol, Maupertuis acepta la oferta de Federico II el Grande, abandona la Academia de París y se traslada a Prusia, donde funda y es el primer presidente de la Academia de Ciencias de Berlín. Estalla finalmente la Guerra de Siete Años entre Francia y Prusia y la situación se hace tan insostenible que busca refugio, primero en el Sur de Francia, y después en Basel (Prusia), donde muere olvidado y desprestigiado en 1759.

Voltaire estalla y resume la carrera profesional de Maupertuis en una frase lapidaria¹²³: “... los viajes al fin del mundo para constatar una verdad que Newton había demostrado en su gabinete han cubierto de dudas la exactitud de sus medidas... usted ha confirmado en lugares aburridos lo que Newton sabía sin salir de casa...”.

No se conserva la opinión sobre todas estas historias de Jorge Juan Santacilia, Geodesta eminente y Caballero de Malta sujeto a celibato por voto solemne. Sería curioso conocerla.

4.2.1. Primera formulación de resultados

El proyecto geodésico completo desembocaba en la comparación del trabajo llevado a cabo por las dos comisiones. Esencialmente, cada una debía ofrecer un resultado cifrado de la longitud rectificada del arco de un grado de meridiano a la latitud de su trabajo específico. La diferencia entre ambos valores resolvía en los términos que sabemos el problema propuesto. El elipsoide

¹²²El texto francés puede leerse en Lafuente y Delgado “La Geometrización...”. Opus cit. pg 27.

¹²³Voltaire “Le Siecle de Louis XV”. Oeuvres Completes. Hachette. Paris 1953.

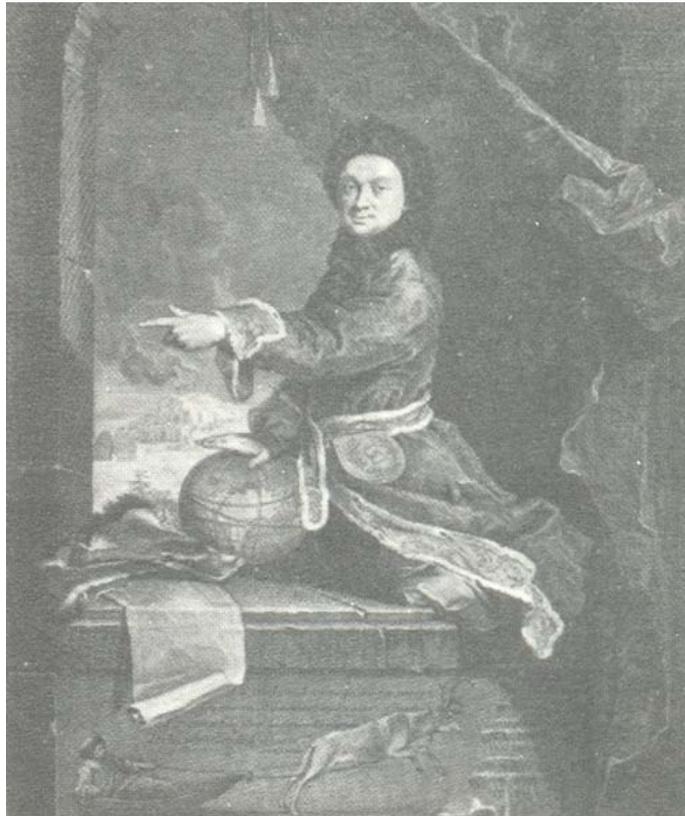


Figura 4.39: Maupertuis, con indumentaria lapona, aplastando el Globo Terrestre

terrestre sería oblato si el arco septentrional era más largo que el austral. Pro-lato en caso contrario. Y evidentemente, era absolutamente imprescindible que ambas mediciones fueran homogéneas y tuvieran la misma calidad técnica para que pudieran dentro de un exigible rigor científico ser comparadas entre sí. Sobre todo, había que evitar que el margen de error conjunto de la operación fuera mayor que la distancia a apreciar, con un poder de afirmación suficiente. Y ello requería poder calcularlo, predecirlo y comprobarlo rigurosamente.

Como hemos visto, desgraciadamente, no era el caso. Dificultades e insuficiencias, hasta carencias ocasionalmente, en instrumentos y metodología asequible situaban el trabajo al borde mismo de las posibilidades del momento en doctrina y praxis. Y además, frente al excelente trabajo del arco ecuatorial de Jorge Juan y sus compañeros, el arco septentrional de Maupertuis y los suyos presentaba serios defectos comparativamente inocultables que no resistían un análisis somero. Pronto saltaron a la vista.

Sea como fuera, es preciso abordar la cuestión y para ello nada mejor que reproducir la propia argumentación de Maupertuis. Literalmente es la que sigue, tomada de la edición facsímil de su Discurso de 13 de Noviembre en la Academia:

“El pequeño número¹²⁴ de nuestros triángulos permitía realizar un cálculo singular y ofrecer los límites más rigurosos de todos los errores que las mayores desgracias reunidas pudieran acarrearlos. Habíamos supuesto que en todos los triángulos a partir de la base se cometiera un error de 20” en dos ángulos y de 40” en el tercero, y que todos los errores afectasen en la misma dirección, **tendiendo a disminuir la longitud de nuestro arco**¹²⁵. El cálculo efectuado a partir de tan extraña suposición no encontraba más de 54,5¹²⁶ toesas para el error que se pudiera causar. La atención con que se había medido la base no nos permitía duda alguna. El acuerdo de gran número de personas inteligentes que escribieron separadamente el número de perchas y la repetición de esta medida con 4 pulgadas solamente de diferencia configuraban una seguridad y una precisión superflua (sic). En cuanto al resto de nuestro examen respecto a la amplitud de nuestro arco, la pequeña diferencia que se encontraba entre nuestras observaciones tanto en Kittis como en Tornea no dejaba nada a desear en cuanto a la metodología de observación.”

Seguidamente afirma que la calidad de la instrumentación es incontestable,

¹²⁴Ocho. Formando un heptágono irregular. Regularmente conformados. Puede aceptarse, con reservas, un valor promedio de lado de 25 km. similar al de la cadena ecuatorial.

¹²⁵la letra negrita es nuestra

¹²⁶106,3 metros.

tanto en reglas como en cuadrantes y sus respectivos accesorios y partes componentes.

Y termina formulando su valor para la longitud rectificada del arco de un grado en Laponia, que es de

57437 toesas <> 112004 metros. (p.e.)

“...377 toesas (735 metros) mayor que el arco medido por Mr. Picard entre París y Amiens, que era de 57060 toesas (111267 metros)...”

Se extiende a continuación en consideraciones sobre defectos observados en las mediciones realizadas por los Cassini, los evalúa con resultados muy favorables a su tesis, y termina con su conclusión definitiva:

“Por lo tanto, es evidente que la Tierra está considerablemente aplastada hacia los Polos”.

Capítulo 5

Actuaciones geodésicas posteriores hasta nuestros días

Hemos dejado pendiente la aplicación de técnicas de interpretación del siglo XXI a las mediciones de Jorge Juan y sus compañeros, y vamos a ello. Pero de la misma manera que antes de llegar a las mediciones de Perú y Laponia nos pareció ilustrativo para su mejor comprensión extendernos sobre sus antecedentes, es complemento obligado hacerlo ahora sobre los trabajos básicos realizados en los siglos XIX y XX.

En verdad, si había algo claro era la necesidad de seguir investigando, trabajando, realizando más y mejores mediciones, y progresando en rigor y calidad tanto en doctrina como en instrumentación. Y en este último aspecto, era de máxima prioridad conseguir un Sistema Métrico eficiente, con unas unidades reproducibles e inalterables. Se anunciaba el Sistema Métrico decimal.

Con la debida discreción, pero con firmeza el académico Delambre¹, autoridad indiscutible en la época, escribe su obra “Grandeur et Figure de la Terre”², en la que reflexiona sobre la posibilidad de que el arco del norte no alcanzara la precisión defendida por Maupertuis. Y de hecho, poco a poco cayó el descrédito sobre unas observaciones que resultaban más que discutibles. Delambre ensayó formular un elipsoide con los datos de las dos comisiones y

¹Jean Baptiste Joseph Delambre (1749 – 1822). Máxima autoridad en Metrología y Geodesia en la época. Miembro de la Academia, presidió la Comisión del Sistema Métrico Decimal y ordenó e intervino personalmente en la prolongación y medición del meridiano de París hasta Barcelona y Valencia, auxiliado por Pierre Mechain. Director del Observatorio de París, caballero de la Legión de Honor, su curriculum geodésico, astronómico y matemática es interminable.

²Jean Baptiste Joseph Delambre “Grandeur et figure de la terre”. Hay una edición de Gauthiers-Villars de París publicada en 1912 no imposible de encontrar.

el resultado fue poco satisfactorio. Posiblemente fue el primero en ser consciente de que, si la calidad del trabajo de la Comisión de Maupertuis hubiera sido parejo al de la de Jorge Juan, el escenario hubiera cambiado de forma radical³.

Como era de esperar, las dos misiones descritas sirvieron de estímulo para toda una serie de observaciones geodésicas, luego continuadas durante los siglos XIX y XX, que si bien no tuvieron tanta repercusión en el gran público, contribuyeron eficazmente a que se comenzase a comprender que la figura de la Tierra era asimilable al elipsoide oblató y que las montañas inducían desviaciones de la vertical⁴, tal como ya había constatado Bouguer durante sus observaciones en las inmediaciones del Chimborazo. A ese conjunto de medidas pertenecen la reobservación del meridiano de París y la del paralelo del Brest, París y Estrasburgo, en las que La Caille (1713- 1762) ideó un nuevo método para medir las diferencias de longitudes, mejorando otro previo debido a Jacques Cassini y su hijo Cassini de Thuury, confirmándose con ambas la hipótesis newtoniana. La comprobación de que el aplanamiento polar era simétrico la realizó también La Caille, durante su viaje al Cabo de Buena Esperanza (1752) para practicar observaciones astronómicas y para medir la distancia de la Tierra a la Luna en colaboración con Lalande, otro astrónomo francés que se desplazó a tal efecto a Berlín. Una vez en el Cabo, mediante una triangulación compuesta por cuatro triángulos, apoyados en una base de 6467,25 toesas, calculó el desarrollo del grado, a una latitud

³Ensayo de elipsoide Perú-Laponia Particularizando para $\varphi = 0^\circ$ y $\varphi = 66^\circ$ en la expresión de ρ y escribiendo $\rho \cdot d\varphi = \text{arco rectificado}$, con $d\varphi = 0,0174253 = \text{arco de } 1^\circ \text{ en radianes}$ y los valores en metros adoptados por ambas Comisiones, se sigue el sistema

$$a \cdot (1 - k^2) \cdot 0,0174253 = 110697$$

$$a \cdot \frac{1-k^2}{(1-k^2 \text{sen}^2 66^\circ)^{3/2}} \cdot 0,0174253 = 112003$$

Que se resuelve inmediatamente, resultando:

Excentricidad = $k = 0,0966$ Semieje mayor $a = 6.412.551$ metros

Semieje menor = $b = 6.382.561$ metros

Distancia focal = $c = 619.452$ metros

Aplanamiento = $(a-b)/a = 1/214$

Puede comprobarse fácilmente que los datos de Jorge Juan (Perú) por separado satisfacen cualquier exigencia de la época e incluso moderna. Los de Laponia degradan el resultado final.

⁴La desviación de la vertical es el ángulo formado por la vertical física (línea de la plomada) y la normal al elipsoide. Este fenómeno de la desviación de la vertical ya había sido anunciado también por Newton, quien señaló como causa la falta de homogeneidad de la corteza terrestre.

media de $33^{\circ}18'$ Sur, resultando ser de 57037 toesas⁵. Puede decirse que con esta expedición de La Caille finalizó la controversia del aplanamiento al inclinarse definitivamente la balanza del lado de los newtonianos.

A pesar de que la opinión científica comenzó a ser unánime a partir de entonces, las medidas de grado continuaron durante casi doscientos años más en orden a afinar resultados y definir elipsoides generales y locales. Entre ellas deben destacarse las del jesuita croata Boscovitch (1711-1787) entre Roma y Rimini, durante el año 1754, con el resultado de 56973 toesas para el grado y las realizadas por los ingleses Mason y Dixon en el paralelo $39^{\circ}43'$, con un desarrollo cercano a las 233 millas, para resolver los conflictos fronterizos entre propietarios de Pennsylvania y Maryland, en América del Norte, obteniendo la equivalencia entre 1° y 56888 toesas. También son dignas de mención las que hizo Maskelyne (1732-1811), en Escocia, en los alrededores del Monte Schiehallion, contando con la colaboración de Cavendish. Ante la proliferación de medidas, en algún caso inconexas, D'Alembert y Delambre⁶ reforzaron su insistencia en la necesidad de resolver de una vez por todas y con precisión y rigor científicos, no la definición geométrica básica, que ya era admitida, sino el problema métrico de cifrado de la figura conjunta o zonificada de la Tierra, afirmando que sobre todo a escalas grandes estaba todavía muy lejos de resolverse.

Además y como hemos indicado, la ambigüedad y difícil materialización de las unidades de medida existentes, y concretamente las de longitud, habían en realidad generado la aparición de una nueva, la llamada "toesa del Perú" o "toesa de la Academia", con la utilización por los expedicionarios de los dos patrones de que antes nos hemos ocupado, lo que no contribuyó precisamente a aclarar las cosas. Se imponía una unificación con vocación universalista, se creó una Comisión por la Academia de París a la que pertenecían las mejores

⁵Un valor erróneo ya que estaba afectado por la desviación de la vertical, según pudo comprobar años después el geodesta inglés Everest (1790-1866).

⁶Ambos sospechaban por otra parte que dicha figura dependería de la constitución interna del planeta, de su estratificación en capas, de su grado de fluidez, de su historia. Siendo consciente de los resultados de sus propios trabajos y de los previstos para los que estaba desarrollando, añadió que había que saber y esperar hasta que el tiempo procurase nueva luz. La luz llegaría parcialmente a comienzos del siglo XIX con las aportaciones de Gauss (1777-1855), y Helmert (1843-1917), a los que se debe la introducción del geode del campo gravitatorio y por tanto perpendicular en todos sus puntos a las correspondientes verticales físicas. Mucho más reciente es la ampliación del conocimiento geodésico auspiciado por la era espacial y el consiguiente apogeo de una nueva rama de la Geodesia: la Geodesia global o de satélites, que sin embargo ha venido a comprobar la bondad de los métodos clásicos al evaluar los semiejes y coeficiente de aplanamiento del elipsoide y a concretar, en gran medida, la posición relativa de dicha superficie matemática y de la superficie física del geode.

cabezas pensantes de la época (Laplace, Lagrange, Monge,..etc) y se decidió volver sobre el meridiano de París, prolongando su medición hacia el Sur en el eje Dunkerque – Paris - Barcelona (1791)⁷, encargándose del trabajo el propio Delambre, ayudado por el eminente geodesta Pierre- François André Mechain.

