

SOBRE EL CONTROL MICROGEODESICO DE DEFORMACIONES

M.J. Jiménez Martínez, N. Quesada Olmo, M. Villar Cano

Autora: M.J. Jiménez Martínez, M. Chueca Pazos
Tlfno. 963877007 Ext.75531
Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera, s/n
46022 Valencia
RECEPCIÓN: 18-06-2014
APROBACIÓN: 26-06-2014

Resumen:

Pretendemos calcular la “sensibilidad” o umbral de precisión por debajo del cual nada puede afirmarse o negarse con respecto a la posible deformación producida en una red. En definitiva supone calibrar la precisión del trabajo específico que se presente, constituido fundamentalmente por una instrumentación concreta (como pueden ser los receptores GNSS) y un método de ajuste gaussiano. Una vez conocido el umbral podremos interpretar y aceptar, o desestimar en consecuencia el proyecto, si no alcanza la precisión requerida. Y la pregunta es ¿cómo definir ese límite de precisión?. Así, presentamos un procedimiento constituido por dos métodos complementarios que persiguen un resultado único, tienen alta probabilidad de comisión y permiten dar un resultado algébrico y estadístico sólido.

El procedimiento de obtención del umbral de sensibilidad esté formado por:

- El método que permite calcular el vector más probable de sensibilidad práctica, a partir de ajustes gaussianos.
- Y la aplicación de la teoría de errores de Baarda (fiabilidades interna y externa de la red ajustada) para obtener el vector más probable de sensibilidad teórica. La sensibilidad teórica tendrá un valor próximo al de la sensibilidad práctica, y en general debe ser superior.

A partir de ambas sensibilidades (teórica y práctica) calculamos la variable estadística J/Q , que nos permitirá conocer el nivel de significación α y la potencia de test β utilizando los F-Test, F' -Test, χ^2 -Test, χ'^2 -Test, en contrastes simples y dobles.

El presente trabajo completa seis publicaciones anteriores que constituyen la preparación previa e imprescindible para su estudio y comprensión. Los cuatro artículos publicados están en la Revista Digital: www.racv.es/racv: “Progreso en la práctica del Ajuste Gaussiano de una red local. Método de Triangulateración”, “Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas”, “Recintos de error y su interpretación en el Ajuste Gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis”, “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”, “El Problema Principal de Diseño. Densificación a partir de la Solución Inversa Generalizada Recíproca con Zonas de Distinta Significación”, “Sobre la Evolución en el Tiempo de una Red Local. Control de Deformaciones” y por último “Método Gaussiano de los Ajustes Coordinados: aplicación en Microgeodesia y Redes Locales”.

PALABRAS CLAVE:

CONTROL DE LA DEFORMACIÓN, MICROGEODESY, FREE-RED, RED DE AJUSTE, FIGURAS DE ERROR, LA CONFIABILIDAD DEL RESULTADO, PROBLEMA DATUM, PD2.

Abstract:

We pretend to calculate accuracy's threshold. Below that threshold, we can't accept or deny anything about the deformation produced into the network. In the end, it involves accuracy calibration of the specific project that we faced with; consisted mainly of a specific instrumentation (as GNSS receivers) and a method of Gaussian adjust. Once we met the threshold, we could interpret, accept, or reject the project if doesn't live up with the required accuracy. And the question is; how can we define this accuracy threshold? Therefore, we introduce a procedure that consists of two complementary methods that follow a unique result. They have got high probability and allow us to give a solid algebraical and statistical result.

The procedure of getting the sensitivity threshold consists of:

- A method that allows us to calculate the most probable vector of practical sensitivity from Gaussian adjusts.
- Application of Baarda's error theory (internal and external reliabilities from the adjusted network) to get the most probable vector of theoretical sensitivity. Theoretical sensitivity will have a close value to the practical one, and in general it must be higher.

From both sensitivities (theoretical and practical) we calculate the statistic variable J/Q that allows us to know the level of significance α and test power β using F-Test, F' -Test, χ^2 -Test, χ'^2 -Test, in simple and doubled testing.

Present research complete previous six publications that set up the previous and essential training for its study and comprehension. The six researches have been published by Digital Journal www.racv.es/racv: "Progreso en la práctica del Ajuste Gaussiano de una red local. Método de Triangulateración", "Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas", "Recintos de error y su interpretación en el Ajuste Gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis", "Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas", "El Problema Principal de Diseño. Densificación a partir de la Solución Inversa Generalizada Recíproca con Zonas de Distinta Significación", "Sobre la Evolución en el Tiempo de una Red Local. Control de Deformaciones", and the last "Método Gaussiano de los Ajustes Coordinados: aplicación en Microgeodesia y Redes Locales".

KEY WORDS:

DEFORMATION CONTROL, MICROGEODESY, FREE-NETWORK, NETWORK ADJUST, ERROR FIGURES, RESULT'S RELIABILITY, DATUM PROBLEM, PD2.

ÍNDICE GENERAL

1.- CONTROL MICROGEODESICO DE DEFORMACIONES	
2.- DESARROLLO GENERAL	4
3.- INTERPRETACION ESTADISTICA DE RESULTADOS	14
3.1- FORMULACION BASICA A PARTIR DEL METODO GENERAL DE AJUSTES COORDINADOS.....	15
3.2.- TEST ESTADISTICOS DE CONTROL.....	23
3.2.1.- PRIMERA APROXIMACIÓN ESTADISTICA. ENSAYO INICIAL CON EL T- TEST DE FISHER. CONSIDERACIONES DE INDOLE PRÁCTICA.....	24
3.2.2.- ESTABLECIMIENTO DE UNA VARIABLE ESTADÍSTICA ESPECÍFICA. DESARROLLO CON LAS DISTRIBUCIONES χ^2 Y $\chi^2_{v,\lambda}$	27
3.2.2.1- LA VARIABLE ESTADÍSTICA ρ	27
3.2.2.2.- EL PARÁMETRO DE NO CENTRALIDAD λ	35
4. - TEST ESPECIFICO DE CONTROL MICROGEODESICO DE DEFORMACIONES J/Q - JIMÉNEZ/QUESADA	37
4.1.- SOBRE LA SENSIBILIDAD DE REDES.....	43
4.2- ESTIMACIÓN DE LA SENSIBILIDAD TEÓRICA A PARTIR DEL W-TEST DE BAARDA.....	45
4.3- UNA CUESTION COMPLEMENTARIA. LA SENSIBILIDAD ESPECÍFICA.....	47

5.- LAS ZONAS DE DISTINTA SIGNIFICACIÓN EN CONTROL DE DEFORMACIONES	52
6.- SOBRE LA AMPLIACIÓN DEL J/Q-TEST MEDIANTE GENERALIZACIÓN DEL F-TEST DE FISHER-SNEDECOR	67
6.1.- GENERALIZACIÓN DEL F - TEST.....	71
7.- CONCLUSIONES	76
8.- ANEXO: APLICACIÓN DEL F-TEST DE FISHER-SNEDECOR GENERALIZADO	78
9.- BIBLIOGRAFÍA	83

1.- CONTROL MICROGEODESICO DE DEFORMACIONES

A continuación vamos a desarrollar una metodología con algoritmos de cálculo, control y especialmente interpretación rigurosos acerca de la variación a lo largo del tiempo de las coordenadas de vértices y puntos testigo proyectados, observados y ajustados entre sí según redes gaussianas locales sucesivas representativas de la evolución de la realidad física más general y no necesariamente topográfica.

Su aplicación es cada vez más extendida, de tal manera que el conjunto de teoría y práctica define ya una nueva materia denominada Microgeodesia Tetradimensional o Dinámica, especialmente útil en control de deformaciones en construcciones, obras de fábrica e Ingeniería Civil en general, extensible a cualquier recinto, superficie o espacio material, natural o artificial, cuyo proceso evolutivo pueda definirse y cifrarse en la forma expuesta mediante sucesivas individualizaciones. Así queda entendido y se desarrollará en cuanto sigue.

La metodología es clara. Se procede a proyectar la red local de control, que contendrá entre sus vértices a los puntos testigo, elegidos como más significativos con respecto al fenómeno a controlar, siendo posible ampliar su número indefinidamente mediante las oportunas densificaciones, junto con otros con carácter de Datum que se considerarán inalterables a todos los efectos. Estos últimos definirán los ejes coordenados y sucesivas campañas de observación y ajuste de la misma red darán lugar, por diferencia de coordenadas en los puntos testigo, a la evaluación de las posibles deformaciones acaecidas, en valor y signo según cada eje de coordenadas. Si es posible, se completa el trabajo con un modelo analítico de la geometría de la deformación cuya formulación apriorística es en general asequible a través de métodos y técnicas no topográficos. En dicho supuesto (por ejemplo en estudio de progresión de deformaciones en grandes obras de fábrica), la comparación del modelo geométrico obtenido y el constructivo previsto permite generalmente obtener predicciones de comportamiento estructural rigurosas y útiles. En especial el cálculo tensorial y en ocasiones la teoría de elementos finitos son necesarios para interpretar el conjunto del fenómeno físico.