Empezaba a hablarse de una nueva unidad de longitud materializable en una parte alícuota de un arco de meridiano. Tal vez “la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano”. En 1803 se decide ampliar la triangulación desde Barcelona por la costa hasta Valencia en el Montgó y enlazar con Ibiza. Mechain emprende el viaje y no llega a ultimar su trabajo porque fallece el 19 de Septiembre de 1804 de fiebres palúdicas en Castellón, en el palacio del Barón de la Puebla Tornesa, aristócrata ilustrado y muy versado en Astronomía que le acogió, ayudó y atendió durante todo el viaje⁸. En 1808, en plena guerra de la Independencia, entre todas las peripecias imaginables y a pesar de ellas, Jean Baptiste Biot y Dominique François Arago consiguen

⁷Las áreas de Dunkerque y Paris se localizan ambas entre los 2° y 3° de Long. E. Barcelona entre los 5° y 6° de Long. E. Los responsables de la operación fueron Mechain (1744, 1804) y Delambre (1749, 1822), el cual se convertiría más adelante en su artífice principal. Aunque los trabajos comenzaron a finales de Junio del año 1792, tuvieron que suspenderse ante el paréntesis obligado de la Revolución. Reanudados en 1795, año en que se vuelve a crear la Comisión, los dos astrónomos franceses pudieron continuar su tarea ininterrumpidamente, Delambre se responsabilizó de la parte septentrional y Mechain del segmento más meridional (de hecho inició sus trabajos en Barcelona). La observación de la cadena triangulada, que constaba de 94 triángulos, se prosiguió a partir de 1795 en el punto en que se había suspendido, ultimándose los trabajos de campo en 1798. La determinación de la latitud se logró tras observar varias estrellas que culminaban prácticamente en el cenit de las estaciones, con la disminución consabida de la refracción, sin embargo observaron además las culminaciones de otras estrellas circumpolares, como la Polar, teniendo en cuenta las correcciones necesarias. La orientación de la cadena y su control se logró calculando el acimut astronómico, de varios de sus lados, en cinco estaciones: Watten, París, Bourges, Carcassonne y Montjuich, evidenciándose al transmitirlo la calidad de las observaciones. Quedaba pendiente la difícil cuestión del coeficiente de aplanamiento, imprescindible para conocer el desarrollo del cuarto de meridiano. Para ello se compararon los desarrollos de grado obtenidos:

Dunkerque – París.....(57082,61 T)
 París – Evaux.....(56978,03 T)
 Carcassonne – Montjuich.....(56946,62 T), con los previamente conocidos.

Delambre se decidió por el arco de Bouguer aunque no propusiera el coeficiente de aplanamiento así hallado $\alpha = 1/315$ sino otro modificado $\alpha = 1/308$. No obstante la Comisión Internacional eligió en función de sus cálculos el valor $\alpha = 1/334$. De acuerdo con dicho dictamen resulta que los 10.000.000 metros del cuarto de meridiano equivalían a 5.130.740 toesas. En la actualidad la cifra más utilizada es la de 10.001.957 metros (IERS 89).

⁸José María López Piñero y Victor Navarro Brotons “Història de la Ciència al País Valencià”. Opus. cit. Pg 348 y sig.

llegar triangulando hasta el Montgó⁹.

Finalmente (1811) dos geodestas españoles, el valenciano José Chaix Isniet¹⁰ y el gallego José Rodríguez González terminan la parte mas peliaguda del trabajo enlazando a través del mar Ibiza y Formentera desde el Montgó y el Desierto de las Palmas, con triángulos de ángulos agudos en conformación forzada y largas visuales de hasta 200 Km¹¹. España a través de Valencia y Galicia seguía presente con dignidad en la más avanzada Geodesia Mundial. Fig. 5.1.

⁹Martín López, José “Historia de la Cartografía” Opus. cit. Pg 229. Aragón fue apresado y acusado de espionaje. No obstante, afortunadamente consiguieron ser oídos y volver a Francia sanos y salvos. ¡En plena guerra de la Independencia!. En otra nación tal vez hubieran corrido peor suerte.

¹⁰Ibidem. Pg. 348. Eminent geodesta e ilustrado valenciano. Nacido en Játiva en 1765 estudió en Valencia en la Escuela de Bellas Artes de San Carlos. Becado por el Gobierno Español estudió matemáticas y astronomía en Francia e Inglaterra donde visitó los Observatorios de Oxford, Cambridge, Edimburgo y Glasgow. En París, 1791, fue seleccionado por la Academia de Ciencias con el visto bueno de la Asamblea Constituyente para unirse a la expedición dirigida por Delambre y Mechain encargada de medir el arco de meridiano Dunkerque – Barcelona. A su vuelta fue nombrado Vicedirector del Observatorio Astronómico de Madrid, a las órdenes de Salvador Jiménez Coronado. Por recomendación de Jiménez Coronado fue nombrado Vicedirector de la Escuela de Ingenieros Cosmógrafos fundada y dirigida por este último. Cuando dimitió le sucedió en el cargo de Director. Inspector General del Cuerpo de Caminos y Canales tuvo a su cargo una Cátedra en la Escuela del mismo nombre dirigida por Agustín de Betancourt. Otrosí: Manuel López Arroyo. “El Real Observatorio Astronómico de Madrid”. Ministerio de Fomento. IGN. Madrid 2004. Pag. 28 y sig. “Chaix era sin duda el hombre más brillante (del Observatorio y Escuela de Astronomía) y contaba con el apoyo entusiasta del Secretario de Estado Mariano Luis de Urquijo..... de formación más completa que Jiménez Coronado no soportó de buen grado su dependencia del Abate” (Jiménez Coronado era sacerdote Escolapio). Fecha la muerte de Chaix en 1809, pg. 55. , lo que contradice a Martín López que escribe, según hemos visto, que en 1811 Chaix estaba trabajando en Valencia.

¹¹No se superó la longitud de estas visuales hasta el enlace geodésico España – Argelia, efectuado por el General Ibáñez de Ibero en 1879, con visuales que excedieron los 250 Km. entre el pico Mulhacen y Tetica en España y los vértices Filhausen y M’Sabiha en Africa.

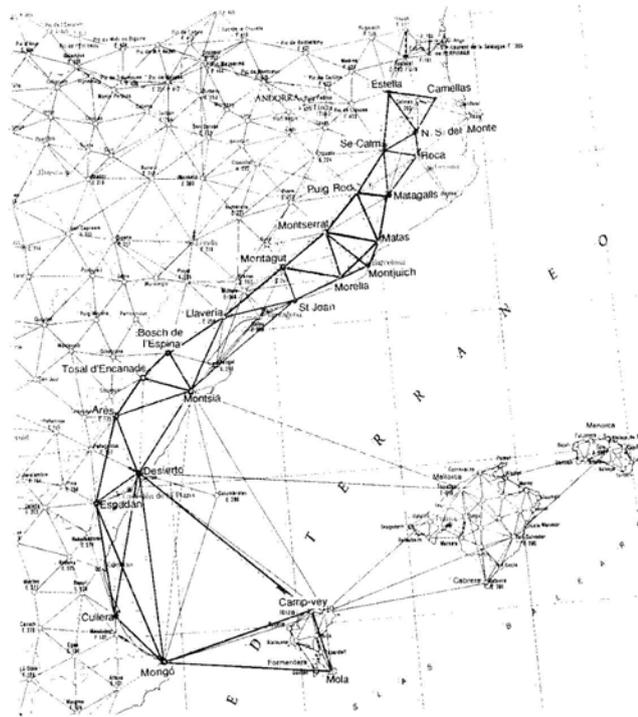


Figura 5.1: La triangulación de Delambre – Mechain – Chaix – Rodríguez. Enlace con las islas Baleares

La medición de la Tierra continuó durante el siglo XIX no solo con el establecimiento de cadenas de triángulos a lo largo de meridianos, sino que esas redes geodésicas se fueron extendiendo paulatinamente hasta cubrir extensiones mucho más vastas. De esa forma, el análisis de la forma de la Tierra dejó de ser lineal para convertirse en zonal, posibilitándose por otra parte una representación verdaderamente fiable de su superficie, con los luego llamados Mapas Topográficos Nacionales, emprendidos por todas las naciones avanzadas. Esas circunstancias explican la creación de la mayoría de las Instituciones Cartográficas a lo largo del siglo. Evidentemente la realidad de los mapas Topográficos y los cálculos previos de las correspondientes redes geodésicas se apoyaron en la aparición de variados elipsoides de revolución obtenidos al comparar, como ya se ha comentado, los diferentes valores de desarrollos específicos zonales de medidas de arco de meridiano.

Es ya otra historia, pero merece la pena recordar que en 1810, y con importante colaboración española y valenciana, Delambre formuló el primer

elipsoide científico que puede llamarse moderno. Sus parámetros son:

Semieje mayor, $a = 6.376.985$ m.

Semieje menor, $b = 6.356.280$ m.

Distancia focal, $c = 513.455$ m.

Aplanamiento = $(a-b)/a = 1/308$

Las cadenas de meridianos y paralelos van estructurando la Geodesia de Primer Orden de las naciones avanzadas europeas y del resto del mundo. No sin dificultades en Francia se promulga en 1809 el estatuto del Cuerpo Imperial de Ingenieros Geógrafos, dependiendo del general director del Depósito de la Guerra. Se nutre de graduados en la prestigiosa Escuela Politécnica de París y se responsabilizan de la confección de la Red Geodésica necesaria para la formación del primer Mapa Oficial de concepción científica rigurosa a escala 1:80.000. Sorteando toda clase vicisitudes se inicia en 1824 y ultima en 1880. La Red de Primer Orden consta de seis cadenas de triángulos según paralelos (Amiens, París, Bourges, Clermont, Rodes y Pirineos) y tres según meridianos (Bayeux, Paris y Sedán) , con bases en Melun, cerca de París, y Perpignan e incluye el enlace con la Red Británica cruzando el Canal de la Mancha, así como con España, Bélgica, Suiza, Alemania, Italia, y desde 1877 con la red siciliana a través de la de Túnez, entonces colonia francesa¹². Fig. 5.2. Más pronto o más tarde, el resto del mundo sigue el ejemplo francés.

¹²Más detalles de cartografía histórica francesa y mundial en M.Chueca – M.J. Jiménez – F.García – M.Villar “Compendio de Historia de la Ingeniería Cartográfica” pg. 243 y sig. Universidad politécnica de Valencia. Valencia 2008.

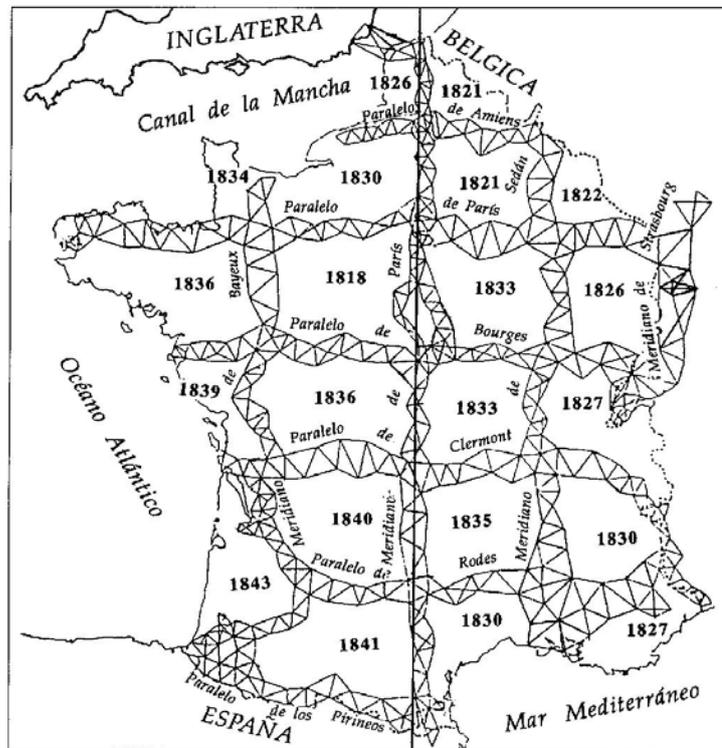


Figura 5.2: Primera Red Geodésica de Primer Orden francesa de cadenas

En España se trabaja, tal vez con desorden pero con mantenida voluntad política. Todo estaba previsto para canalizar el trabajo a través del Nuevo Observatorio Astronómico del Buen Retiro, que albergaba al Cuerpo de Ingenieros Cosmógrafos, de nueva creación, y era dirigido por el sabio sacerdote escolapio Salvador Jiménez Coronado y José Chaix Isnier, del que ya hemos hablado. Pero el 30 de Noviembre de 1808 Napoleón avanza sobre Madrid, se abre paso en Somosierra tras dos cargas suicidas de sus lanceros polacos mandados por el coronel Korjietulsky y lanza al general Senarmont con treinta piezas de artillería sobre el pacífico Parque del Buen Retiro y el más pacífico todavía Observatorio Astronómico, que es literalmente devastado. La joya del Observatorio, el telescopio más potente de Europa, de 25 pies de distancia focal construido por William Herschel según deseos y gestiones de Jiménez Coronado y Chaix Isnier, es quemado. Se conservan como reliquias sus dos estupendos espejos de bronce y unas acuarelas preparadas para su descripción¹³. Fig 5.3. Hasta 1879 no habrá ni Red Geodésica, ni Mapa.

¹³Ibidem pg. 263 y sig. más detalles.