La alta precisión implícita en el trabajo normalmente exigida impide en general la utilización de vértice geodésico, topográfico o incluso microgeodésico alguno de apoyo o enlace que pueda considerarse Datum. Así pues y prácticamente en la totalidad de los casos, su determinación no es apriorística sino que forma parte del problema como primera fase del mismo. A este efecto es preceptiva la aplicación de la doctrina del PD0, Problema de Diseño de Orden Cero según en su momento se desarrolló y que encuentra su utilidad fundamental en la cuestión expuesta. Además será preciso iniciar la tarea con la aplicación del algoritmo de redes libres, con todos los recursos de interpretación de resultados (recintos de error, análisis multivariante, etc...) que conocemos para definir y calcular el Datum y las primeras coordenadas de partida. En las campañas siguientes será problema prioritario conseguir la certeza de que la red permanece inalterable en

todos sus aspectos. Cualquier duda razonable al respecto conduce a considerar cada campaña como una red libre, lo que complica el problema notablemente. Del mismo modo se mantiene estrictamente el mismo método de observación y se utilizarán los mismos instrumentos y hasta donde sea posible los mismos operadores de campo. Es destacable que en la praxis que sigue se aplica el método de ajustes coordinados por incrementos de coordenadas, clara innovación sobre la metodología que podemos calificar como clásica.

El planteamiento del problema según la doctrina conocida es sencillo. Supuesto de aplicación con la notación usual el modelo matemático de observaciones indirectas, de la forma:

$$f(\mathbf{X}) - \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (1)$$

linealizado según

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{K} = \mathbf{R} \quad (2)$$

su solución será, en una campaña cualquiera de índice "1"

$$\mathbf{x}_1 = \left(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1, \quad \text{red ligada}$$

$$\mathbf{x}_1 = \left(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \right)^- \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 = \mathbf{S}_1^- \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 = \mathbf{A}_1'^- \mathbf{K}_1', \quad \text{red libre} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}_1 = \left(\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 \right)^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 = \mathbf{S}_1^+ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 = \mathbf{A}_1'^+ \mathbf{K}_1', \quad \text{red libre}$$

la primera con solución determinista por matriz inversa de Cayley, la segunda solución indeterminada por matriz inversa generalizada, y la tercera caso particular del anterior por matriz pseudoinversa. Y en cualquier caso

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{a1} + \mathbf{x}_1 \quad (4)$$

y en una campaña siguiente de índice "2"

$$\mathbf{x}_2 = \left(\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \right)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_2 = \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_2, \quad \text{red ligada}$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \right)^- \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_2 = \mathbf{S}_2^- \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_2 = \mathbf{A}_2'^- \mathbf{K}_2', \quad \text{red libre} \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \right)^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_2 = \mathbf{S}_2^+ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{K}_2 = \mathbf{A}_2'^+ \mathbf{K}_2', \quad \text{red libre}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_{a2} + \mathbf{x}_2 \quad (6)$$

En definitiva, aceptaremos que la variación o deformación experimentada por la red se expresa por el vector "d" de componentes

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 = (\mathbf{X}_{a2} - \mathbf{X}_{a1}) - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (7)$$

resultando la solución teóricamente irreprochable. Sin embargo su interpretación requiere el conocimiento de las figuras o cotas de error de los cuatro términos $\mathbf{X}_{a2}, \mathbf{X}_{a1}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1$ y sus respectivas interrelaciones. No contribuye a simplificar las cosas que, además, las correcciones sean variables aleatorias y las coordenadas aproximadas, no. Así, será preciso simplificar la cuestión sin pérdida de rigor.

La mejor solución hasta ahora a nuestro alcance es conseguir la mayor homogeneidad comparativa posible en todas las campañas tendiendo a que sean invariantes las determinaciones sucesivas de los valores de los parámetros y variables siguientes:

σ_0^2 = estimador a priori de la varianza del observable de peso unidad.

X_a = vector de coordenadas aproximadas de vértices.

P = matriz a priori de pesos de observables

$Q = P^{-1}$, matriz cofactor a priori de pesos

$(A^T P A)^{-1} = S^{-1} = Q_{xx}$ = matriz cofactor a posteriori de coordenadas de vértices, caso determinista.

S^- , S^+ = matrices cofactor a posteriori de coordenadas de vértices inversas generalizadas o pseudoinversa de S , caso de red libre.

Y puede sintetizarse que la praxis a seguir en una determinación arbitraria de deformaciones como la (7) será tanto más fiable y teóricamente más rigurosa cuanto mejor se cumpla la prescripción de que en el proceso de determinación del vector solución "d" solamente varíen a priori los vectores de observables O_{T2} y O_{T1} y aún ellos conservando la misma matriz de pesos P . Con la metodología de aplicación antes mencionada y utilizando exclusivamente modernos observables GPS, GNSS,... esperamos justificar además que cualquier supuesto práctico puede reducirse a determinista. La realidad física, única, siempre lo es.

En lo que sigue suponemos la cumplimentación rigurosa del condicionado expuesto. Las prescripciones y normas para lograrlo serán objeto de estudio aparte.

2.- DESARROLLO GENERAL

Será de aplicación el método conocido de ajustes coordinados con adición de variables o parámetros pero previamente es preciso efectuar las consideraciones y deducciones que se desarrollan a continuación

En la primera campaña se habrá determinado el vector de correcciones x_1 a X_a según:

$$x_1 = (A^T P A)^{-1} A^T P K_1 = S^{-1} A^T P K_1 \quad (8)$$

en ajuste determinista o bien

$$\begin{aligned} x_1 &= S^- A^T P K_1 = A'^- K_1 \\ x_1 &= S^+ A^T P K_1 = A'^+ K_1 \end{aligned} \quad (9)$$

en red libre.

y en la segunda campaña se obtendrá respectivamente

$$x_2 = (A^T P A)^{-1} A^T P K_2 = S^{-1} A^T P K_2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= S^{-1} A^T P K_2 = A^+ K_2 \\ x_2 &= S^+ A^T P K_2 = A^{++} K_2 \end{aligned} \quad (11)$$

en los tres supuestos contemplados.

$$\begin{aligned} \text{Donde } K_t &= O_{Tt} - f(Xa) \\ t &\in 1,2 \\ \text{con} \end{aligned} \quad (12)$$

O_{Tt} = vector valores observados en el ajuste t
 $f(Xa)$ = vector valores calculados en cualquier ajuste

Y el vector de deformaciones en los vértices de la red producidas entre ambas campañas será

$$d = x_2 - x_1 \quad (13)$$

A la misma solución puede llegarse directamente ajustando las formas lineales

$$A(x_2 - x_1) - (K_2 - K_1) = R_2 - R_1 = R_d \quad (14)$$

$$\text{o bien, simplificando la notación } A d - K_d = R_d \quad (15)$$

Donde cada forma lineal es la diferencia de dos formas lineales correspondientes en ambas campañas, tomadas vértice a vértice y con variables representativas de las diferencias, coordenada a coordenada, en cada uno de ellos. Del mismo modo es evidente y muy importante subrayar para evitar confusiones de interpretación que el residuo y el observable de cada forma lineal es también la diferencia entre los valores correspondientes de residuos y observables de las formas lineales de las campañas de partida, como vamos a ver. Ello significa además un cambio en el peso de cada forma lineal del ajuste conjunto con respecto a las de partida.

Obtengamos la ecuación vectorial de los observables O_{Td} a partir de la expresión de las constantes K_2 y K_1

$$\begin{aligned} K_2 &= O_{T2} - O_C = O_{T2} - f(Xa) \\ K_1 &= O_{T1} - O_C = O_{T1} - f(Xa) \end{aligned}$$

siendo O_{T2} y O_{T1} vectores de observables de las campañas 2 y 1 y $O_{C1} = O_{C2} = O_C = f(Xa)$ vector de observables calculado, constante en ambas campañas por serlo Xa , según el modelo usual de observaciones indirectas $C - f(X) = 0$ que suponemos de aplicación en cuanto sigue. El caso más general de deformaciones, correspondiente a modelos matemáticos con ecuaciones implícitas $F(X,C) = 0$,

lineales o linealizables, y hasta donde se nos alcanza, no está completamente resuelto todavía.

Se tendrá

$$K_d = K_2 - K_1 = (O_{T2} - O_{T1}) - (O_C - O_C) = O_{Td} - O_{TC} = O_{Td} - \text{Vector nulo}$$

Con

$$O_{Td} = O_{T2} - O_{T1} \quad (16)$$

donde O_{Td} = vector de observables diferencia de los O_{T2} y O_{T1} correspondientes a las dos campañas.

O_{Td} es asimilable al vector medido de observables-deformaciones.

y un observable medido genérico de orden i , "diferencia de observables" será

$$O_{Tdi} = O_{T2i} - O_{T1i} \quad (17)$$

correspondiente a la diferencia, en general, de dos valores angulares o distanciométricos, también y cada vez con mayor frecuencia GPS, GNSS;... si su precisión es suficiente, expresados en la forma diferencial lineal adecuada y conocida, explicitando las coordenadas de los vértices que relacionen.