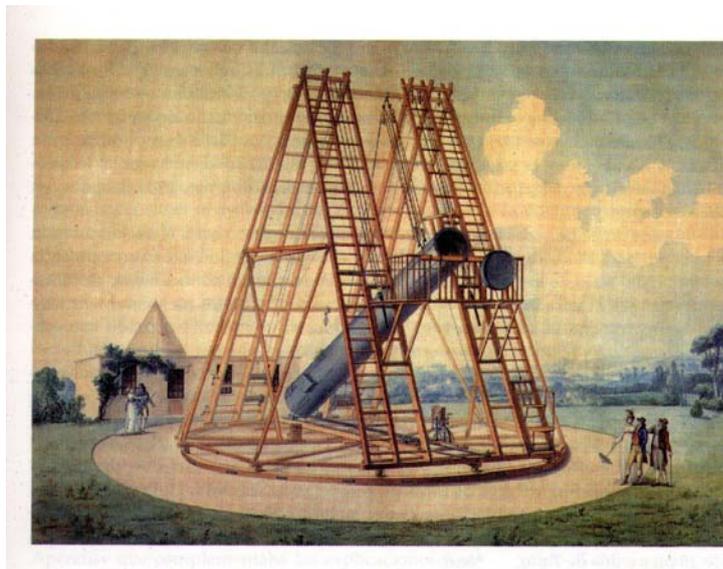


Figura 5.3: El Telescopio Herschel de 25 pies del Observatorio del Buen Retiro. Madrid

A lo largo de todo el siglo XIX y XX se van sucediendo los trabajos geodésicos de medición de cadenas de meridianos y paralelos. Algunos representan verdaderas proezas, de las que destacaremos dos muy especiales. En Europa el mundialmente famoso geodesta Frederick George Wilhelm von Struve (1793 -1864) trabajando al servicio de Rusia dirigió entre 1816 y 1852 los trabajos de medición del arco de meridiano de la entonces Dorpat, ciudad del Imperio Ruso, hoy Tartu (Estonia) a $26^{\circ} 43'$ longitud Este de Greenwich, ingente obra de ingeniería cartográfica, con una longitud de 2.822 km., que se extiende desde el Delta del Danubio, Mar Negro, en Staro-Nekrasovska, cerca de Galati (Rumania) y Ismailov (Moldavia), a $45^{\circ}20'$ de latitud Norte hasta el Océano Glacial Ártico en Hammerfest (Noruega), a $70^{\circ}40'$ de latitud Norte. Ha sido hasta el siglo XX la mayor cadena de triangulación observada por Geodesia Clásica¹⁴. Fig. 5.4.

¹⁴Consta de 258 triángulos de 30 Km. de lado en longitud media, 10 bases medidas y enlaces triangulados a todas las naciones fronterizas.



Figura 5.4: La triangulación del meridiano de Tartu. Monumento en Fugleness (Noruega), estación más septentrional

En Inglaterra en época imperial se extendieron a colonias los trabajos geodésicos. Así, en 1818 el Teniente Coronel William Lambton publica los resultados de medición del arco de meridiano de 78° longitud Este de Greenwich con 10° de extensión, desde el Cabo Comorin hacia el Norte, hasta Damargida a $18^\circ 03'$ de latitud N. El Coronel George Everest (1790-1866), que dio su nombre al pico más alto del Mundo en la Cordillera de Himalaya¹⁵, sucede a Lambton y continúa las labores geodésicas. Revisa y mejora los valores de Lambton y formula el elipsoide local Everest con semieje mayor $a = 6.377.276$ m. y coeficiente de aplanamiento $\alpha = 1:300,8$. Continúa la triangulación de la cadena, que ya se llama “Gran Arco Indio” con una longitud de 2.500 km. hacia el Norte e inicia el resto de las cadenas de meridianos y paralelos que configuran la red. Sir Andrew Scout Waugh, nacido en Madrás, sucede a Everest y prosigue los trabajos entre 1843 y 1861. Le sigue el General Walker hasta 1873, consiguiendo que el Mapa del Subcontinente derivado sea ya en buena parte operativo, completándose y mejorándose ininterrumpidamente

¹⁵Según comunicación de la Royal Society de Marzo de 1856.

en sucesivas campañas. En su conjunto, representa una verdadera hazaña del tesón y la tecnología europea en el mundo del siglo XIX. La fig. 5.5 da una idea del calibre de la empresa. Enmarcado en ella, el monte Everest, en el Himalaya.

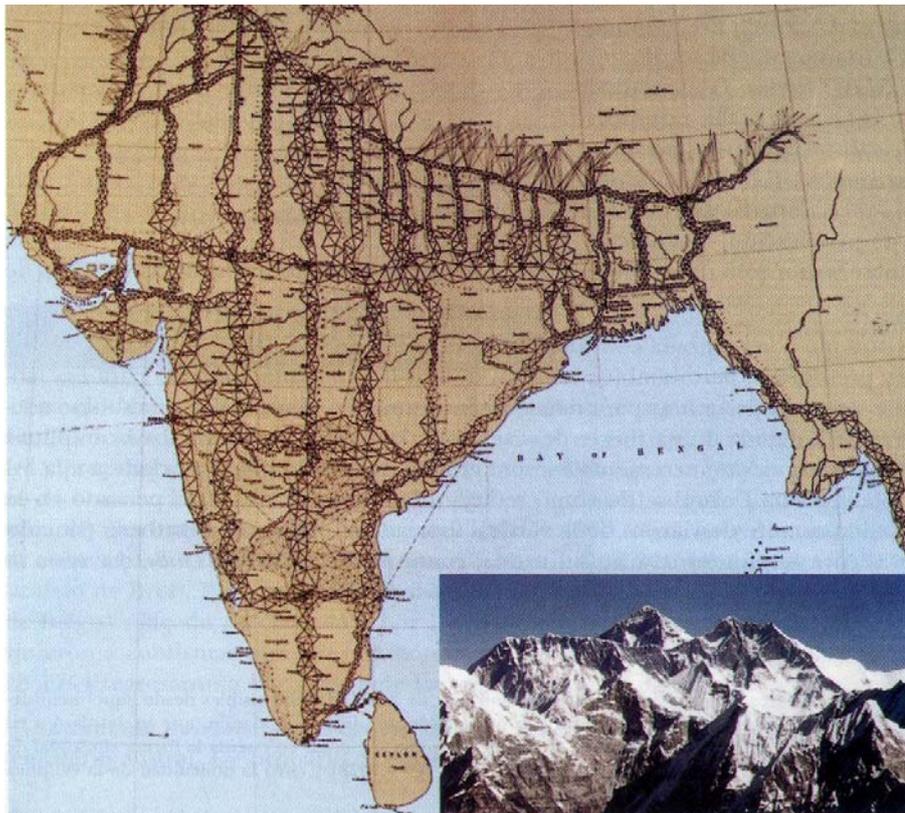


Figura 5.5: El Gran Arco Indio. En recuadro, el macizo del Everest

Y podríamos seguir, en Europa y resto del mundo, en una fascinante sucesión, casi interminable.

Al cabo del tiempo y de tantos trabajos y fatigas, el número de elipsoides es tan numeroso como se muestra en los dos cuadros que siguen referidos a los siglos XIX y XX y por orden cronológico. Y llamamos la atención sobre el WGS (World General System) 84, creado en 1984, operativo a plena actividad en 2009, base del actual sistema de georreferenciación GPS y que destacamos en cuadro aparte y aplicaremos a los trabajos de Jorge Juan y las dos Comisiones de los años treinta en el siglo XVIII.

Año	Autor	Semieje mayor (km)	Aplastamiento	Países en que se usaron
1830	EVEREST	6377.276345	1/300.8017	India, Burma, Ceylan, Malasia (P)
1841	BESSEL	6377.397155	1/299.1528	Europa Central, Chile, China
1849	AIRY	6377.563396	1/299.3249	Gran Bretaña
1858	CLARKE	6378.294	1/294.261	Australia
1860	STRUVE	6378.2983	1/294.73	España, Rusia
1866	CLARKE	6378.2064	1/298.97866982	Norte América
1876	ANDRAE	6377.10443	1/300.0	Dinamarca, Islandia
1880	CLARKE	6378.24917	1/293.465	Francia y Africa

Figura 5.6: Principales elipsoides entre 1830 y 1880

Autor.	Año	Semieje mayor (kms)	$I/\alpha = a/(a-b)$
HAYFORD	1906	6378,28	297,80
HELMERT	1907	6378,20	298,3
HAYFORD	1909	6378,38	297,0
HAYFORD	1910	6378,06	298,2
HELMERT	1915	6378,19	296,7
HEISKANEN	1926	6378,39	297,0
HEISKANEN	1929	6378,40	298,2
KRASOVSKY	1936	6378,21	298,6
KRASOVSKY	1940	6378,24	298,3
JEFFREYS	1948	6378,09	297,10
LODERSTEGER	1951	6378,29	297
A.M.S.	1956	6378,27	297,0
HOUGH	1959	6378,27	297
OXFORD	1959	6378,20	297,65
WGS.	1960	6378,16	298,3
FISCHER	1960	6378,15	298,3
KAULA	1961	6378,16	298,24
KAULA	1964	6378,16	298,25
VEIS	1964	6378,16	298,25
U.A.I.	1965	6378,16	298,25
U.G.G.I.	1967	6378,16	298,24
U.A.I.	1968	6378,16	298,24
FISCHER	1968	6378,15	298,3
W.G.S.	1972	6378,13	298,26
U.G.G.I.	1975	6378,14	298,25
U.G.G.I.	1979	6378,14	298,25
LERCH	1979	6378,13	298,25
U.G.G.I.	1980	6378,13	298,25
W.G.S.	1984	6378,13	298,25
ENGELIS	1985	6378,13	298,25
I.E.R.S.	1989	6378,13	298,25
A.M.S.	Army Map Service de los EE.UU.		
U.A.I.	Unión Astronómica Internacional		
U.G.G.I.	Unión Geodésica y Geofísica Internacional		
W.G.S.	Sistema Geodésico Mundial		
I.E.R.S.	International Earth Rotation Service		

Figura 5.7: Principales elipsoides desde 1900

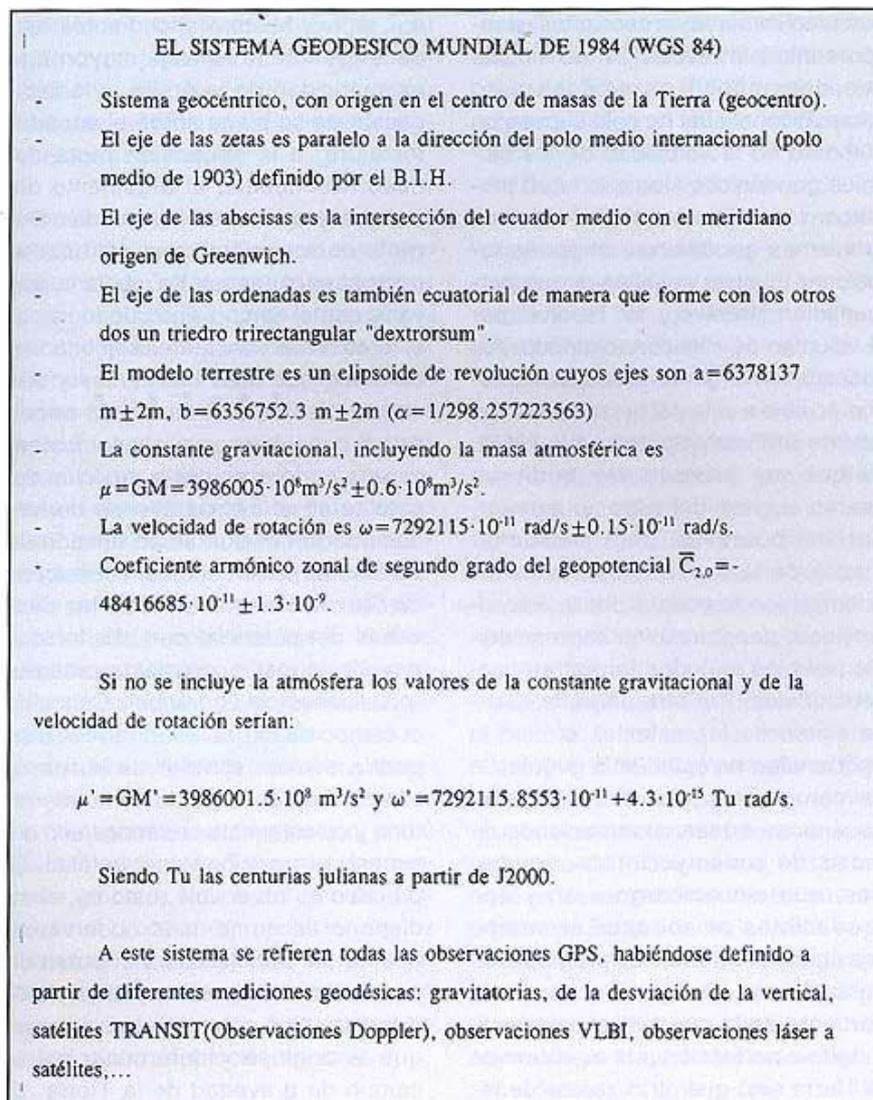


Figura 5.8: Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS84)

Como resumen y conclusión de lo expuesto, en la figura 5.9 se representan los arcos de mediano y de paralelo fundamentales medidos por cadenas de triangulación en la historia de la Ingeniería Cartográfica hasta 1914 y que fueron utilizados para establecer elipsoides y cartografías nacionales. Y en la fig. 5.10, la Red Geodésica Española de Primer Orden por cadenas de meridianos y paralelos, levantada entre 1858 y 1879. Con el enlace con Argelia

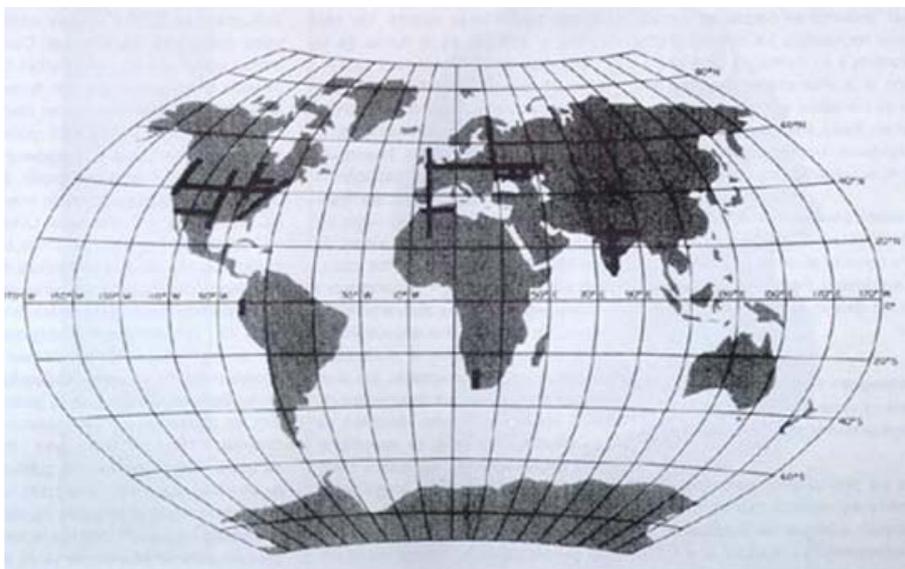


Figura 5.9: Arcos de meridiano y paralelo medidos en el mundo hasta 1914

realizado por el General Ibáñez de Ibero, director del Instituto Geográfico, en el que se observaron visuales de más de 250 Km. de longitud entre el pico Mulhacen y Tetica en España y los vértices Filhausen y M'Sabiha en Africa.

En la segunda mitad del siglo XX, la Geodesia Espacial mediante satélites artificiales y en especial la irrupción del sistema de georreferenciación y navegación GPS revolucionan una vez más y hasta la raíz tanto la teoría como la práctica geodésica. La triángulación clásica cede terreno ante el levantamiento espacial por vértices de pirámide. Y el geoide puede ser ya estudiado con más rigor. Una primera sorpresa es que el geoide parece que tiene una forma mucho más complicada de lo que parecía. E incluso cambiante. Una modelización por ordenador se representa en la fig. 5.11.

El estudio de sus ondulaciones a través de las perturbaciones orbitales de los satélites geodésicos indica que el bien conocido aplastamiento terrestre está

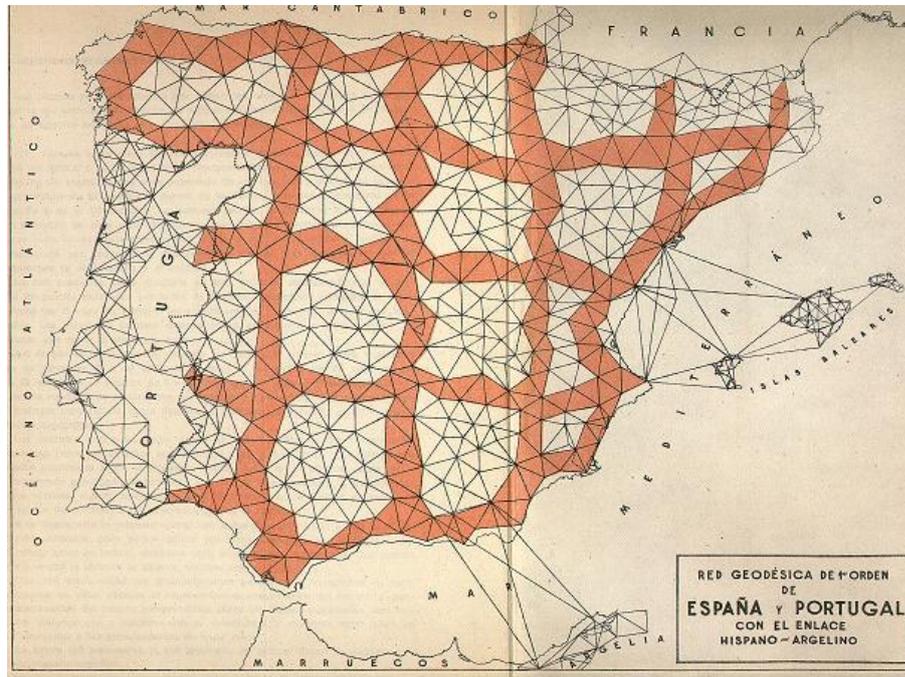


Figura 5.10: Red Geodésica Española de Primer Orden en 1879

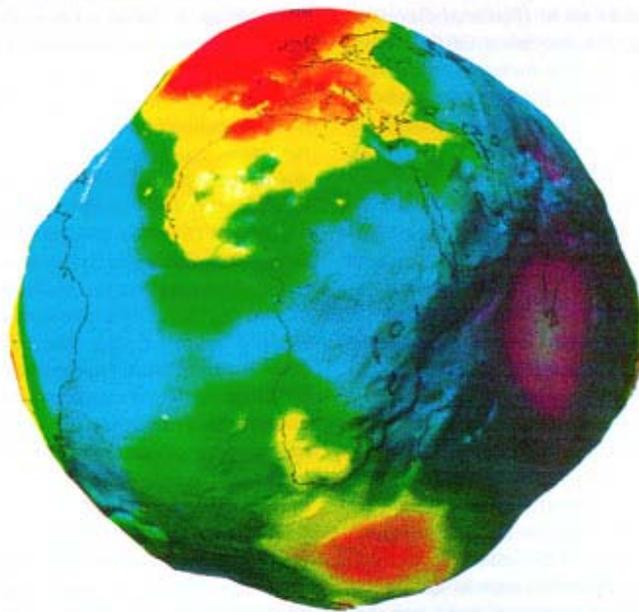


Figura 5.11: Modelización computadorizada del geode y sus ondulaciones

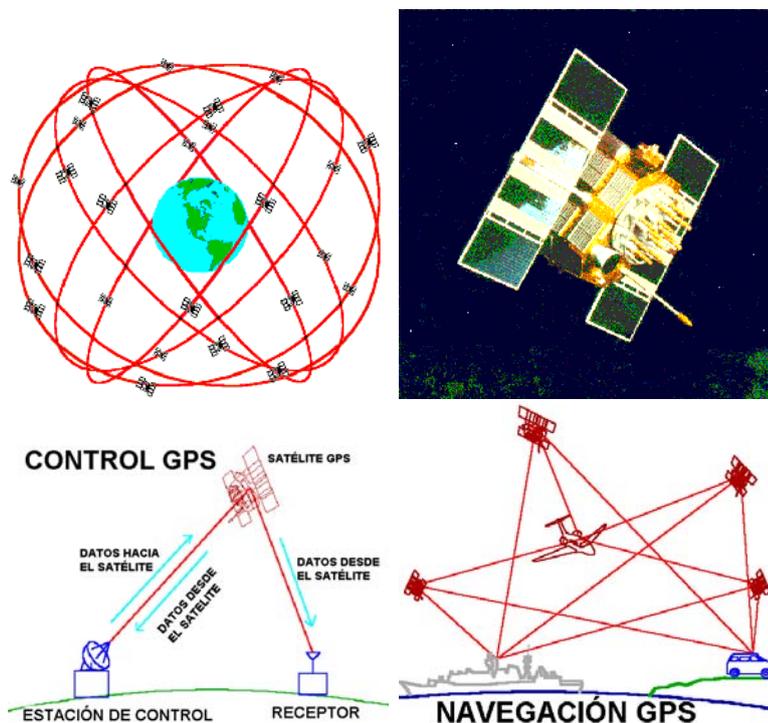


Figura 5.12: Constelación NAVSTAR GPS de 24 satélites. Vista de satélite tipo. Esquemas de control y navegación

disminuyendo, constatándose una elevación isostática de los bloques escandinavo y canadiense, consecuencia probable de la reducción de los casquetes glaciales. No es aquí y hoy nuestro problema, pero sí conviene tener en cuenta para lo que sigue que las mediciones de arcos de meridiano de la Ilustración se hicieron, como hoy, sobre un geode cambiante de formulación matemática desconocida. Y que aún en nuestros días, y desde luego en levantamientos GPS, es imposible prescindir de un elipsoide de aproximación, usualmente el WGS84 antes descrito. Que la recta definida en un punto por la dirección de la plomada no coincide en toda su extensión con la vertical o línea de fuerza o atracción del campo gravitatorio terrestre, porque esta última es curva, con lo que se complica cualquier métrica de precisión, en altimetría y planimetría. Y con todo ello es preciso ser conscientes de nuestras limitaciones y es inútil buscar por el momento precisiones exageradas. Dicho esto, volvemos al siglo XVIII.

En la figura 5.12 se representa la actual constelación GPS Navstar, de 27 satélites, con 24 en servicio permanentemente y 3 en reserva orbitando por

grupos de 4 en 6 planos de 60° de inclinación, a 20.180 Km. de altura, y los esquemas de control y georreferenciación en tierra y navegación.

Capítulo 6

Sobre el control de calidad y resultados de los trabajos de ambas Comisiones

Asumiremos desde la perspectiva geodésica actual como modelo más adecuado del esferoide terrestre el elipsoide WGS 84, varias veces citado. Sobre él, la respuesta a la pregunta planteada por la Ciencia de la Ilustración en el siglo XVIII, tiene una respuesta evidente. Es un elipsoide oblató. Y podemos cifrar sus parámetros fundamentales, que son:

$$\text{Semieje mayor} = a = 6.378.137 \text{ metros}$$

$$\text{Semieje menor} = b = 6.356.752 \text{ m.}$$

$$\text{excentricidad} = k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$k = \frac{c}{a} = 0,08182$$

$$\text{aplanamiento} = A = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{298,253}$$

y se trata de calcular con los medios actualmente disponibles la longitud de los arcos de meridiano de tres grados en Perú y Laponia, y los valores de los arcos de un grado correspondientes¹.

Siguiendo teoría y notación bien conocida se tiene.

Con $\varphi =$ colatitud la elipse genérica en paramétricas será

$$x = a \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$y = b \cdot \operatorname{cos}\varphi$$

y el arco de elipse “I” entre las colatitudes 0 y φ vendrá dado por la integral elíptica de segunda especie

$$l = \int_0^\varphi (dx^2 + dy^2) = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \operatorname{cos}^2\varphi + b^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \cdot d\varphi = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \cdot d\varphi$$

y siendo

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \leq 1 = \operatorname{sen}^2\alpha$$

se puede escribir en definitiva

$$l = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\varphi} \cdot d\varphi = a \cdot E(\alpha, \varphi)$$

$E(\alpha, \varphi)$ se adjunta tabulado con entradas α , φ y argumento la integral definida elíptica de segunda especie \int_0^φ .

¹Nos referimos a teoría y tablas de Integrales Elípticas de Pedro Puig Adam “Cálculo Integral” pg. 66 y sig. EEL.Industriales. Madrid 1968.

TABLA DE INTEGRALES ELIPTICAS DE PRIMERA ESPECIE $F(\alpha, \varphi)$

φ	α																	
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
3°	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524
6°	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049	0,1049
9°	0,1571	0,1571	0,1571	0,1572	0,1572	0,1572	0,1572	0,1574	0,1574	0,1574	0,1575	0,1575	0,1575	0,1575	0,1577	0,1577	0,1577	0,1577
12°	0,2095	0,2095	0,2095	0,2096	0,2097	0,2098	0,2098	0,2101	0,2102	0,2103	0,2103	0,2106	0,2107	0,2108	0,2109	0,2109	0,2110	0,2110
15°	0,2618	0,2619	0,2620	0,2622	0,2623	0,2625	0,2628	0,2630	0,2633	0,2636	0,2638	0,2641	0,2643	0,2645	0,2646	0,2648	0,2648	0,2648
18°	0,3142	0,3143	0,3145	0,3148	0,3151	0,3154	0,3159	0,3163	0,3168	0,3172	0,3177	0,3181	0,3185	0,3188	0,3191	0,3193	0,3194	0,3195
21°	0,3666	0,3668	0,3671	0,3675	0,3680	0,3686	0,3692	0,3699	0,3706	0,3714	0,3721	0,3728	0,3734	0,3740	0,3744	0,3747	0,3749	0,3750
24°	0,4190	0,4192	0,4197	0,4203	0,4210	0,4219	0,4229	0,4239	0,4250	0,4261	0,4272	0,4283	0,4293	0,4301	0,4308	0,4313	0,4316	0,4317
27°	0,4714	0,4717	0,4724	0,4732	0,4743	0,4755	0,4769	0,4784	0,4800	0,4816	0,4832	0,4847	0,4861	0,4874	0,4884	0,4891	0,4896	0,4897
30°	0,5238	0,5243	0,5251	0,5263	0,5277	0,5294	0,5313	0,5334	0,5356	0,5379	0,5401	0,5422	0,5442	0,5459	0,5474	0,5484	0,5491	0,5493
33°	0,5762	0,5769	0,5780	0,5795	0,5814	0,5837	0,5862	0,5890	0,5920	0,5960	0,5980	0,6010	0,6037	0,6060	0,6080	0,6085	0,6104	0,6107
36°	0,6286	0,6295	0,6309	0,6329	0,6353	0,6383	0,6416	0,6452	0,6491	0,6531	0,6572	0,6610	0,6647	0,6679	0,6706	0,6726	0,6739	0,6743
39°	0,6810	0,6821	0,6839	0,6864	0,6895	0,6932	0,6975	0,7021	0,7071	0,7123	0,7176	0,7227	0,7275	0,7318	0,7353	0,7380	0,7397	0,7403
42°	0,7336	0,7348	0,7370	0,7401	0,7440	0,7486	0,7539	0,7599	0,7661	0,7727	0,7794	0,7860	0,7922	0,7979	0,8026	0,8062	0,8094	0,8092
45°	0,7859	0,7876	0,7903	0,7940	0,7987	0,8044	0,8109	0,8182	0,8260	0,8343	0,8428	0,8512	0,8593	0,8665	0,8727	0,8774	0,8804	0,8814
48°	0,8384	0,8404	0,8436	0,8480	0,8537	0,8606	0,8685	0,8773	0,8870	0,8973	0,9079	0,9185	0,9288	0,9381	0,9461	0,9523	0,9561	0,9575
51°	0,8909	0,8932	0,8970	0,9023	0,9090	0,9172	0,9267	0,9374	0,9491	0,9617	0,9748	0,9881	1,0010	1,0130	1,0233	1,0313	1,0364	1,0381
54°	0,9434	0,9460	0,9505	0,9567	0,9646	0,9742	0,9855	0,9982	1,0124	1,0277	1,0437	1,0602	1,0764	1,0916	1,1048	1,1152	1,1219	1,1242
57°	0,9959	0,9989	1,0041	1,0112	1,0204	1,0317	1,0449	1,0600	1,0768	1,0952	1,1147	1,1349	1,1551	1,1743	1,1914	1,2049	1,2136	1,2167
60°	1,0484	1,0519	1,0577	1,0660	1,0766	1,0896	1,1049	1,1226	1,1424	1,1643	1,1879	1,2125	1,2376	1,2619	1,2837	1,3014	1,3129	1,3170
63°	1,1009	1,1049	1,1115	1,1209	1,1330	1,1478	1,1655	1,1860	1,2093	1,2351	1,2633	1,2933	1,3243	1,3547	1,3828	1,4059	1,4214	1,4268
66°	1,1534	1,1579	1,1654	1,1759	1,1896	1,2065	1,2267	1,2503	1,2773	1,3076	1,3411	1,3773	1,4153	1,4536	1,4888	1,5203	1,5411	1,5485
69°	1,2059	1,2109	1,2193	1,2311	1,2465	1,2656	1,2885	1,3154	1,3464	1,3817	1,4212	1,4646	1,5111	1,5591	1,6059	1,6466	1,6752	1,6856
72°	1,2585	1,2640	1,2733	1,2854	1,3008	1,3209	1,3457	1,3754	1,4101	1,4497	1,4936	1,5416	1,5937	1,6499	1,7092	1,7716	1,8277	1,8427
75°	1,3110	1,3171	1,3278	1,3418	1,3603	1,3846	1,4134	1,4477	1,4879	1,5340	1,5862	1,6442	1,7079	1,7772	1,8521	1,9326	1,9677	1,9776
78°	1,3636	1,3702	1,3814	1,3974	1,4183	1,4444	1,4765	1,5147	1,5600	1,6130	1,6748	1,7463	1,8284	1,9215	2,0240	2,1288	2,2164	2,2528
81°	1,4161	1,4234	1,4356	1,4530	1,4758	1,5046	1,5399	1,5823	1,6328	1,6926	1,7631	1,8461	1,9438	2,0584	2,1913	2,3387	2,4775	2,5421
84°	1,4687	1,4765	1,4887	1,5066	1,5305	1,5649	1,6065	1,6562	1,7143	1,7811	1,8578	1,9482	2,0630	2,2024	2,3731	2,5811	2,8136	2,9487
87°	1,5212	1,5297	1,5439	1,5643	1,5912	1,6253	1,6673	1,7184	1,7801	1,8542	1,9435	2,0519	2,1852	2,3520	2,5670	2,8561	3,2630	3,6425
90°	1,5738	1,5828	1,5981	1,6200	1,6490	1,6958	1,7513	1,8168	1,8941	1,9866	2,0947	2,1965	2,3088	2,5046	2,7681	3,1534	3,6317	∞