$O_{Cd} = O_C - O_C = \text{vector nulo en cualquier ajuste es asimilable al vector calculado de observables-deformaciones. .}$

Para ello es esencial conservar en todas las campañas el vector X_a de coordenadas aproximadas y en consecuencia el $O_C = f(X_a)$ de observables calculados.

Como consecuencia generalmente muy útil se recomienda calcular las deformaciones "al origen", es decir, con referencia a la primera campaña que sirve de patrón de comparación.

En (17), las varianzas a priori de los observables correspondientes a la forma lineal de orden i en el 1ª y 2ª campaña son respectivamente:

$$\sigma_{1i}^2 \text{ y } \sigma_{2i}^2 \quad (18)$$

y siendo evidentemente independientes ambos ajustes y a fortiori los observables correspondientes entre ellos, se tendrá la expresión de la varianza a priori del observable genérico O_{Tdi} .

$$\sigma_{Tdi}^2 = \sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2 \quad (19)$$

y su peso

$$P_{Tdi} \propto \frac{1}{\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2} = \frac{Cte.}{\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2} \quad (20)$$

pero si P es invariante en ambos ajustes debe cumplirse que los dos observables tengan la misma precisión a priori y por tanto

$$\sigma_{1i}^2 = \sigma_{2i}^2 = \sigma_i^2 \quad (21)$$

resultando

$$P_{Tdi} \propto \frac{1}{\sigma_{Tdi}^2} \propto \frac{1}{2\sigma_i^2} = \frac{Cte.}{2\sigma_i^2} = \frac{1}{2} P_{1i} = \frac{1}{2} P_{2i} \quad (22)$$

Es claro que la condición de invariancia de P, cuyo cumplimiento supondremos de ahora en adelante, implica no solamente alta precisión en todos los observables, sino también alta homogeneidad en todas las campañas de observación, so pena de elevado riesgo de pérdida de fiabilidad en los resultados.

luego

$$P_d = \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{2} P_2 = \frac{1}{2} P \quad (23)$$

$$Q_d = P_d^{-1} = (\frac{1}{2}P)^{-1} = 2P^{-1} = 2Q \quad (24)$$

matrices de pesos y cofactor a priori y también

$$\sigma_{Tdi}^2 = 2\sigma_i^2 \quad (25)$$

donde

i = nº de orden del observable en la campaña ajuste 1ª y 2ª

d = observable diferencia en el ajuste conjunto

P_d = matriz a priori de los pesos de los observables diferencia (observables-deformaciones) en el ajuste conjunto.

En consecuencia

$$d = (A^T P_d A)^{-1} A^T P_d K_d = (A^T \frac{1}{2} P A)^{-1} A^T P_d K_d = = 2S^{-1} A^T \frac{1}{2} P K_d = S^{-1} A^T P (K_2 - K_1) = = S^{-1} A^T P K_2 - S^{-1} A^T P K_1 = x_2 - x_1 \quad (26)$$

como debía ser. y que podría también escribirse directamente a partir de la consideración de que x₁ y x₂ son invariantes para cualquier μP, siendo μ = Cte.

En cuanto a las matrices cofactor a posteriori se tendrá:

$$Q_{dd} = (A^T P_d A)^{-1} = Q_{d1} = S_d^{-1} \text{ matriz cofactor del ajuste conjunto en 1ª}$$

determinación de deformación

$$Q_{x1x1} = (A^T P A)^{-1} = Q_{xx} = \text{matriz cofactor de la 1ª campaña}$$

$$Q_{x2x2} = (A^T P A)^{-1} = Q_{xx} \text{ matriz cofactor de la 2ª campaña}$$

invariantes que se relacionan según:

$$Q_{d1} = 2(A^T P A)^{-1} = 2 Q_{xx} = Q_{dk} \quad (27)$$

Llamaremos Q_{dk} = matriz cofactor genérica a posteriori del ajuste conjunto en determinación k-ésima de deformación respecto al ajuste 1º, que resulta invariante, cuestión fundamental en la praxis de aplicación, como se verá más adelante. Ello implica en el desarrollo anterior la doble notación $Q_{dd} = Q_{d1} = S_d^{-1} = (A^T P_d A)^{-1}$ para la que hemos considerado primera determinación de deformaciones (campañas 1 y 2). En la doctrina que sigue utilizaremos esencialmente Q_{d1} dando por supuesta y trivial la extensión a cualquier otra determinación posterior de orden k que procediere.

Y entendido que sea lo anterior, las matrices varianza covarianza a posteriori resultan

$$\begin{aligned} \sigma_{dd} &= \sigma_{d1} = \hat{\sigma}_{od}^2 Q_{d1} = 2\hat{\sigma}_{od}^2 Q_{xx} \\ \sigma_{x1x1} &= \hat{\sigma}_{o1}^2 Q_{xx} \\ \sigma_{x2x2} &= \hat{\sigma}_{o2}^2 Q_{xx} \end{aligned} \quad (28)$$

que deben diferir entre sí exclusivamente en función de los estimadores de las varianzas de los observables de peso unidad a posteriori. Es decir, dentro de márgenes muy estrechos, si el trabajo está bien hecho.

Todo ello en soluciones determinísticas.

Las correspondientes a redes libres, si por alguna circunstancia o exigencia inusual fueran de aplicación en la metodología avanzada que proponemos, tendrán las mismas expresiones deducidas sustituyendo las matrices cofactor Q_{d1} y Q_{xx} por las matrices inversas generalizadas S_{d1}^- y S^- o pseudoinversas respectivas S_{d1}^+ y S^+ .

Particularizando en aras de la brevedad tan solo para estas últimas se sigue

$$\begin{aligned} Q_{d1} &= S_{d1}^+ = 2(A^T P A)^+ = 2 Q_{xx} = 2S^+ = Q_{dk} \\ \sigma_{dd} &= \sigma_{d1} = \hat{\sigma}_{od}^2 Q_{d1} = \hat{\sigma}_{od}^2 S_{d1}^+ = \hat{\sigma}_{od}^2 2S^+ \\ \sigma_{x1x1} &= \hat{\sigma}_{o1}^2 Q_{xx} = \hat{\sigma}_{o1}^2 S^+ \\ \sigma_{x2x2} &= \hat{\sigma}_{o2}^2 Q_{xx} = \hat{\sigma}_{o2}^2 S^+ \end{aligned} \quad (29)$$

Esta observación también la adoptaremos y daremos por supuesta de ahora en adelante.

La deformación resultante detectada tras el ajuste conjunto de dos campañas de observación en un vértice cualquiera V respecto a una coordenada será, para $i \in 1,2,3,\dots,n$

$$d_i = x_{2i} - x_{1i} \quad (30)$$

Y de la independencia de los vectores x_1 y x_2 se sigue, para un d_i cualquiera

$$\hat{\sigma}_{d_i}^2 = \hat{\sigma}_{x_{2i}}^2 + \hat{\sigma}_{x_{1i}}^2 \quad (31)$$

a posteriori, expresión tanto más fiable y una vez más se reitera, tan solo si las dos campañas son excelentes, con observables y variables o parámetros de la misma precisión a priori y a posteriori. *Que equivale a que no sea preciso ponderación alguna adicional a lo largo de todo el proceso de cálculo.*

En otro vértice M se tendrá:

$$d_j = x_{2j} - x_{1j} \quad (32)$$

Expresemos (30) y (32) según

$$d_i = x_{2i} - x_{1i} + 0 x_{2j} + 0 x_{1j} \quad (33)$$

$$d_j = 0 x_{2i} + 0 x_{1i} + x_{2j} - x_{1j} \quad (34)$$

de donde obtenemos la covarianza $\sigma_{d_i d_j}$

$$\sigma_{d_i d_j} = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0) \sigma_{x_{2k} x_{1k}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$k \in i, j$

puesto que a posteriori los pares x_{1i} y x_{1j} , x_{2i} y x_{2j} , son estadísticamente dependientes entre sí por ser elementos respectivos de los vectores de corrección x_1 y x_2 , resultados de dos algoritmos de ajuste distintos, sin perjuicio, como en la propia expresión anterior se verifica de que x_1 y x_2 sean independientes.