Figura 6.1: Tabla de integrales elípticas de primera especie

TABLA DE INTEGRALES ELIPTICAS DE SEGUNDA ESPECIE E(α, ψ)

ψ	α																		
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	
3°	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0524	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523
6°	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1047	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1046	0,1045	0,1045	0,1045	0,1045
9°	0,1571	0,1571	0,1570	0,1570	0,1570	0,1569	0,1569	0,1568	0,1568	0,1567	0,1567	0,1566	0,1566	0,1565	0,1565	0,1564	0,1564	0,1564	0,1564
12°	0,2094	0,2094	0,2093	0,2093	0,2092	0,2091	0,2091	0,2090	0,2089	0,2088	0,2088	0,2087	0,2087	0,2086	0,2086	0,2085	0,2084	0,2084	0,2083
15°	0,2618	0,2617	0,2616	0,2615	0,2615	0,2614	0,2613	0,2612	0,2611	0,2610	0,2609	0,2608	0,2607	0,2606	0,2605	0,2604	0,2603	0,2603	0,2602
18°	0,3141	0,3140	0,3138	0,3136	0,3133	0,3129	0,3125	0,3121	0,3116	0,3112	0,3107	0,3103	0,3100	0,3096	0,3094	0,3092	0,3091	0,3090	0,3089
21°	0,3665	0,3663	0,3660	0,3656	0,3651	0,3645	0,3639	0,3632	0,3625	0,3618	0,3611	0,3604	0,3598	0,3593	0,3589	0,3586	0,3584	0,3584	0,3584
24°	0,4188	0,4185	0,4181	0,4175	0,4168	0,4159	0,4150	0,4139	0,4129	0,4118	0,4108	0,4098	0,4090	0,4082	0,4076	0,4071	0,4068	0,4068	0,4067
27°	0,4711	0,4707	0,4701	0,4693	0,4682	0,4670	0,4657	0,4643	0,4628	0,4613	0,4598	0,4584	0,4572	0,4561	0,4552	0,4545	0,4541	0,4540	0,4540
30°	0,5234	0,5229	0,5221	0,5209	0,5195	0,5179	0,5161	0,5141	0,5121	0,5100	0,5080	0,5061	0,5044	0,5029	0,5017	0,5007	0,5002	0,5000	0,5000
33°	0,5751	0,5751	0,5740	0,5725	0,5706	0,5684	0,5660	0,5634	0,5607	0,5580	0,5553	0,5528	0,5505	0,5485	0,5468	0,5456	0,5449	0,5446	0,5446
36°	0,6280	0,6272	0,6258	0,6238	0,6214	0,6186	0,6155	0,6122	0,6087	0,6052	0,6017	0,5984	0,5954	0,5928	0,5907	0,5891	0,5881	0,5878	0,5878
39°	0,6803	0,6792	0,6775	0,6750	0,6720	0,6685	0,6646	0,6604	0,6559	0,6515	0,6471	0,6429	0,6391	0,6357	0,6330	0,6310	0,6297	0,6293	0,6293
42°	0,7326	0,7313	0,7291	0,7261	0,7224	0,7180	0,7132	0,7079	0,7025	0,6969	0,6914	0,6862	0,6814	0,6772	0,6738	0,6712	0,6697	0,6691	0,6691
45°	0,7849	0,7832	0,7806	0,7770	0,7725	0,7672	0,7613	0,7549	0,7482	0,7414	0,7347	0,7282	0,7223	0,7172	0,7129	0,7097	0,7078	0,7071	0,7071
48°	0,8371	0,8352	0,8320	0,8277	0,8223	0,8160	0,8088	0,8012	0,7931	0,7849	0,7768	0,7689	0,7618	0,7555	0,7503	0,7464	0,7440	0,7431	0,7431
51°	0,8894	0,8871	0,8834	0,8783	0,8729	0,8664	0,8586	0,8499	0,8406	0,8307	0,8205	0,8098	0,7997	0,7921	0,7858	0,7811	0,7781	0,7772	0,7772
54°	0,9416	0,9390	0,9345	0,9287	0,9212	0,9125	0,9026	0,8919	0,8806	0,8689	0,8577	0,8464	0,8361	0,8270	0,8194	0,8137	0,8102	0,8090	0,8090
57°	0,9938	0,9908	0,9858	0,9789	0,9703	0,9602	0,9488	0,9363	0,9232	0,9097	0,8961	0,8831	0,8709	0,8601	0,8511	0,8443	0,8401	0,8387	0,8387
60°	1,0460	1,0426	1,0388	1,0290	1,0192	1,0078	0,9945	0,9801	0,9650	0,9493	0,9336	0,9184	0,9042	0,8914	0,8808	0,8728	0,8677	0,8660	0,8660
63°	1,0982	1,0943	1,0878	1,0789	1,0678	1,0546	1,0397	1,0233	1,0060	0,9880	0,9700	0,9524	0,9368	0,9210	0,9065	0,8990	0,8930	0,8910	0,8910
66°	1,1504	1,1460	1,1387	1,1287	1,1162	1,1013	1,0845	1,0660	1,0463	1,0259	1,0052	0,9850	0,9659	0,9487	0,9341	0,9230	0,9160	0,9136	0,9136
69°	1,2026	1,1977	1,1896	1,1784	1,1644	1,1478	1,1289	1,1081	1,0859	1,0628	1,0385	1,0164	0,9946	0,9747	0,9578	0,9447	0,9364	0,9336	0,9336
72°	1,2548	1,2494	1,2403	1,2290	1,2154	1,1989	1,1799	1,1598	1,1388	1,1168	1,0941	1,0709	1,0472	1,0249	1,0030	0,9814	0,9604	0,9494	0,9477
75°	1,3070	1,3010	1,2911	1,2771	1,2603	1,2399	1,2169	1,1928	1,1678	1,1421	1,1159	1,0894	1,0628	1,0372	1,0127	0,9892	0,9669	0,9559	0,9544
78°	1,3592	1,3526	1,3417	1,3268	1,3080	1,2857	1,2601	1,2331	1,2056	1,1778	1,1498	1,1218	1,0938	1,0658	1,0388	1,0130	0,9889	0,9782	0,9767
81°	1,4113	1,4042	1,3924	1,3761	1,3556	1,3312	1,3034	1,2725	1,2401	1,2074	1,1745	1,1416	1,1087	1,0758	1,0430	1,0114	0,9814	0,9717	0,9702
84°	1,4635	1,4558	1,4430	1,4254	1,4032	1,3767	1,3464	1,3128	1,2765	1,2398	1,2028	1,1658	1,1288	1,0918	1,0548	1,0188	0,9838	0,9741	0,9726
87°	1,5157	1,5073	1,4936	1,4746	1,4507	1,4221	1,3894	1,3530	1,3156	1,2773	1,2389	1,1994	1,1599	1,1204	1,0809	1,0424	1,0049	0,9886	0,9871
90°	1,5678	1,5589	1,5442	1,5238	1,4981	1,4675	1,4323	1,3931	1,3506	1,3055	1,2587	1,2111	1,1638	1,1184	1,0764	1,0401	1,0127	1,0000	1,0000

Figura 6.2: Tabla de integrales elípticas de segunda especie

6.1. Análisis geodésico de los trabajos en Perú

En el caso que nos ocupa, siendo $\alpha = \text{arc sen } 0,08182 = 4^{\circ}41'35''$ y entrando en las tablas, como primera aproximación, con $\alpha = 5^{\circ}$.

El arco meridiano de latitud 0° a 3° rectificado, zona aproximada real de trabajo de Jorge Juan y sus compañeros durante casi NUEVE años, valdrá en el elipsoide WGS 84:

$$\begin{aligned} l_{Ec} &= a \left[\int_0^{90} \sqrt{1 - \text{sen}^2 5^{\circ} \text{sen}^2 \varphi} \cdot d\varphi - \int_0^{87} \sqrt{1 - \text{sen}^2 5^{\circ} \text{sen}^2 \varphi} \cdot d\varphi \right] = \\ &= a [E(5^{\circ}, 90^{\circ}) - E(5^{\circ}, 87^{\circ})] \end{aligned}$$

$$l_{Ec1^{\circ}} = a \cdot (1,5678 - 1,5157) = 6378137 \cdot 0,0521 = 332301 \text{ metros}$$

y la longitud del arco de 1° rectificado se acepta como $l_{Ec1^{\circ}} = 110767$ metros. Y en toesas de la época, con 1 toesa $\llcorner 1,95$ m, $l_{Ec1^{\circ}} = 56804$ toesas.

El resultado que se obtiene con $\alpha = \text{arc sen } 0,08182 = 4^{\circ}41'35''$, por medio de los programas “Matemática” y “Matlab”, y por desarrollo en serie de potencias², resulta el mismo, con diferencias despreciables.

A mayor abundamiento y en otro orden de ideas, el radio de curvatura de la elipse meridiana vale, según vimos anteriormente, en función del semieje mayor, la excentricidad y la latitud φ .

$$\rho = \frac{a(1-k^2)}{(1-k^2 \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

siendo lícito aplicar para arcos iguales o menores de tres grados

$$\rho \cdot d\phi = dl = l_{Ec}$$

y particularizando con $1^{\circ} \llcorner 0,017453$ radianes, y $\phi = 0$:

²L.G.Asenjo y D.Hernández “Geodesia”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 1990, o en cualquier otro manual de Cálculo o de Geodesia. Se sabe que

$$l = a \left[\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{5}{256}k^6 - \dots \right) \varphi - \left(\frac{3}{8}k^2 + \frac{3}{32}k^4 + \frac{45}{1024}k^6 + \dots \right) \text{sen} 2\varphi + \left(\frac{15}{256}k^4 + \frac{45}{1024}k^6 + \dots \right) \text{sen} 4\varphi - \\ & - \left(\frac{35}{3072}k^6 + \dots \right) \text{sen} 6\varphi + \dots \end{aligned} \right]$$

$$l_{Ec1^{\circ}} = 6378137 \cdot (1 - 0,08182^2) \cdot 0,017453 = 110572 \text{ metros}$$

$$l_{Ec1^{\circ}} = 56704 \text{ toesas}$$

Que ratifica y comprueba el cálculo anterior. La diferencia entre ambos cálculos $110767 - 110572 = 195$ m. aproximada en menos de $2 \cdot 10^{-3}$ ofrece precisión suficiente según justificamos más adelante para el fin propuesto.

Adoptamos la media de los dos valores: $l_{Ec1^{\circ}} = 110670$ metros $\langle \rangle$ 56754 toesas.

Y según hemos visto, el resultado propuesto por Jorge Juan y aceptado finalmente por la Comisión se fijó en:

$$56767,8 \text{ toesas} \langle \rangle 110697 \text{ metros}$$

Según lo expuesto, el error absoluto imputable al valor de Jorge Juan resulta ser de

$$110697 - 110670 = 27 \text{ metros}$$

y el relativo de

$$Error_{j. \text{juan}} = \frac{110697 - 110670}{110670} = \frac{27}{110670} = 2,4 \cdot 10^{-4}$$

Solo puede calificarse, con el conjunto de la Comisión, de excepcionalmente bueno, teniendo en cuenta las posibilidades técnicas de la época.

Acerca de la honradez profesional de Jorge Juan basta con resaltar que el error absoluto resulta casi la mitad del que él mismo esperaba (22,63 toesas $\langle \rangle$ 44,1 metros). Un trabajo de excelencia, difícil de superar incluso con instrumentación mucho más moderna.

6.2. Análisis geodésico de los trabajos en Laponia

Como en el caso anterior, con la importante diferencia, según hemos visto, de que se trabajó durante algo menos de UN AÑO y se midió un arco de apenas 1° (aproximadamente $57'$) entre la ciudad de Kitti, hoy Kittilä, latitud $67^{\circ}42'0''N$ y la desembocadura del río Tornea, ciudad del mismo nombre, latitud $65^{\circ}50'48''N$. Y tomando como antes se hizo $\alpha = \text{arc sen } 0,08182 = 4^{\circ}41'35''$ y entrando en las tablas, como primera aproximación, con $\alpha = 5^{\circ}$ se deduce lo que sigue.

El arco meridiano de latitud 63° a 66° rectificado valdrá en el elipsoide WGS 84:

$$l_{Lap.} = a \left[\int_0^{27} \sqrt{1 - \text{sen}^2 5^\circ \text{sen}^2 \varphi} \cdot d\varphi - \int_0^{24} \sqrt{1 - \text{sen}^2 5^\circ \text{sen}^2 \varphi} \cdot d\varphi \right] =$$

$$= a [E(5^\circ, 27^\circ) - E(5^\circ, 24^\circ)]$$

$$l_{Lap} = a (0,4711 - 0,4188) = 6378137 \cdot 0,0523 = 333577 \text{ metros}$$

y la longitud del arco de 1° rectificado se acepta como $l_{Ec1^\circ} = 11192 \text{ m}$. En toesas de la época con 1 toesa $\langle \rangle$ 1,95 m, $l_{Ec1^\circ} = 57022 \text{ toesas}$.