Seguidamente

$$\hat{\sigma}_{d_i d_j} = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{x_{2i}}^2 & 0 & \hat{\sigma}_{x_{2i} x_{2j}} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{x_{1i}}^2 & 0 & \hat{\sigma}_{x_{1i} x_{1j}} \\ \hat{\sigma}_{x_{2i} x_{2j}} & 0 & \hat{\sigma}_{x_{2j}}^2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{x_{1i} x_{1j}} & 0 & \hat{\sigma}_{x_{1j}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_{ddj} = \left(\hat{\sigma}_{x2i}^2 \quad -\hat{\sigma}_{x1i}^2 \quad \hat{\sigma}_{x2i \times 2j} \quad -\hat{\sigma}_{x1i \times 1j} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_{x2i \times 2j} + \hat{\sigma}_{x1i \times 1j} \quad (35)$$

y en definitiva (31) y (35) implican que

$$\sigma_{dd} = \sigma_{dd1} = \sigma_{x1x1} + \sigma_{x2x2} \quad (36)$$

matriz varianza covarianza a posteriori de deformaciones.

la suma de las matrices varianza covarianza a posteriori de los resultados de los ajustes de las campañas de partida es igual a la matriz varianza covarianza del ajuste conjunto o de deformación. Y fijando ideas, considerando σ_{dd} representativa de la primera determinación de deformaciones, resultado de las dos primeras campañas, se reafirma la práctica aconsejable de referir las determinaciones siguientes según ya hemos indicado "a origen", es decir a la primera campaña.

Así, la determinación de orden k , resultada de la 1ª campaña y la k -ésima se expresará por

$$\sigma_{ddk} = \sigma_{x1x1} + \sigma_{xkxk} \quad (37)$$

junto con el resto de formulación estudiada. En dicho supuesto puede ser más coherente con el método la notación $\sigma_{dd1} \equiv \sigma_{dd}$ para la primera determinación de deformaciones.

En (36) y teniendo en cuenta (28) se obtiene sucesivamente y *utilizando por una vez la doble notación propuesta*

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{dd} &= \hat{\sigma}_{od}^2 Q_d \\ \sigma_{dd1} &= \hat{\sigma}_{od1}^2 Q_{d1} \end{aligned} \right\| = \hat{\sigma}_{o1}^2 Q_{xx} + \hat{\sigma}_{o2}^2 Q_{xx} = \left(\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2 \right) Q_{xx} \quad (38)$$

y teniendo en cuenta (27)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{dd} &= \hat{\sigma}_{od}^2 (2Q_{xx}) \\ \sigma_{dd1} &= \hat{\sigma}_{od1}^2 (2Q_{xx}) \end{aligned} \right\| = \left(\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2 \right) Q_{xx} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_{od}^2 \\ \hat{\sigma}_{od1}^2 \end{aligned} \right\| = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2 \right) \quad (40)$$

que relaciona las varianzas de los observables de peso unidad a posteriori del ajuste conjunto (observables -deformación) y los de partida (observables de campaña).

Siendo de tener muy en cuenta que razonablemente un trabajo cualquiera merecerá tanto más confianza en la práctica cuanto menor sea la variación relativa de los sucesivos valores de las varianzas $\hat{\sigma}_{oi}^2$. Es decir, se cumpla que $\hat{\sigma}_{o1}^2 \cong \hat{\sigma}_{o2}^2 \cong \hat{\sigma}_{o3}^2 \cong \dots \cong \hat{\sigma}_{oi}^2 \cong \dots \cong \hat{\sigma}_{ok}^2$, $i \in 1,2,3,\dots,k$. En dicho supuesto

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{od}^2 &= \left\| = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2) \cong \hat{\sigma}_{oi}^2 = \hat{\sigma}_o^2 \right. \\ \hat{\sigma}_{od1}^2 &= \left. \right. \end{aligned} \quad (40\text{-bis})$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{od}^2 &= \left\| \cong \hat{\sigma}_{oi}^2 = \hat{\sigma}_o^2 \cong \sigma_o^2 \cong \sigma_{od}^2 \right. \\ \hat{\sigma}_{od1}^2 &= \left. \right. \end{aligned}$$

la segunda expresión es inmediata consecuencia de la siempre exigible cumplimentación correcta del F-Test. Así (40) y (40-bis) son fundamentales para la vigilancia y comprobación de la buena marcha de los cálculos. En cualquier supuesto, “La varianza del observable-deformación de peso unidad a posteriori debe resultar muy aproximadamente igual a la semisuma de las varianzas de los observables de peso unidad a posteriori deducidas de los ajustes de campaña iniciales”. Si la discrepancia es importante, es preciso revisar el trabajo.

Se reitera una vez más que cuanto se ha expuesto para la primera determinación de deformación es válido para cualquier otra posterior. Basta con tomar siempre el mismo ajuste de partida (que hemos llamado 1º) y sustituir el segundo por el de orden k que corresponda. Q_{d1} se sustituye por Q_{dk} y el resto de las expresiones conservan su significado y aplicación.

En alguna ocasión no deseable puede ser inasequible la obligada aplicación de las expresiones (40) y (40-bis). Por ejemplo, porque no haya sido posible conseguir el mismo número de grados de libertad en la observación de comparación que en la 1ª. Ello puede suceder si no se vigila o es imposible lograr la constancia del número de observables en cada estación y campaña.

Si ello es así, y ciñéndonos a la primera determinación de deformación, extensible por supuesto a la genérica de orden k, es un estimador asesgado y consistente $\hat{\sigma}_{od}^2$ la expresión ponderada:

$$\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{o1}^2 (m_1 - n) + \hat{\sigma}_{o2}^2 (m_2 - n)}{(m_1 - n) + (m_2 - n)} \quad (41)$$

donde m_1 y m_2 son respectivamente el número de formas lineales (observables) de la primera y segunda campaña, empleándose la notación usual, $\hat{\sigma}_{o1}^2$ y $\hat{\sigma}_{o2}^2$ para los estimadores a posteriori de la varianza del observable de peso unidad en las campañas 1º y 2ª, generalizable el segundo a $\hat{\sigma}_{ok}^2$ para cualquier

campana de orden k , y $\hat{\sigma}_{od}^2$, $\hat{\sigma}_{od1}^2$, para el observable-deformación $\hat{\sigma}_{odk}^2$ diferencia de observables de peso unidad en la determinación de deformaciones de que se trate. También es generalizable $\sigma_{dd} \equiv \sigma_{dd1}$ a σ_{ddk} lo que se da por supuesto y no se tiene en cuenta más para no complicar innecesariamente la exposición y notación, ya de por sí compleja.

Evidentemente se obtiene (40) para $m_1 = m_2$, siendo los estimadores $\hat{\sigma}_{o1}^2$ y $\hat{\sigma}_{o2}^2$ del mismo peso, objetivo que debe perseguirse.

Como sabemos, el caso de red libre se deduce sustituyendo n por $R(A) = R(Q_{xx}) = R(Q_{d1}) = R(Q_{dk})$.

Y como consecuencia de toda la doctrina expuesta, siendo riguroso y lícito acceder a la que entendemos como mejor solución asequible en el estado actual de la teoría para el vector de deformaciones “d”, por medio de un algoritmo de ajuste clásico, en todo igual al de una red de alta precisión, será de aplicación la totalidad de nuestros conocimientos al efecto sobre recintos de incertidumbre, problema principal de diseño, problemas de diseño de cualquier denominación, utilización de análisis multivariante,...etc. Y por supuesto, serán de aplicación también todos los tests y algoritmos estadísticos y probabilísticos que se han desarrollado anteriormente y con el mismo fin.

Sin embargo, existe una exigencia adicional. En la práctica el vector d nunca resultará idénticamente nulo. Incluso calculado sobre una red de constancia a priori inalterable e inalterada. Ello implica un límite de valores de d no significativos que definen la precisión específica del trabajo realizado teniendo en cuenta todos sus aspectos instrumentales y metodológicos. Es lo que llamaremos sensibilidad de la red, de imprescindible determinación. Sobre dicho límite es lícito aceptar la existencia de deformación y valdrá d. Bajo él, puede existir o no, pero nada puede decirse.

Todo ello hace preciso avanzar en la interpretación estadística de resultados.

3.- INTERPRETACION ESTADISTICA DE RESULTADOS

La correcta aplicación de la doctrina enunciada requiere necesariamente un enfoque teórico y práctico específico. El que antes hemos llamado y definido genéricamente en (16) observable-deformación $O_{Td} = O_{T2} - O_{T1}$ puede y debe ser tratado estadísticamente como cualquier observable gaussiano clásico con los mismos test e idénticas hipótesis nula y alternativa, tanto comparando variables estadísticas de muestras finitas como éstas con poblaciones, por definición infinitas. Especialmente nos referimos a los F y χ^2 Tests comparando por cociente sus varianzas de peso unidad σ_0^2 , $\hat{\sigma}_0^2$, y σ_{od}^2 , $\hat{\sigma}_{od}^2$ a priori y posteriori. Con ello

se asegurará la validez y rigor del trabajo por lo que a observables clásicos O_T y observables-deformación O_{Td} se refiere.

Pero necesariamente es preciso establecer además alguna variable o variables estadísticas nuevas que permitan estudiar e interpretar simultáneamente los resultados del trabajo, parciales y totales, con la mayor flexibilidad y en cada contraste para una misma particularización, en los supuestos de existencia o no de deformación, o sea y respectivamente bajo la nueva y específica hipótesis nula $H_0: d = 0$ y la alternativa $H_1: d \neq 0$. Y dichas variable o variables serán tanto más fiables cuanto mejor y más sencillamente puedan expresarse en función los estocásticos σ_0^2 , $\hat{\sigma}_0^2$, y σ_{od}^2 , $\hat{\sigma}_{od}^2$, aceptada que sea su idoneidad.

Veremos a continuación que pueden alcanzarse buenos resultados a través del Método de Ajustes Coordinados arbitrariamente con o sin zonas de Distinta Significación, contrastando una variable estadística específica por medio de una batería de dobles Test. Todo ello formando un avanzado cuerpo de doctrina riguroso cuyo conjunto entendemos supone sustancial novedad e innovación en la doctrina y praxis que nos ocupan.

3.1- FORMULACION BASICA A PARTIR DEL METODO GENERAL DE AJUSTES COORDINADOS

Plantaremos el problema como aplicación del método de ajustes coordinados con adición de variables o parámetros. Es una teoría bien conocida que ha proporcionado inmejorables resultados en ajuste de Redes. Recordemos el w-Test de Baarda y alguna otra aplicación. Ahora vamos a ver que, escogiendo debidamente nuevas variables estadísticas, puede seguirse explotando la misma argumentación con buen éxito. Su resolución debe hacer posible la aplicación de test estadísticos de control adecuados para cualquier trabajo en presencia que para sintetizar y como lo venimos haciendo englobaremos en la denominación genérica de deformaciones, sobre una misma variable estadística específica simultáneamente bajo la hipótesis nula $H_0: d = 0$ de su inexistencia y bajo la alternativa $H_1: d \neq 0$. Ello implica tener en cuenta en orden a la aceptación o rechazo del trabajo las probabilidades de error de 1º y 2º orden, cifrándolas respectivamente en niveles de significación y potencia de test rigurosos.

Para todo ello será preciso en primer lugar comparar e interpretar, en dobles Tests F y/o χ^2 estimadores de varianzas de observables de peso unidad de ajustes en los que se desea averiguar si existe deformación siguiendo la rutina conocida y formulando los resultados que procedan. Adicionalmente, y en análisis de ajustes coordinados, se calibrará el umbral de apreciación alcanzable con el o los estimadores que se hayan podido obtener de la misma red observada en condiciones en que se tenga la certeza de no existencia de deformación, considerando tanto valores a priori como a posteriori.

Y como consecuencia de ello y considerando que en la práctica el resultado de cálculo nunca será nulo será cuestión fundamental del trabajo de observación, ajuste y cálculo realizado la determinación de un vector de deformación d_s que defina la "sensibilidad" o umbral de apreciación mencionado por debajo del cual nada puede afirmarse o negarse y menos cifrarse con respecto a la posible deformación producida. Con cierta impropiedad acostumbra a englobarse en términos de deformación nula a cualquiera, siquiera real, inferior a la sensibilidad rigurosamente calculada y establecida, específica de cada aplicación. Para ello se emplearán dobles Tests F' y/o χ'^2 de carácter novedoso.

Siempre al hablar de observables-deformación y sus estimadores entendemos, según se ha dicho ya repetidas veces, observables-diferencia correspondientes a (15) y (16), que dan lugar a variables "d" con significado físico de deformaciones en el sentido de los ejes de coordenadas.

Desarrollaremos a continuación el supuesto determinista, con la salvedad nuevamente reiterada de generalización en su caso a red libre, que reiteramos generalmente evitable y no acorde con la realidad física, siempre determinista.

Se plantea la hipótesis nula en la forma:

$$\begin{aligned} H_0: d &= 0 & (42) \\ &\text{no hay deformación apreciable} \end{aligned}$$

y la hipótesis alternativa como

$$\begin{aligned} H_1: d &\neq 0 & (43) \\ &\text{existe deformación apreciable y cifrable en valor y nivel de certidumbre} \end{aligned}$$

Una red de deformaciones que cumple forzosamente con la hipótesis nula será la que genera el ajuste coordinado siguiente

$$A d - K_d = R_d \quad (44)$$

$$d = 0 \quad (45)$$

que implica, supuestos los ajustes definidos por las campañas 1ª y 2ª homogéneos e independientes:

$$K_d = R_d$$

$$K_d = -(K_2 - K_1) = -(O_{T2} - O_{T1}) = R_2 - R_1 = R_d \quad (46)$$

$$O_{T1} + R_1 = O_{T2} + R_2$$

$$C_2 = C_1$$

y también

$$\sigma_{R_d}^2 = \sigma_{R_2}^2 + \sigma_{R_1}^2 \quad (47)$$

en estimadores a priori, que una vez más y siguiendo el razonamiento reiteradamente utilizado permite escribir

$$\sigma_{R_{di}}^2 = \sigma_{R_{2i}}^2 + \sigma_{R_{1i}}^2 \quad (48)$$

para un residuo cualquiera que implica (17) para el observable genérico $O_{T_{di}}$ correspondiente y de nuevo se tiene (23) y (24)

$$Q_d = Q_2 + Q_1 = 2 Q \quad (49)$$

$$P_d = (2Q)^{-1} = \frac{1}{2} Q^{-1} = \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{2} P_2 = \frac{1}{2} P \quad (50)$$

Aplicando a (44) y (45) la práctica usual del conocido algoritmo de ajuste, con la notación establecida se tendrá, con:

$$A_2 d - K_2 - R_{d2} = d = 0 \quad (51)$$

$$A_2 = I \quad (52)$$

$$K_2 = 0 \quad (53)$$

$$T_2 = A_2 S_d^{-1} A_2^T = S_d^{-1} = (A^T P_d A)^{-1} \quad (54)$$

y también

$$R_{d1} = R_{d11} + D_{R_{d1}} \quad (55)$$

$$R_{d2} \rightarrow 0 \quad (56)$$

$$Q_{d2} = P_{d2}^{-1} = 0 \quad (57)$$

$$P_{d2} \rightarrow \infty$$

El ajuste con deformación nula impuesta o forzada equivale a agregar n observables de peso asintótico con infinito, equivalente a residuo asintótico con cero, que permite escribir sus formas lineales según $d \rightarrow 0$. En definitiva, operaremos con $d = 0$.

Según teoría, el sistema de ecuaciones normales será, en su caso más general y con la notación conocida:

$$\begin{pmatrix} A_1^T P_1 A_1 & A_2^T \\ A_2 & -P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T P_1 K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

y particularizado para (52), (53), (54), (56)

$$\begin{pmatrix} A^T P_d A & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P_d K_d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

que desarrollando da lugar a

$$A^T P_d A d - \lambda_2 = A^T P_d K_d \quad (60)$$

$$d = 0 \quad (61)$$

cuya solución bien conocida hemos desarrollado y obtenido con anterioridad¹ resultando

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{D}_d = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d + \mathbf{D}_d = \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d + \mathbf{D}_d \quad (62)$$

siendo

$$\mathbf{D}_d = -\mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2) = -\mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{S}_d (\mathbf{d}_1 - \mathbf{0}) = -\mathbf{d}_1 \quad (63)$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{P}_2^{-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}_2^T = \mathbf{S}_d^{-1}$$

Y se sigue, como debía suceder

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \quad (64)$$

cumpléndose la hipótesis nula de inexistencia de deformación en el ajuste virtual formulado.

Es importante considerar en línea con cuanto antecede que siempre la solución de la red propuesta (15) a ajustar, resolver e interpretar, obviamente es de la forma $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d$.

Y en la práctica dicho vector solución calculado y siempre aproximado, tendrá algún valor, pequeño o grande $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{0}$, aunque a priori constase la indeformabilidad de la red. Solo en pura teoría puede aceptarse el caso de inexistencia de deformación con un resultado de cálculo $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$. Al aplicar ajustes coordinados según (59) y (64) se obtendrá $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1 = \mathbf{d} - \mathbf{d} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Redundante.

Es banal que el algoritmo de ajustes coordinados en consideración recíproca, y aplicación y significado prácticos, evidentemente no es cierto. Efectivamente la deformación virtual impuesta $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ no implica $\mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$, sino $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$.

Conviene tener presente esta distinción para entender en detalle lo que sigue, puesto que es preciso emplear ambas notaciones y distinguir su significación.

Del mismo modo se tiene, según texto y teoría conocida y citada:

$$\lambda_1 = -\mathbf{P}_d (\mathbf{A} \mathbf{d} - \mathbf{K}_d) = \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d \quad (65)$$

$$\lambda_2 = -\mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2) = -\mathbf{S}_d \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d \quad (66)$$

que es inmediato en (60) y (61) y también

$$\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d = \mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_{d1} + \mathbf{D} (\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d) = \mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_{d1} \mathbf{R}_{d1} + \mathbf{R}_{d2}^T \mathbf{P}_{d2} \mathbf{R}_{d2} \quad (67)$$

¹ M. CHUECA ET ALT. "Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia", Pg. 115 y sig., expresiones (446), (447), (448).