Y operando como en el caso anterior y utilizando la misma expresión del radio de curvatura de la elipse meridiana, en función del semieje mayor, la excentricidad y la latitud φ , que en este caso particularizamos en 66° N , se tiene sucesivamente.

$$\rho = \frac{a(1-k^2)}{(1-k^2 \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

siendo lícito aplicar para arcos iguales o menores de tres grados

$$\rho \cdot d\phi = dl = l_{Lap.}$$

y particularizando con $1^\circ \langle \rangle$ 0,017453 radianes, y $\phi = 66$, $\text{sen } 66 = 0.913545$

$$l_{Lap1^\circ} = \frac{6378137 \cdot (1-0,08182^2)}{(1-0,08182^2 \cdot 0,913545^2)^{3/2}} \cdot 0,017453 = 111505 \text{ metros}$$

$$l_{Lap1^\circ} = 57182 \text{ toesas}$$

Que ratifica y comprueba el cálculo anterior. La diferencia entre ambos cálculos $111192 - 111505 = -313 \text{ m}$. aproximada en menos de $3 \cdot 10^{-3}$ ofrece precisión suficiente, aunque en este caso en el límite, según veremos a continuación, para el fin propuesto. Adoptamos la media de los dos valores:

$$l_{Lap1^\circ} = 111348 \text{ m} = 57108,2 \text{ toesas}$$

Y podemos expresar la diferencia calculada que tomamos como exacta y de comparación entre el arco de meridiano de un grado a la latitud de 66° y el de latitud 0° ecuatorial según

$$l_{Lap1^\circ} - l_{Ec1^\circ} = 111348 - 110670 = 678 \text{ metros}$$

Cifra fundamental, que exige un trabajo en cálculo de hipótesis básicas y de resultados a ambas Comisiones de precisión relativa mínima conjunta de $6 \cdot 10^{-3}$, equivalente a $3 \cdot 10^{-3}$ en cada una³, condición que cifra y justifica las afirmaciones anteriores al respecto. Recordemos que el trabajo de Jorge Juan alcanzó la precisión de $4 \cdot 10^{-4}$ ¡25 veces inferior a la tolerancia!. Es tan cierto como increíble.

Los resultados observacionales adoptados por Maupertuis, a los que antes se hizo referencia son:

Longitud del arco de un grado en Laponia, a partir de la medición de otro de aproximadamente la misma graduación.

$$l_{Lap1^\circ} = 112004 \text{ m} = 57438 \text{ toesas}$$

Maupertuis se desvía 656 m. del valor 111348 m. que hemos adoptado como exacto. Afortunadamente para el éxito de la misión en sentido positivo. Porque en buena teoría de errores aparentes accidentales podría haber obtenido en forma equiprobable la misma desviación, pero en sentido contrario. Así, hubiera propuesto una longitud rectificada del arco de 1° de $111348 - 656 = 110692$ metros < 110697 m., valor aceptado por la Comisión como exacto en el Ecuador.

¡Y la figura de la tierra de acuerdo con los números anteriores hubiera sido tal vez explicada como esférica u elipsoidica ligeramente prolata!

Efectivamente, todo se debe a que el valor obtenido por Maupertuis y adoptado por la Comisión, se ve afectado aisladamente de un error absoluto de $112004 - 111348 = 656$ metros y relativo de

$$Error_{p. maupertuis} = \frac{112004-111348}{111348} = \frac{656}{111348} = 6 \cdot 10^{-3}$$

en el límite (678 metros en error absoluto y $6 \cdot 10^{-3}$ en relativo, según se dedujo) del rechazo para el conjunto del trabajo. El doble de la tolerancia de cada Comisión. Algunos, (pocos) autores lo han sugerido, si bien en general con cierto sigilo. “Si en 1737 Maupertuis estaba convencido de haber probado las tesis de Newton, diez años más tarde una espesa cortina de humo impedía una conclusión definitiva... “⁴.

³Es evidente que un error relativo en el entorno de $-3 \cdot 10^{-3}$ en Laponia simultaneo con otro de $+3 \cdot 10^{-3}$ en Perú dan lugar a arcos iguales y por tanto, una esfera. La combinación de errores superiores puede generar cualquier tipo de elipsoide, oblato o prolato, sin poder de afirmación alguno.

⁴Lafuente y Delgado, “La Geometrización de la Tierra” Opus cit. pg. 272.

Es claro que Maupertuis, que según vimos, había estimado su error máximo, con una fiabilidad al 100 %, que ya es arriesgar, en torno a 54,5 toesas <> 106,3 metros, se pasó de optimista casi en un 600 %. Importante diferencia con Jorge Juan. Por consiguiente, no es muy aventurado mantener que el Proyecto Geodésico conjunto pudo haberse visto cerca del fracaso, salvándose esencialmente por la brillante eficacia y profesionalidad de la expedición a Perú, en la que es de justicia destacar la labor de excelencia ejecutada por los jóvenes veinteañeros Jorge Juan y Antonio de Ulloa. Que se volvieron no tan jóvenes, rondando la treintena...

Y es posible que pudieran afinarse más los números anteriores. Pero para ello habría que tener en cuenta la corrección debida a medir en el geoide y calcular en el elipsoide. Y es más que probable que, en el estado actual del conocimiento, imputar la influencia de las ondulaciones del geoide introduciría una incertidumbre mayor que la aceptada implícitamente en los cálculos que anteceden.

6.3. Análisis multivariante de recintos de error

En la Universidad Politécnica de Valencia y durante una veintena de años, un equipo de jóvenes promesas⁵, hoy espléndidas realidades científicas, investigadoras y académicas, apoyandos por el profesor Chueca Pazos, han logrado algunos avances en cuestiones relacionadas con redes locales de alta precisión y sus recintos de error. Aún sigue viva la investigación, pero buena parte de ella está publicada en revistas, Congresos y libros y a todos ellos nos referimos.

En un apretado resumen sabemos que una Red puede estudiarse a través de su vector de observables, que ya hemos citado, y su vector de coordenadas que, con el mismo criterio que el anterior, se representa por

$$X = X_a + x$$

Donde X = vector de coordenadas compensadas, X_a = vector a priori de coordenadas aproximadas y x = vector de correcciones.

⁵En lo que sigue, recordamos los libros citados en la nota de pie de página n° 105, del capítulo 4. También las Tesis de la Dra. Ana Belén Anquela, Dr. Sergio Baselga Moreno, Dr. Ignacio Maestro Cano. Todas dirigidas por el catedrático Manuel Chueca y formando un corpus ordenado de investigación sobre recintos de error en redes locales de alta precisión.

Entonces, una Red puede estudiarse por sus observables como el afijo del vector C u O_T en el espacio euclideo R^m , siendo m el número de observables, y/o por sus coordenadas, como el afijo del vector X ó X_a en el espacio euclideo R^n , siendo n el número de coordenadas. Y sabemos calcular rigurosamente un recinto de incertidumbre en R^m , con centro en el afijo de C donde se encontrará el de O_T con un nivel de afirmación que puede fijarse arbitrariamente, y recíprocamente. También correlativamente sabemos calcular rigurosamente un recinto de incertidumbre en R^n , con centro en el afijo de X donde se encontrará el de X_a con un nivel de afirmación que puede fijarse arbitrariamente, y recíprocamente.

Ambos recintos son hipercuádricas degeneradas de tipo cilindro, o hiperelipsoides que es el caso que nos ocupa, llamado determinista, de red ligada, o de solución mínimo cuadrática única. La expresión general canónica de variable aleatoria de error z_i en cualquier caso, es la que sigue:

$$\sum_{i=1}^{i=R(S)} \frac{z_i^2 \mu_i}{\sigma^2_{R(S)} F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1,$$

$$i \in 1, 2, 3, \dots, n$$

donde

σ_o^2 = estimador de la varianza del observable de peso unidad

$R(S)$ = rango de la matriz de diseño $S = A^T P A$,(= n , completa si la red es ligada)

A = matriz de diseño de coeficientes de las formas lineales

P = matriz de pesos de observables

$F_{R(S), m-R(S), \alpha}$ = F-Test de Snedecor

α = nivel de significación

μ_i = autovalor distinto de cero de orden i de S .

El desarrollo teórico puede encontrarse en las obras citadas anteriormente⁶. Y mediante artificios geométricos de proyección y sección, podemos asociar a cualquier punto de la red o del espacio en que ha sido levantada distintos recintos de error específicos con la significación (y coeficiente de seguridad por tanto) que se desee, a priori y a posteriori. De ello se deduce toda una

⁶P.ej. . Chueca – Anquela – Baselga “Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño”. Opus cit. Pg 90 y sig.

doctrina que ya ha sido comprobada en múltiples ocasiones. Claro que a veces se llevan las cosas tal vez demasiado lejos. Quizás dos ejemplos podrían aclarar conceptos para aliviar la situación, antes de ocuparnos del siglo XVIII. El primero⁷ es el de la Fig.6.3.

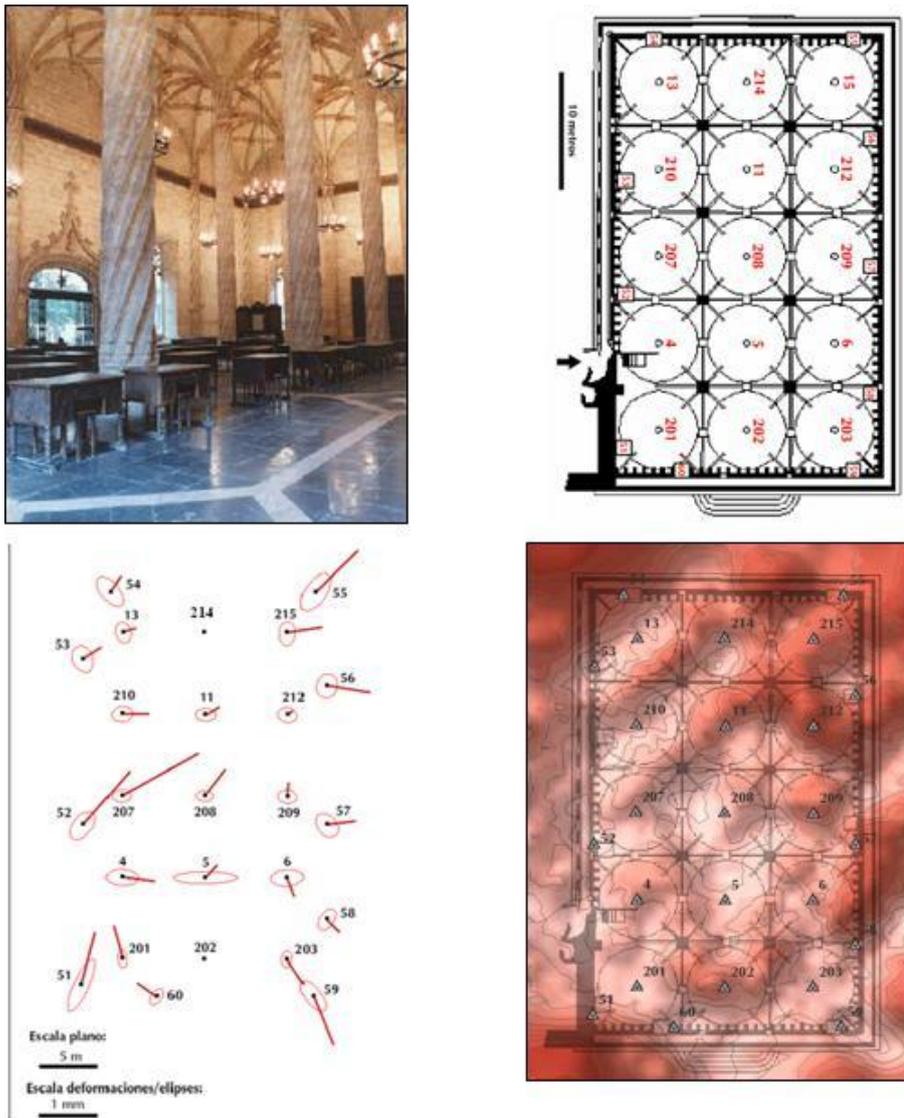


Figura 6.3: Estudio de deformaciones en la bóveda de la Lonja de los Mercaderes en Valencia

La universidad Politécnica de Valencia recientemente intervino en la restau-

⁷Trabajos de Sergio Baselga, Pascual Garrigues, Tesis de Ignacio Maestro.

ración de la Lonja de los Mercaderes de Valencia, tal vez el mejor gótico civil del mundo. Iniciada por Pere Compte en 1483 y terminada por Joan Corbera en 1548, la majestuosa belleza de su salón columnario destaca en el conjunto y se trata de controlar y prevenir la aparición y evolución de posibles fisuraciones en su bóveda. Con la instrumentación más sofisticada disponible se proyectó, observó, calculó y compensó sobre ella la red microgeodésica reticular de la figura. Aplicándose la técnica descrita se determinó el nivel de significación del trabajo, se calcularon los recintos (elipses) de error de los vértices de apoyo y salvo en el caso de un vértice, (el n° 212), la precisión estimada resultó inferior a la deformación detectable. Se levantó un modelo hipsométrico continuo de control de deformaciones. Los valores de incertidumbre se fijaron entre 0,46 milímetros en las zonas más oscuras y cero en las más claras. Estamos internándonos en el peligroso jardín de la precisión milimétrica. Cualquier precaución es poca y cualquier triunfalismo tan peligroso como los que estamos constatando en Maupertuis. Porque en general sigue siendo injusto hablar de descuido culpable en el trabajo. Es más cierto considerar que la exigencia y la presión permanentemente se lleva al límite. . .

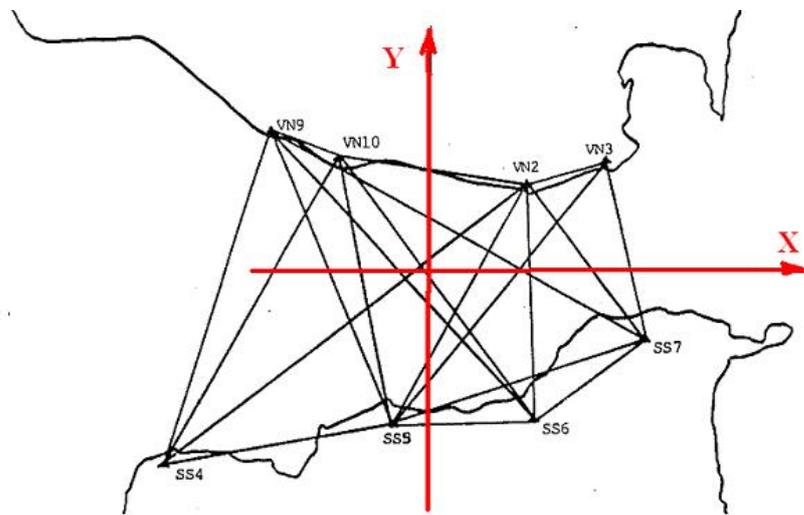


Figura 6.4: Red Geodinámica del Estrecho de Gibraltar

En un segundo ejemplo de aplicación, y salvando de un solo impulso la distancia que media desde el ámbito microgeodésico del patrimonio arquitectónico

o monumental hasta la relación geodésica entre Continentes, la Red Geodinámica del Estrecho de Gibraltar (Fig.6.4) viene siendo objeto de atención y trabajos por parte del Instituto Geográfico Nacional desde los años ochenta pasados. Hemos tenido acceso a ellos, se han aplicado las mismas técnicas básicas del caso anterior, y tal vez pueda describirse la situación tectónica de las placas allí concurrentes como sigue.

“El modelo teórico del desplazamiento secular de las placas cratonizadas sudeuropea y nordafricana sobre el orogén mediterráneo puede explicarse según un acercamiento centimétrico durante los más de 20 años de campañas realizadas”.... O quizás no..... De nuevo en el límite, antipódico, por el otro extremo.