Ecuación fundamental que se aplicó en diversos algoritmos muy importantes, como en la deducción del recinto más general de error. Siguiendo el razonamiento

$$\mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_{d11} = - (\mathbf{d}_1^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d - \mathbf{K}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{K}_d) \quad (68)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2)^T \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2) = \mathbf{d}_1^T \mathbf{S}_{d1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_{d1}^{-1} \mathbf{d}_1 \quad (69)$$

Expresión así mismo fundamental con $\mathbf{d}_1 =$ solución de (15), resultado real a adoptar en su caso del ajuste de deformaciones planteado.

Y escribiremos

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d) &= \mathbf{d}_1^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}) \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T (\mathbf{A}^T \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{d}_1 = \\ &= \mathbf{d}_1^T \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T (2\mathbf{Q}_{xx})^{-1} \mathbf{d}_1 \end{aligned} \quad (70)$$

y teniendo en cuenta que evidentemente

$$\mathbf{d}_1^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}) \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_d^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_{d1}^{-1} \mathbf{d}_1 \quad (71)$$

resulta

$$\mathbf{Q}_{d1} = \mathbf{Q}_{x2x2} + \mathbf{Q}_{x1x1} = 2\mathbf{Q}_{xx} \quad (72)$$

como debía ser.

Por lo tanto, en el ajuste coordinado resuelto, formado por un primer vector real \mathbf{O}_{Td} de m observables diferencia de los que hemos llamado \mathbf{O}_{T2} y \mathbf{O}_{T1} , con ajuste conjunto del modelo matemático formado por la diferencia de sus formas lineales, y al que se ha agregado un vector adicional virtual de n observables diferencia, de peso a priori tan grande como queramos (tendente a infinito) y relacionados por la ecuación vectorial impuesta $\mathbf{d} = 0$, la deformación de la red es forzosamente nula.

De la muestra de $m + n$ observables ordenados, cuyo ajuste conjunto resulta de deformación nula, podemos detraer los virtuales n últimos, que aisladamente también suponen deformación nula, y expresar el estimador a posteriori de la varianza de su observable de peso unidad. De acuerdo con la teoría y notación conocidas, escribiremos (67):

$$\mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_{d1} \mathbf{R}_{d1} + \mathbf{R}_{d2}^T \mathbf{P}_{d2} \mathbf{R}_{d2} = \mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_{d11} + \mathbf{D}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d) \quad (73)$$

de donde

$$\mathbf{R}_{d2}^T \mathbf{P}_{d2} \mathbf{R}_{d2} = \mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_{d11} + \mathbf{D}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d) - \mathbf{R}_{d1}^T \mathbf{P}_{d1} \mathbf{R}_{d1} \quad (74)$$

pero es claro que R_{d11} a posteriori en el ajuste conjunto se obtiene inmediatamente particularizando (15) para $d = 0$, es decir:

$$R_{d11} = -K_d = -(K_2 - K_1) = -(O_{T2} - O_{T1}) = -(C_2 - R_2 - C_1 + R_1) \quad (75)$$

Con $C_2, C_1 =$ vectores de observables corregidos en las campañas 2ª y 1ª.

pero, salvo en caso de deformaciones muy notables, que se detectan sin necesidad del riguroso cálculo que estamos desarrollando, o de observaciones poco cuidadosas que hemos de rechazar de antemano, puede suponerse muy poca variación entre C_2 y C_1 . En el límite, bajo la hipótesis nula $H_0: d = 0$ que en el ajuste (15) implica $d = d_1 = 0$ en ajuste directo y $d = d_1 - d_1 = 0$ en ajuste coordinado (59), indiferente para nuestros fines, es evidente que su cumplimentación exacta exige que O_{T2} haya repetido idénticamente la primera observación O_{T1} , se tendrá sucesivamente $O_{T2} = O_{T1}, R_2 = R_1, O_{T2} + R_2 = O_{T1} + R_1$ y se cumplirá rigurosamente que $C_2 = C_1$. Es un razonamiento perfectamente análogo al que se utilizó con buen éxito en el establecimiento del recinto (hipercuádrica) de error más general. El solución del trabajo en presencia se referirá siempre a deformaciones diferenciales definidas por vectores d , de magnitud limitada inferiormente por el vector sensibilidad d_s por debajo de cuyo valor no es posible distinguir la existencia o no de deformación y superiormente por valores no diferenciales y suficientemente elevados como para aplicar la doctrina general clásica.

En el supuesto establecido, el vector R_{d11} de residuos del ajuste conjunto o de deformación nula forzada o con la condición $d = 0$ resulta, si

$$C_2 \approx C_1$$

$$C_2 - C_1 \approx 0$$

$$R_{d11} = R_2 - R_1 \approx 0 \quad (76)$$

que es el mismo vector (14) del ajuste sin deformación nula forzada. Luego, cuanto mejor se cumpla el supuesto previsto, más cierto será que los residuos R_{d11} y sus componentes R_2 y R_1 son invariantes con y sin dicha deformación.

Aceptándolo así, es lícito afirmar que muy aproximadamente

$$R_{d1}^T P_{d1} R_{d1} \approx R_{d1}^T P_d R_{d11} \quad (77)$$

y finalmente

$$R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} \approx D(R_d^T P_d R_d) = d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1 = \sum_{m+1}^{m+n} p_{d2i} R_{d2i}^2 =$$

= valor conocido (78)

confirmando y ampliando lo demostrado en (69).

Así, (78) es conocido por serlo $d_1 = (A^T P_d A)^{-1} A^T P_d K_d =$ solución (26) que podemos llamar clásica del ajuste real propuesto (15) y $Q_{d1} = 2(A^T P_d A)^{-1} = 2Q_{xx1}$, conocido e invariante en virtud de (27).

La importancia de (78), básica para la interpretación estadística de resultados deseada, justifica que nos extendamos en las reflexiones que siguen. La

expresión $R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} = \sum_{m+1}^{m+n} p_{d2i} R_{d2i}^2$ corresponde a los n observables

virtuales-deformación del tipo (16) $O_{Td} = O_{T2} - O_{T1}$ adicionados al ajuste inicial. Entendidos a priori como exactos, su peso tenderá a infinito y los residuos correspondientes a cero. Resulta lícito escribir también a priori, según teoría de límites

$$\lim_{\substack{P_{d2} \rightarrow \infty \\ R_{d2} \rightarrow 0}} R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} = \lim_{\substack{P_{d2i} \rightarrow \infty \\ R_{d2i} \rightarrow 0}} \sum_{m+1}^{m+n} p_{d2i} R_{d2i}^2 = \infty \cdot 0 = \text{forma indeterminada}$$

Efectuado el ajuste y a posteriori, podemos aceptar como verdadero valor en el límite del producto anterior al resultado obtenido, finito. Es decir:

$$\lim_{\substack{P_{d2} \rightarrow \infty \\ R_{d2} \rightarrow 0}} R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} = \lim_{\substack{P_{d2i} \rightarrow \infty \\ R_{d2i} \rightarrow 0}} \sum_{m+1}^{m+n} p_{d2i} R_{d2i}^2 = d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1$$

Una primera conclusión es que en general resultará inasequible aun cuando se dispusiera de condiciones adicionales *que quizás complicaran aún más el problema* definir los límites o verdaderos valores de los elementos de la matriz diagonal de pesos P_{d2} y el vector de residuos R_{d2} . Afortunadamente no es necesario, según se verá, para lograr los fines propuestos.

Basta con entender que, aún cuando tiendan a cero los componentes a priori del vector de residuos de los n observables virtuales de peso tendiendo a infinito que generan la expresión coordinada $d = 0$, al realizar el ajuste coordinado de los $m+n$ observables y en el vector correspondiente de residuos ajustados a posteriori no tienen por qué ser nulos.

Y no lo serán nunca, como se demuestra en (63) y (78) porque la práctica de cálculo siempre dará lugar a alguna cifra de deformación, sea significativa o no, cumpliéndose que $Dd = d_1 \neq 0$, con lo que se verificará $R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} \approx D(R_d^T P_d R_d) = d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1 \neq 0$ y en definitiva $R_{d2} \neq 0$.

En consecuencia, podemos escribir en toda su generalidad y con las distintas expresiones y notaciones utilizadas el estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad de la muestra de n observables virtuales que dan lugar a deformación nula según las expresiones

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{on}^2 &= \frac{D\left(R_d^T P_d R_d\right)}{n} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{n} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{n} = \frac{d_1^T Q_d^{-1} d_1}{n} = \\ &= \frac{R_{d2}^T P_{d2} R_{d2}}{n} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2}{n} = \text{conocido}\end{aligned}\quad (79)$$

si se trata de red ligada, solución determinista, a la que puede reducirse la inmensa mayoría de los supuestos prácticos profesionales, o bien

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{on}^2 &= \frac{D\left(R_d^T P_d R_d\right)}{R(S)} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^+ d_1}{R(A^T P A)} = \frac{d_1^T Q_{d1}^+ d_1}{R(Q_{xx})} = \frac{d_1^T Q_d^+ d_1}{R(Q_d)} = \\ &= \frac{R_{d2}^T P_{d2} R_{d2}}{R(Q_d)} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2}{R(Q_d)} = \text{conocido}\end{aligned}\quad (80)$$

si se trata del improbable aun cuando posible caso de red libre, solución pseudoinversa, particularización del caso inversa generalizada.

Recordemos las matrices S , A , $Q_{d1} \equiv Q_d$, Q_{xx} , y sus pseudoinversas tienen el mismo rango.

Cumpléndose de nuevo que $\hat{\sigma}_{on}^2 = 0$ si y solo si se cumple H_o : $d_1 = 0$, es decir, si no existe deformación. Y como, a efectos de cálculo y una vez más insistimos en que siempre resultará un vector $d_1 \neq 0$, será preciso, adelantando ideas, preguntarse no por la nulidad de d_1 , sino por el valor frontera que debe alcanzar en cada caso para que se pueda afirmar que existe deformación no despreciable y detectable por el cálculo. Es el problema fundamental de sensibilidad de la red, del que nos ocuparemos muy pronto. Se trata, repetimos, de definir a partir de que valor podemos afirmar y cifrar con fiabilidad suficiente la existencia de deformación. Por debajo del mismo, existirá o no deformación, pero no podremos afirmarlo ni negarlo.

Y es claro que adicionalmente otra cuestión esencial será tener en cuenta que es preciso interpretar en conjunto un resultado que se expresará en forma vectorial. Así, las variaciones de uno o varios componentes aislados de d_1 , pueden no ser significativas o incluso inducir a error. Es esencial establecer criterios de interpretación conjunta. Veremos cómo.

Cualquier muestra de observables-deformación o el conjunto de la red en estudio en cualquier momento de la evolución de la misma que cumpla los condicionados de invariancia a priori establecidas anteriormente en este mismo trabajo podrá contrastarse bajo la hipótesis alternativa o nula de existencia o no de deformación, o de aceptación o rechazo del ajuste, además de mediante los tests de aplicación general a cualquier ajuste mínimo cuadrático, mediante nuevos tests estadísticos adecuados utilizando (79) u (80) como varianzas de comparación,

conclusión esencial del estudio de deformaciones en redes locales .Es fundamental comprender que la doctrina y praxis que nos ocupa se basa en que dichas expresiones relacionan el estadístico $\hat{\sigma}_{0n}^2$, representativo de los observables, con el vector d_1 , representativo de la deformación real, resultado deseado del trabajo . Ello justifica el esfuerzo realizado para su deducción y formulación.

También son obviamente de aplicación argumentación y conclusiones en todo análogas a las establecidas en el algoritmo de recintos de error.

Y para terminar, obsérvese que n es igual al número de coordenadas o variables de la red. Así, se cumple que:

$$n = W \cdot N \quad (81)$$

$W \in 1,2,3$

Siendo

N = número de vértices de la red

Y $W = 1$ si es una red altimétrica

$W = 2$ si es una red planimétrica

$W = 3$ si es una red tridimensional

por lo tanto, podrá contrastarse no solamente la deformación de la totalidad de la red, sino la de una fracción arbitraria o incluso la de cualquier punto de la misma, bastando con utilizar al efecto, como más adelante se verá, la muestra de los uno, dos o tres valores de los d_i correspondientes a la cota, coordenadas planimétricas, o tridimensionales, de la fracción de red o vértice que se desee individualizar, y calcular el estimador de la varianza de peso unidad correspondiente.

3.2.- TEST ESTADISTICOS DE CONTROL

La interpretación de resultados debe iniciarse depurando los observables-deformación $O_{Td} = O_{T2} - O_{T1}$ siguiendo procedimientos cercanos a los clásicos tal y como se verá más adelante en la praxis de este trabajo.

Seguidamente se contrastará su precisión a priori y posteriori, manteniendo el criterio de que a través del ajuste los observables no mejoran sensiblemente su precisión, y en consecuencia la metodología de cálculo pretende lograr la mejor y más rigurosa interpretación de los resultados obtenidos antes que su mejora en gabinete que se considera más bien ilusoria.

Así el esfuerzo se dirigirá a establecer la sensibilidad del trabajo por distintos procedimientos, alcanzar y cifrar unos resultados a posteriori coherentes con los supuestos a priori e interpretarlos estadísticamente con el mayor rigor posible, en conjunto, por zonas e individualizadamente. Siempre ofreciendo soluciones en

valores más probables acompañados de interpretaciones geométricas según recintos de incertidumbre y poder de afirmación de los mismos.

3.2.1.- PRIMERA APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA. ENSAYO INICIAL CON EL T- TEST DE FISHER. CONSIDERACIONES DE INDOLE PRÁCTICA

Damos por bien conocidos, aplicados y superados, los tests que ya podemos llamar clásicos del ajuste de la red (15) propiamente dicho (F-Test, χ^2 -Test, Test de Baarda...).

Establecido lo anterior, de acuerdo con lo expuesto y ampliando la doctrina desarrollada, es lícito aplicar de nuevo en un primer intento de seguimiento, cuantificación y control de errores de 1º y 2º orden², así como de establecimiento de la sensibilidad de la red, el conocido Test de Fisher-Snedecor, pero ahora tanto bajo la hipótesis nula como bajo la hipótesis alternativa de existencia o no de deformación apreciable, con propósito adicional de definir un umbral mínimo de deformación prefijado por la exigencia del trabajo y que debe ser compatible con la metodología e instrumentación empleados. Todo ello constituiría en una palabra, el fruto de un Proyecto adecuado y cuidadoso.

Con la notación usual escribiremos en (15) bajo hipótesis nula:

$H_0: d = 0$ (o lo que es lo mismo $d_1 = 0$ en ajuste coordinado con deformación nula forzada)

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{n\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{n\sigma_{T_0}^2} = F \approx F_{n,\infty} \quad (82)$$

en supuesto determinista.

$\sigma_{T_0}^2$ = estimador a priori de la varianza del observable de peso unidad relacionado con el vector de observables-deformaciones O_{Td} correspondiente al ajuste de dos campañas con deformación nula forzada. *Conceptualmente son distintos $\sigma_{T_0}^2$ y σ_{od}^2 , que hemos empleado hasta ahora. Pero $\sigma_{T_0}^2$ es un estimador a priori de una población procedente de una muestra de $m + n$ observables, donde n son virtuales, y σ_{od}^2 es estimador a priori de la misma población procedente de los m observables reales. Siendo así que ambos parámetros existen, solo podrán estimarse a*

² Recordemos.

Error de Primer Orden:

Rechazar H_0 siendo cierta. Aceptar H_1 siendo falsa.

Error de Segundo Orden:

Rechazar H_1 siendo cierta. Aceptar H_0 siendo falsa.

partir de los m valores reales, en ambos casos y ofrecerán el mismo resultado o muy parecido, sea cual fuere el criterio de estimación adoptado. Así, en la práctica de cualquier trabajo de calidad aceptaremos $\sigma_{T_0}^2 \cong \sigma_{od}^2$, asumiendo que pueden utilizarse indistintamente..

Así por ejemplo, en primera determinación de control de deformación será el estimador de dicha denominación en (15). También suele adoptarse $\sigma_{T_0}^2 = s^2 = 1$. Sin embargo ello no deja de entrañar riesgos y es en cualquier caso esencial cerciorarse siempre de que se ha establecido rigurosamente el valor de $\sigma_{T_0}^2$ cualquiera que sea la determinación en presencia, y tanto en fase de determinación previa de sensibilidades como en campañas posteriores de ajuste propiamente dicho.

En red libre, solución pseudoinversa, se tendrá:

$H_0: d = 0$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^+ d_1}{R(Q_{d1}) \sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^+ d_1}{R(Q_{d1}) \sigma_{T_0}^2} = F \approx FR(Q_{d1}), \infty \quad (83)$$

El Test permite contrastar en el conjunto de la red la aparición o no de deformaciones, con un nivel de significación α , que generalmente se toma como uno de los valores $\alpha = 0,001 - 0,01 - 0,05$, aunque como en el momento presente es asequible el acceso prácticamente a cualquier función estadística de distribución en forma continua, libre de tabulaciones restrictivas, los valores de α consignados deben entenderse solo como orientación usual. El proyectista puede y debe elegir el que entienda más apropiado en cada caso.

En lenguaje estadístico podría terminar la cuestión en este punto afirmando que “se acepta H_0 a nivel de significación α ”. Y merece la pena considerar que, en numerosos trabajos de hasta mediana precisión, dilatada experiencia enseña que basta con ello.

Y ello no solo en el caso que nos ocupa, sino también con otras hipótesis nulas. Recordemos la muy extendida contrastación de normalidad en la distribución de observables o sus residuos por aplicación del F-Test de Pearson, que utiliza la misma variable estadística (82), (83) pero con otra hipótesis nula, en este caso considerando como H_0 que la distribución de observables y residuos es normal proponiendo adoptar decisiones con niveles de significación muy bajos, basados en la consuetudinaria experiencia de que la distribución normal³ es lo que sucede “siempre”. Sin embargo, hoy no es nuestro caso.