En nuestra opinión sin embargo, la aplicación de la metodología descrita a un trabajo como el de Jorge Juan, cualquiera que sean las figuras de error específicas elegidas⁸ presenta grandes dificultades técnicas que no hemos sido capaces de sortear, entre ellas la ya mencionada y prácticamente insalvable dificultad de contar con un vector de observables o de coordenadas aproximadas de componentes aleatorias normales según distribución y condición de Gauss-Markov.

No obstante, si existe otro camino más prometedor. Efectivamente, los recintos n-dimensionales mencionados pueden considerarse tangentes a un paralelepípedo o hiperparalelepípedo recto rectángulo de aristas iguales a los ejes de la hipercuádrica generadora y concéntrico con ella⁹. Todo estriba en considerar el vector columna $X_{n,1}$ como variable inicial de componentes vectoriales y matriciales

$$X_{n,1} = B_{n,n} Y_{n,1} + M_{n,1}$$

o bien en forma simplificada $X = B Y + M$

⁸Hasta donde se nos alcanza, pueden referirse a: 1.- Conjunto de elipses de vértices y correlativas definidas geométrica y estadísticamente en secciones del recinto de incertidumbre más general, hipercilindro o hiperelipsoide, por los planos coordenados x_i, x_j definidos sobre el del levantamiento. 2.- proyecciones del recinto más general sobre los planos x_i, x_j que dan lugar geométrica y estadísticamente a elipses agrupadas en rosetas de vértices y de correlación sobre el plano del levantamiento. 3.- proyección de los semiejes del recinto más general sobre los planos x_i, x_j que dan lugar geométrica y estadísticamente a otra acepción de elipses agrupadas en rosetas de vértices y de correlación sobre el plano del levantamiento. Hasta ahora no hemos puesto a punto más y ninguna puede aplicarse desde un punto de vista científicamente riguroso.

⁹De nuevo hemos de referirnos a las obras del equipo citado de la Universidad Politécnica de Valencia si se desea conocer el desarrollo en detalle de la doctrina citada.

Donde $B = B_{n,n}$ = matriz cuadrada no singular, $Y = Y_{n,1}$ = vector columna de componentes variables normales tipificadas $Y_i \sim N(0, 1)$, $M = M_{n,1}$ = vector columna de términos independientes, constantes.

Y si particularizamos el vector columna M por el vector de medias m_x , la matriz B por la matriz varianza covarianza σ_{xx} , X por el vector de coordenadas compensadas, se demuestra que Y resulta un variable estadística multivariante, siendo lícito aplicar su análisis a cualquier tipo de red, clásica, GPS (todavía pendiente de suficientes evidencias experimentales) o mixta.

La función de probabilidad multivariante de la solución X de la red, o conjunta de que el vector de error sea en todos sus componentes igual o menor que x resulta

$$P = P(X_a + x) = P(X) = P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^T \sigma_{xx}^{-1} x}$$

La probabilidad de que el afijo del vector X no exceda de un determinado recinto $\Phi(x) = 0$, siendo $P = P(x)$ probabilidad multivariante, vendrá dada por la integral múltiple de orden n

$$P_\Phi = \iiint \dots \int_n P(x) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

Extendida al recinto $\Phi(x) = 0$. Y para una misma realidad física el cambio de variable $z = \Gamma^T x$, siendo Γ matriz de autovectores columna de la de diseño S , antes definida, extendida al paralelepípedo que representamos con la notación $\Phi = R_{\sigma z}$ antes definido y tal que sus aristas valgan el doble de las desviaciones típicas σ_{z_i} , semiejes del hiperelipsoide anterior da lugar a la integral múltiple de variables separadas

$$P_{R\sigma_z} = \iiint \dots \int_{n, R\sigma_z} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_1^n \left(\frac{z_i}{\sigma_{z_i}}\right)^2} dz_1 \cdot dz_2 \dots dz_n =$$

$$= |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\sigma_{z_1}}^{+\sigma_{z_1}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z_1}{\sigma_{z_1}}\right)^2} dz_1 \dots \int_{-\sigma_{z_n}}^{+\sigma_{z_n}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z_n}{\sigma_{z_n}}\right)^2} dz_n$$

El recinto de error R_{σ_z} conduce al cálculo de la probabilidad de que el afijo del vector X solución de la red esté dentro del recinto descrito, de tal manera que ninguna coordenada canónica diferirá de la exacta en más de una desviación típica, escribiendo

$$P_{R\sigma_z} = \text{prob}[|z_i|] \leq \sigma_{z_i}$$

que se generaliza con el factor de homotecia λ según

$$P_{R\lambda\sigma_z} = \text{prob}[|z_i|] \leq \lambda\sigma_{z_i}$$

resultando inmediatamente la integral

$$P_{R\lambda\sigma_z} = 2^n [N(0, 1)_0^{+\lambda}]^n = [N(0, 1)_{-\lambda}^{+\lambda}]^n$$

que solo depende de n y λ , y que nos permite de nuevo volver al siglo XVIII, pero ahora contemplándolo con mayor detalle y aprovechamiento desde el XXI.

Efectivamente, la expresión anterior nos permite diseñar una variable específica que describa la realidad física de las cadenas de triángulos utilizadas en las mediciones de arco de meridiano realizadas por ambas Comisiones. Recordemos que a la variable multivariante definida por un vector V que aplicada a nuestro caso trate de cumplir dicho objetivo, cualquiera que sea, se le podrá aplicar lícitamente la fórmula anterior si

- El vector V está formado por componentes V_i , variables homogéneas de idéntico nivel de significación, sin que destaque o se privilegie ninguna, en conjunto o formando parte de un grupo.
- Cada una de estas variables puede tratarse como estocástica adoptando una distribución normal tipificable conjunta $V \sim N(\mu_v, \sigma_{vv})$, existiendo entre ellas dependencia estocástica expresada por la matriz varianza-covarianza σ_{vv} .
- Existe un modelo matemático de la forma $F(V) = 0$, linealizable por Taylor.
- El modelo describe la realidad física en un momento determinado en forma de geometría de una red espacial constituida por un conjunto de triángulos acolados.

Y consideramos que cada uno de los triángulos de las dos cadenas en estudio aportan a la medida del arco de meridiano correspondiente una fracción V_i de la misma, que por la configuración homogénea de las cadenas que ya hemos consignado puede considerarse estadísticamente la misma salvo

variaciones accidentales, aleatorias normales gaussianas y equiprobables en cualquier sentido. (Es justificable por larga experiencia en trabajos de este tipo que ningún triángulo ostenta prelación alguna sobre los otros, el error puede aparecer en forma equiprobable en valor y signo en cualquiera de ellos, todos son geoméricamente muy semejantes, y la transmisión de errores se verifica cuadráticamente según distribuciones normales gaussianas). El modelo matemático obviamente está formado por las condiciones que impone la geometricidad de la red. Las componentes V conjuntamente forman el vector V que buscamos y es claro que cumplimenta el condicionado anterior. En definitiva, creemos que puede adoptarse como normal multivariante el vector V y que el hecho de que no conozcamos sus parámetros probabilísticos y estadísticos específicos a priori y a posteriori no quiere decir que no existan. Afortunadamente, no son precisos para la aplicación de la expresión deducida y su análisis posterior no depende de ellos.

El nuevo vector específico geodésico-estadístico V así definido representa una concepción original y puede estudiarse por análisis multivariante, sustituyendo en nuestro caso con significativa ventaja en el proceso que sigue a los vectores clásicos de coordenadas, observables, correcciones y residuos, mucho más difíciles de establecer con el rigor necesario en un trabajo a la vez técnico e histórico como el que abordamos. Aún cuando seamos reiterativos, recordemos que a casi trescientos años de distancia, el establecimiento para la instrumentación, metodología y ecuación del observador de la época, de los errores clásicos a priori de dirección, puntería, perpendicularidad, distancia, lectura, etc..., necesarios para la metodología usualmente empleada que podemos llamar clásica, resulta en nuestra opinión literalmente imposible.

El conjunto de triángulos considerado no debe incluir los complementarios ni los correspondientes a ampliación de las bases observadas, ya que su aplicación específica es la de la configuración de las oportunas figuras geométricas de deducción. Así adoptamos el número de 28 triángulos-variables acoladas en cadena continua N-S para los cálculos que siguen, respecto a la cadena de Perú y 8 triángulos en la de Laponia.

Finalmente, todo parece indicar que volvemos de nuevo Perú y Laponia provistos de un instrumento útil, con el que podremos valorar el trabajo de ambas comisiones mediante criterios estadísticos, no solo en calidad, sino en probabilidad de éxito por separado y en conjunto...

6.3.1. Aplicación a los trabajos en Perú

Los 678 metros establecidos como diferencia entre el arco rectificadado de un grado en Perú y Laponia permiten establecer la tolerancia máxima para el conjunto del trabajo en $T = 678 \times 3 = 2034$ metros. Totalmente asumible si ambas Comisiones hubieran medido un arco de tres grados. Como en Laponia se midió solo un grado, en su momento realizaremos la oportuna corrección. De momento, para la Comisión en estudio, su tolerancia específica será $T_{Perú} = \frac{1}{2} (678 \times 3) = 1017$ metros para el arco de 3° medido en Perú.

La cadena de triángulos orientada, observada y calculada es de 28 triángulos bien conformados resueltos como planos, de lados en el entorno de los 12000 metros, con 30 vértices y 60 coordenadas.

Se tendrá sucesivamente, siendo $E_{max} =$ Error máximo aceptable/triángulo

$$E_{max} \cdot \sqrt{28} = 1017 \text{ m}$$

$$E_{max} = \frac{1017}{\sqrt{28}} = 192 \text{ m/tglo.}$$

y la probabilidad conjunta de que el afijo del vector multivariante exacto se encuentre dentro del paralelepípedo o hiperparalelepípedo en el espacio R^{28} con centro de simetría en el afijo del vector multivariante aproximado y aristas iguales al doble de las desviaciones típicas de cada componente de error asociada a un triángulo, multiplicadas por una constante o coeficiente de homotecia a determinar λ , función del nivel de fiabilidad establecido a priori, se expresa según

$$P_{28} = [N(0,1)_{-\lambda}^{+\lambda}]^{28}$$

y estableciendo según es usual un nivel de aceptación de 0,99, se tendrá

$$P_{28} = [N(0,1)_{-\lambda}^{+\lambda}]^{28} = 0.99$$

$$x^{28} = 0,99$$

$$x = 0,99^{1/28} = 0,99964$$

y en las tablas de la distribución normal $N(0,1)$ se obtiene

$$\lambda = 3,61$$

y sucesivamente

$$3,61 \cdot \sigma_T = 192$$

$$\sigma_T = \frac{192}{3,61} = 53,2 \text{ m./ triángulo}$$

desviación típica máxima aceptable en el error imputable a un triángulo genérico de la cadena.

Y en otro orden de ideas, teniendo en cuenta que el valor aceptado como exacto para el arco de tres grados sobre el elipsoide WGS84 es

$$110670 \times 3 = 332010 \text{ m.}$$

Y el valor aproximado observado, calculado y propuesto por Jorge Juan y aceptado por la Comisión para el arco de tres grados es

$$110697 \times 3 = 332091 \text{ m.}$$

Se concluye que el error total absoluto realmente cometido se establece en

$$332091 - 332010 = 81 \text{ metros /cadena de 28 triángulos}$$

y en cada triángulo, la tolerancia en el error cuadrático podría haberse establecido en:

$$E_{cT} = \frac{81}{\sqrt{28}} = 15,3 \text{ metros / triángulo}$$

con un coeficiente de seguridad de 3,5 respecto al valor anterior σ_T en condiciones realmente duras (asimilando E_{cT} a una desviación típica, estando con seguridad más cerca de un error máximo).

Todo ello incide en que el trabajo de Jorge Juan y la Comisión del Perú, con una fiabilidad a priori que supera 0,99, es decir prácticamente la certeza, no solo resultó ampliamente suficiente como para decidirse por la solución oblata del esferoide terrestre sin cifrado alguno necesario, sino que hubiera podido contribuir con éxito a proponer en todos sus elementos métricos un elipsoide aproximado de alta calidad, incluso desde criterios del siglo XXI. Cómo fueron capaces de lograrlo no es analizable estadísticamente. Fue un esfuerzo profesional, técnico y humano que solo puede causar admiración.

Lástima que la Comisión de Laponia no hubiera llevado a cabo un trabajo comparable.

6.3.2. Aplicación a los trabajos en Laponia

Con el mismo criterio del caso anterior, los números resultan ahora como sigue.

La cadena de triángulos orientada, observada y calculada es de 8 triángulos bien conformados resueltos como planos, de lados en el entorno de los 12000 metros, con 9 vértices y 18 coordenadas.

$$T = 678 \text{ metros}$$

$$T_{Laponia} = 1/2 \cdot 678 = 339 \text{ metros}$$

para el arco de 1° medido en Laponia.

Y sucesivamente

$$E_{max.} \cdot \sqrt{8} = 339 \text{ m}$$

$$E_{max.} = \frac{339}{\sqrt{8}} = 120 \text{ m./tglo.}$$

muy inferior al caso anterior.

y estableciendo también un nivel de aceptación de 0,99, se tendrá

$$P_8 = [N(0, 1)_{-\lambda}^{+\lambda}]^8 = 0,99$$

$$x^8 = 0,99$$

$$x = 0,99^{1/8} = 0,998794$$

y en las tablas de la distribución normal $N(0,1)$ se obtiene

$$\lambda = 3,22$$

y sucesivamente

$$3,22 \cdot \sigma_T = 120$$

$$\sigma_T = \frac{120}{3,22} = 37,2m./tglo$$

desviación típica máxima aceptable en el error imputable a un triángulo genérico de la cadena.

Y siendo el valor aceptado como exacto para el arco de un grado 111348m. ,y el aproximado propuesto por Maupertuis 112004 m. , el error total absoluto cometido se establece en

$$112004 - 111348 = 656 \text{ metros /cadena de 8 triángulos}$$

y en cada triángulo, la tolerancia en error cuadrático hubiera podido establecerse en:

$$E_{cT} = \frac{656}{\sqrt{8}} = 232 \text{ metros / triángulo}$$

Totalmente insuficiente para el trabajo proyectado (seis veces mayor de lo mínimamente aceptable).

Capítulo 7

Y Final

Fue un momento estelar de la Ciencia europea y mundial y de la Geodesia en particular. Con Francia e Inglaterra en cabeza, España a través de Jorge Juan, valenciano, y Antonio de Ulloa, andaluz, supieron mantener con toda dignidad su puesto de vanguardia en el concierto de las Ciencias y Técnicas Cartográficas y Geográficas de la Ilustración.

No es desdoro para nadie afirmar que, desde un punto de vista estrictamente académico y científico, la figura de Jorge Juan fue la más relevante. Al fin y al cabo, Ulloa libremente eligió dar primacía a su carrera militar y llegó a lo más alto. A almirante, a mandar Armadas. Al equivalente en tierra de Teniente General. Jorge Juan renunció a ello y también llegó a lo más alto en lo que entendió como más suyo. Es difícil, sobre todo en su época, y para un español, acumular la honra y el prestigio reconocido universalmente que él logró allegar.

Y encontró bien poco apoyo en sus inicios. Sus compañeros de Comisión en el Perú apenas le concedieron más importancia que la de un inexperto jovenzuelo impuesto por la Corona Española. A fuerza de genio y capacidad técnica y de trabajo, en una empresa de antemano desesperada, logró imponerse y prevalecer. El puesto científico de privilegio que mereció, lo conservó de por vida.

Lo que antecede se ha dicho y escrito muchas veces. En este sencillo trabajo, solo hemos pretendido cifrarlo aplicando lo que sabemos en el año 2010. Y puede discutirse cualquier cosa, pero no el Cálculo Integral. Lo que resulta, es lo que es. Así hemos pretendido exponerlo.

No quisiéramos dejar la impresión de que la Comisión de Laponia y Monsieur Maupertuis no se esforzaron demasiado. Hicieron un trabajo razonable,

adecuado para las posibilidades de su época y bajo una relativamente desproporcionada exigencia. Pero la verdad es que estuvieron a punto de malograrlo todo, con una probabilidad exactamente de moneda al aire. Si hubieran alcanzado comparativamente el mismo nivel de calidad de la Comisión de Jorge Juan, el elipsoide WGS84 actual de referencia GPS que hemos utilizado en este trabajo hubiera podido formularse hace más de dos siglos y medio. Y como es difícil ocultar la realidad a gente inteligente, es más que probable que todo ello motivara en buena medida la necesidad de la siguiente expedición de Delambre y Mechain y la ampliación del meridiano de Dunkerque – París – Barcelona. Solo el genio de Jorge Juan y la Comisión del Perú sacó adelante el Proyecto de la Academia, obteniendo un resultado de excelencia que, en este caso y con los mismos medios de la otra Comisión, a medida que avanza la tecnología entendemos que asombra y asombrará cada vez más.

En fin, Jorge Juan Santacilia y sus compañeros hicieron un gran trabajo, visto desde el año 2010, y juzgado y cifrado de acuerdo con nuestros actuales métodos. Sus números creemos que son los que anteceden. Quedan, humildemente, a disposición.

Bibliografía

- [1] • ACERRA, MARTINE et MEYER, JEAN. “L’Empire des Mers”. Office du Livre. Roma. 1990.
- [2] • ALDER, KEN. “La Medida de Todas las Cosas”. Santillana Ediciones Generales. Taurus Historia. Madrid. 2003.
- [3] • ALLEN, PHILLIP. “Summa Atlas. El Mundo visto por los Cartógrafos.” Ediciones Generales Salvat. Barcelona. 1993.
- [4] • ASENJO GARCIA, LUIS. Y HERNÁNDEZ, DAVID. “Geodesia”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 1990 .
- [5] • BARBER, PETER. “El gran libro de los mapas” Editorial Paidos Iberica S.A. Barcelona – Buenos Aires – México. 2006.
- [6] • BAYNTON - WILLIAMS, ROGER. “Investiging in Maps”. Transworld Publishers Ltd. London. 1969.
- [7] • BIJOURDAN G. “Le systeme métrique de poids et mesures”. Hachette Ed. Paris. 1901.
- [8] • BRAUDEL, FERNAND. “El Mediterráneo y el Mundo Mediterráneo en la época de Felipe II”. Fondo de Cultura Económica. México. 1953.
- [9] • BUISERET, DAVID. “La revolución cartográfica en Europa, 1400-1800” Ediciones Paidos Ibérica S.A. Madrid. 2004.
- [10] • CERESO MARTINEZ, RICARDO “La Cartografía Náutica Española en los siglos XIV, XV, y XVI”. CSIC. Madrid. 1994.
- [11] • CHUECA PAZOS, MANUEL. “Lecciones de Geodesia”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 1990.

- [12] • CHUECA PAZOS, MANUEL et alt. “Ingeniería Cartográfica en la Comunidad Valenciana”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2003.
- [13] • CHUECA PAZOS, MANUEL, HERRAEZ BOQUERA, JOSE, BERNE VALERO, J.LUIS. “Tratado de Topografía. Tomo III. Microgeodesia y Redes Locales”. International Thomson – Paraninfo Editores. Madrid. 1996.
- [14] • CHUECA PAZOS, MANUEL, GARCIA GARCIA, FRANCISCO, JIMÉNEZ MARTINEZ, M^a JESÚS, VILLAR CANO, MIRIAM. “Compendio de Historia de la Ingeniería Cartográfica”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2008.
- [15] • CHUECA PAZOS, MANUEL.”La ingeniería Cartográfica. Su peripecia vital en España. La aportación valenciana”. Discurso de ingreso en la Real Academia de Cultura Valenciana. RACV. Valencia. 2006
- [16] • CHUECA PAZOS, MANUEL, ANQUELA JULIAN, A.BELEN, BASELGA MORENO, SERGIO. “Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2007.
- [17] • CHUECA PAZOS, MANUEL, BERNÉ VALERO, J.LUIS, ANQUELA JULIAN, A.BELEN , BASELGA MORENO, SERGIO. “Avances en la interpretación de resultados en redes locales. Recintos de error.” Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2002.
- [18] • CUENIN, RENÉ. “Cartographie General”. Éditions Eyrolles. Paris. 1972.
- [19] • DE LA CONDAMINE, CHARLES MARIE. “Viaje a la América Meridional”. Espasa Calpe S.A. Madrid. 2003.
- [20] • DELAMBRE J.B. Grandeur et Figure de la Terre. París. 1912.
- [21] • DE TOLEDO, L. OCTAVIO. Tratado de trigonometría rectilínea y esférica, Librería General de Victoriano Suárez, Preciados 40, Madrid.
- [22] • DUBY, GEORGES. “Atlas Histórico Mundial. La Historia del Mundo en 317 mapas”. Editorial Debate. Barcelona. 1989.
- [23] • EDSON, EVELYN “Mapping Time and Space”. The British Library. Studies in Map History. Londres. 1999.

- [24] • FORBES, ERIC G., Greenwich Observatory, vol.1, Taylor & Francis. Londres. 1975.
- [25] • GONZALEZ – ALLER, JOSE IGNACIO. “Catálogo Guía del Museo Naval de Madrid”. Ministerio de Defensa. Madrid. 1996.
- [26] • GUEDJ, DENIS. “La Medida del Mundo”. Muchnik Editores. Barcelona. 2001.
- [27] • HARLEY J.B. “La nueva naturaleza de los mapas. Ensayos sobre la Historia de la Cartografía”. Fondo de Cultura Económica. México. 2005.
- [28] • HARSSON B.G. et alt. “Las mediciones Escandinavo-Rusas de Arcos de Meridiano de 1816 a 1852”.XX Congreso Internacional de la FIG. Melbourne 1994. Revista Topografía y Cartografía. N° 83 Revista del Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía. Madrid. Noviembre-Diciembre 1997.
- [29] • HERNANDO, AGUSTÍN. “Contemplar un territorio. Los mapas de España en el Theatrum de Ortelius”. Instituto Geográfico Nacional. Ministerio de Fomento. Madrid. 1998.
- [30] • JUAN SANTACILIA, JORGE. “Método de levantar y dirigir un Mapa o Plano General de España, por medio de triángulos observados por buenos cuartos de círculos y reflexiones sobre las dificultades que pueden ofrecerse”. Informe presentado por Jorge Juan a la Secretaría de Estado y Despacho Universal de la Marina. Estudiado por MARIO RUIZ MORALES Y MÓNICA RUIZ BUSTOS en su trabajo “Jorge Juan y sus proyectos para un Mapa de España”. Universidad de Granada. Granada. 2005.
- [31] • JUAN SANTACILIA, JORGE Y ULLOA, ANTONIO DE. “Observaciones Astronómicas y Físicas hechas de orden de S. Mag. en los Reynos de Perú de las cuales se deduce la Figura y Magnitud de la Tierra y se aplica a la Navegación”. Extramuros facsímiles S.L. Sevilla. 2007.
- [32] • KRETSCHMER, KONRAD. “Historia de la Geografía”. Editorial Labor S.A. Barcelona. 1930.
- [33] • LAFUENTE A. ANTONIO Y DELGADO ANTONIO J. “ La Geometrización de la Tierra (1735-1744)” CSIC. Instituto Arnau de Vilanova. Madrid. 1984.

- [34] • LAFUENTE, ANTONIO Y MAZUECOS, ANTONIO. “Los caballeros del punto fijo”. SERBAL/CSIC. Madrid. 1987.
- [35] • LASALLE T., « Cartographie, 4000 ans d’aventures et de passion ». París. 1990.
- [36] • LEVALLOIS, JEAN JACQUES Y KOVALEVSKY, JEAN. “Géodésie Générale”. Tomo I. Editions Eyrolles. Paris. 1971.
- [37] • LITER, CARMEN et alt., “La Geografía entre los siglos XVII y XVIII”, AKAL Historia de la Ciencia y la Técnica. Tomo 22. Ediciones Akal S.A. Madrid. 1996.
- [38] • LOPEZ ARROYO, MANUEL. “El Real Observatorio Astronómico de Madrid”. CENIG. Ministerio de Fomento. Madrid. 2004.
- [39] • LOPEZ PIÑERO, JOSE MARIA y NAVARRO BROTONS, VICTOR “Història de la Ciencia al País Valencia”. IVEI Edicions Alfons el Magnànim. Valencia. 1995.
- [40] • MARTÍN LOPEZ, JOSE. “Cartógrafos Españoles”. CENIG. Ministerio de Fomento. Madrid. 2001.
- [41] • MARTÍN LOPEZ, JOSE. “Historia de la Cartografía y de la Topografía”. CENIG. Ministerio de Fomento. Madrid. 2002.
- [42] • MAUPERTUIS, PIERRE LOUIS MOREAU DE. “Discours qui a été lu dans l’Assemblée Publique de l’Academie Royale des Sciences le 13 Novembre 1737 sur la mesure du degre du meridien au cercle polaire”. Facsímil en la web.
- [43] • MENÉNDEZ PIDAL, GONZALO. “Hacia una nueva imagen del mundo”. Real Academia de la Historia. Madrid. 2003.
- [44] • MENÉNDEZ PIDAL, GONZALO. “Imagen del Mundo hacia 1570”. Edita Consejo de la Hispanidad. Madrid. 1944.
- [45] • MIFSUT Y MACON A. “Geodesia y Cartografía”. Talleres del Depósito de la Guerra. Madrid. 1905.
- [46] • NAVARRO BROTÓNS, VICTOR et alt. “Jerónimo Muñoz: Introducción a la Astronomía y la Geografía”. Consell Valencia de Cultura. Col·leció Oberta. Valencia. 2004.

- [47] • NÚÑEZ DE LA CUEVAS, RODOLFO. “Historia de la Cartografía Española”. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid. 1982.
- [48] • ORMELING, FERDINAND JAN. “Cartography, past, present and future”. International Cartographic Association. Elsevier science publishers ltd. New York. 1989.
- [49] • OUTHIER , REGINAUD. “Journal d’un voyage au Nord de 1736 a 1737”. Correspondencia de Celsius a Delisle. Tornea, 20 de Noviembre de 1736. De la web.
- [50] • PERRIER G. « Petite Histoire de la géodésie, comment l’homme a mesuré et pesé la Terre ». París. 1939.
- [51] • POINCARÉ, HENRI. “La Ciencia y la Hipótesis”. Librería Gutenberg de José Ruiz. Madrid. 1907.
- [52] • PUIG ADAM, PEDRO. “Cálculo Integral”. EEI.Industriales. Madrid. 1968.
- [53] • REAL ACADEMIA DE CULTURA VALENCIANA. Aula de Humanidades y Ciencias. Serie Histórica. N° 16. Diversos artículos. Valencia. 1997.
- [54] • RUIZ MORALES, MARIO “Los trabajos geodésicos de D. José Rodríguez González”. Revista Topografía y Cartografía. N° 97. Revista del Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía. Madrid Marzo-Abril. 2000.
- [55] • RUIZ MORALES, MARIO Y RUIZ BUSTOS, MONICA. “El devenir de la Geodesia entre Pitágoras y la era espacial”. Granada. 1997.
- [56] • RUIZ MORALES, MARIO y RUIZ BUSTOS, MONICA. “Jorge Juan y sus proyectos para un Mapa de España”. Universidad de Granada. Granada. 2005.
- [57] • SIDER, SANDRA. “Maps, Charts, Globes. Five centuries of exploration”. The Spanish Society of America. New York. 1992.
- [58] • TOOLEY, RONALD VERE. “Maps and Mapmakers”. B.T. Batsford Ltd. London. 1970.

- [59] • ULLOA, ANTONIO DE. “Viaje a la América Meridional”. Edición moderna en dos tomos de 350 pgs. cada uno. Ed. Andrés Saumell Lladó. Crónicas de América – Dastin Historia. Madrid. 1997.
- [60] • US COAST AND GEODETIC SURVEY, “The Transcontinental Triangulation and the American Arc of the parallel”. Washington. 1900.
- [61] • VOLTAIRE, FRANÇOIS MARIA AROUET. “Le Siecle de Louis XV”. Oeuvres Completes. Hachette. Paris. 1953.
- [62] • VOLTAIRE, FRANÇOIS MARIA AROUET. “Lettres d’Angleterre”. Versión española como “Cartas Filosóficas”. Alianza Editorial. Madrid. 1988.
- [63] • VVAA. “Atlas del Mundo. 1492 – 1992”. Club Internacional del Libro Editores. Madrid. 1990.
- [64] • VVAA. “Doscientos años del Observatorio Astronómico de Madrid”. Asociación de Amigos del Observatorio Astronómico de Madrid. Madrid. 1992.
- [65] • VVAA. “Historia de la Cartografía”. Enciclopedia Geográfica. Editorial Codex. Argentina. Buenos Aires. 1967.
- [66] • VVAA. “Historia Universal de las exploraciones” Tomo II. Espasa Calpe. Madrid. 1989.
- [67] • VVAA. “La Imagen del Mundo. 500 años de Cartografía”. CENIG. Ministerio de Obras Públicas y Transportes. Madrid. 1992.
- [68] • VVAA. “La polémica de la Ciencia Española”. Alianza Editorial. Madrid. 1970.
- [69] • W. SHIRLEY, RODNEY. “The Mapping of the World 1475 - 1700”. The Holland Press Ltd. Holanda. 1987.
- [70] • WHITFIELD, PETER. “Mapping the World”. The British Library. London. 2000.