³ Cfr. Parte I de la Tesis Doctoral “Innovaciones y avances en Ajustes Gaussianos de Redes Locales: Metodos de Triangulateración homogénea y de Incrementos de Coordenadas. Interpretación de

No obstante siguiendo la exposición y en definitiva, *se rechazará la hipótesis nula, aceptándose la existencia de deformación sin que pueda achacarse a error de muestreo la decisión adoptada, y con el elevado poder de afirmación $(1-\alpha)$ si*

$$F \geq F_{n,\infty,1-\alpha} \quad (84)$$

en red ligada (82), o bien

$$F \geq F_{R(Q_{d1}),\infty,1-\alpha} \quad (85)$$

en red libre (83)

Es en teoría mínimo el riesgo definido por α de cometer un error de Primer Orden, o “Rechazar H_0 siendo cierta y Aceptar H_1 siendo falsa”. *Aún así, ello podría dar lugar en la práctica profesional a la recomendación de precauciones innecesarias, con el mal empleo en su caso de los recursos correspondientes y serio riesgo de reproche y amargas consecuencias para el técnico implicado.*

Pero si no se cumple (84) y (85), es decir si

$$F < F_{n,\infty,1-\alpha} \quad (84\text{-bis})$$

$$F < F_{R(Q_{d1}),\infty,1-\alpha} \quad (85\text{-bis})$$

no se rechaza la hipótesis nula H_0 , aceptándose en principio aunque como sabemos a expensas de confirmación o no mediante el acceso a más información complementaria, quedando en pie el riesgo de comisión de error de segundo orden, o “Rechazar H_1 siendo cierta y Aceptar H_0 siendo falsa”. *En este caso, el exceso de optimismo del técnico puede llegar a resultarle profesionalmente letal y con dolorosas consecuencias judiciales.*

El Test es evidentemente de una sola punta o dirección, puesto que la nulidad de deformación, supuesto óptimo de cumplimiento de H_0 implica $d_1 = 0$ y por tanto

$$F_{\text{óptimo}} = 0 \quad (86)$$

Puede aplicarse también a dos muestras finitas, en red ligada y libre y generalmente a posteriori ambas, según

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{n,m-n} \quad (87)$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{R(Q_{d1}), m-R(Q_{d1})} \quad (88)$$

con el mismo tratamiento y consideraciones del caso anterior.

En cualquier caso, el F-Test resulta claramente insuficiente para satisfacer las necesidades técnicas actuales. Lo que junto con una dilatada experiencia nos permite afirmar que no supone divagación ni pérdida de tiempo la exposición que antecede, teniendo en cuenta la demostrada constatación de situaciones con más que mediana responsabilidad que se han resuelto y tal parece se siguen resolviendo solamente con la precaria aplicación antes descrita, de peligrosas connotaciones. La inseguridad que conlleva urge a prevenir al profesional confiado en exceso, tal vez por falta de información, en tanto se avanza en la doctrina existente, y dotarse de medios adecuados para mejor afrontar el ejercicio de la actividad técnica interesada. Vamos a ello.

El Test en su versión de F-Test de dos puntas compara e interpreta poblaciones y muestras de observables a priori y posteriori y, en buena doctrina es preceptiva su aplicación para completar y aceptar o rechazar el trabajo con el rigor y poder de afirmación necesarios matemático y estadístico. Sin embargo, en su caso más general, el algoritmo y conceptos aplicables a observables virtuales exactos a priori y a posteriori no son sencillos. Hasta donde se nos alcanza lo hemos logrado en teoría y praxis utilizando observables GNSS, con metodología de ajustes coordinados e incrementos de coordenadas y observaciones de punto fijo a punto variable como mas adelante se expondrá. Todo ello es indiscutiblemente novedoso e innovador para una temática tecnológica importante en Microgeodesia representando la moderna respuesta gaussiana, que se entiende puede afrontar cualquier comparación razonable ante cualquier otra solución posible, clásica o moderna.

3.2.2.- ESTABLECIMIENTO DE UNA VARIABLE ESTADÍSTICA ESPECÍFICA. DESARROLLO CON LAS DISTRIBUCIONES χ_v^2 Y $\chi_{v,\lambda}^2$

3.2.2.1- LA VARIABLE ESTADÍSTICA ρ

En otro orden de ideas y según sabemos y hemos deducido anteriormente, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T0}^2} &= \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{n} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{n\sigma_{T0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{n\sigma_{T0}^2} = \\ &= F \approx F_{n,\infty} \approx \frac{1}{n} \chi_n^2 = \frac{1}{n} \rho \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2} &= \frac{d_1^T (2Q_{xx})^+ d_1}{R(Q_{d1})} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^+ d_1}{R(Q_{d1}) \sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^+ d_1}{R(Q_{d1}) \sigma_{To}^2} = \\ &= F \approx FR(Q_{d1}),_{\infty} \approx \frac{1}{R(Q_{d1})} \chi_{R(Q_{d1})}^2 = \frac{1}{n} \rho \end{aligned} \quad (90)$$

donde ponemos de manifiesto el fundamental parámetro ρ específico de cada red que es lícito adoptar y así lo haremos como variable estadística de control en la doble acepción χ_n^2 y $\chi_{n,\lambda}^2$. En primera aplicación permite plantear bajo la hipótesis nula los casos (84) y (85), mediante un χ^2 - Test , en la forma usual

Ho: $d = 0$

$$n \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{\sigma_{To}^2} = \chi^2 \approx \chi_n^2 = \rho \quad (91)$$

$$R(Q_{d1}) \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^+ d_1}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^+ d_1}{\sigma_{To}^2} = \chi^2 \approx \chi_{R(Q_{d1})}^2 = \rho \quad (92)$$

en los dos casos posibles: determinista y red libre, solución pseudoinversa.

De nuevo y por ser el Test evidentemente unidireccional, con óptimo en $\chi^2=0$ para $d = 0$ ($d_1 = 0$ en ajuste coordinado con deformación nula forzada) se planteará según:

$$\rho = \chi^2 \geq \chi_{n,\alpha}^2 \quad (93)$$

$$\rho = \chi^2 \geq \chi_{R(Q_{d1}),\alpha}^2 \quad (94)$$

cuyo cumplimiento hace preceptivo el rechazo de la hipótesis nula y supone la aceptación de existencia de deformación con una fiabilidad de $1 - \alpha$. La probabilidad de cometer error de primer orden es α . Y si

$$\rho = \chi^2 < \chi_{n,\alpha}^2 \quad (93\text{-bis})$$

$$\rho = \chi^2 < \chi_{R(Q_{d1}),\alpha}^2 \quad (94\text{-bis})$$

no se rechaza la hipótesis nula, y se acepta con las mismas consideraciones antes efectuadas acerca de probabilidad de comisión de error de segundo orden.

Recordemos que el conocido estadístico χ_v^2 de Pearson se define mediante el sumatorio y la notación :

$$\chi_v^2 = \sum_1^v \theta_i^2 \quad (95)$$

siendo

$$\theta_i \approx N(0,1) \quad (96)$$

cuya función de distribución o probabilidad es

$$F = F\left(\chi_v^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\chi_v^2\right)^{\frac{v-2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\chi_v^2\right)} \quad (97)$$

o lo que es lo mismo

$$F = F\left(\chi_v^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \cdot \left(\frac{v-2}{2}\right)!} \left(\chi_v^2\right)^{\frac{v-2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\chi_v^2\right)} \quad (98)$$

función muy utilizada si v es un número par.

demostrándose que media y varianza valen

$$\text{media} = E\left(\chi_v^2\right) = \mu_{\chi_v^2} = v \quad (99)$$

$$\text{varianza} = \sigma_{\chi_v^2}^2 = 2v \quad (100)$$

En cuanto antecede es lícito según ya se dijo operar con la sustitución del subíndice 1 por k en aplicación y para indicar controles sucesivos.

La batería de test explicada es de aplicación a toda la red o alternativa y arbitrariamente a parte de ella, e incluso a un solo vértice o una sucesión de ellos. Permite por lo tanto un análisis exhaustivo del supuesto en estudio, desde el punto de vista descrito.

Y aplicando el método de incrementos de coordenadas podrá reducirse el trabajo al caso determinista, casi sin posible excepción.

Concluyendo, será muy difícil considerar a una red exenta de deformación como deformada. Error de primer orden. Pero puede muy bien suceder el caso contrario de considerar a una red deformada como exenta de deformación. Error de segundo orden.

Además, aún aceptando la poco creíble inexistencia absoluta de deformación, su detección rigurosa requeriría en la práctica instrumentación y metodología perfectos y resultados perfectos consecuencia de campañas de observación sucesivas absolutamente idénticas. Lo que es simplemente imposible. En desalentadora consecuencia y aparentemente, poco hemos adelantado con el cambio de variable estadística propuesto.

Entonces cabe reflexionar que la realidad física nos impone estudiar nuestras redes no solo bajo la hipótesis nula sino también y tal vez con mayor verosimilitud,

bajo la hipótesis alternativa de existencia de deformación. Y es necesario definir lo que podemos y debemos llamar deformación. Aunque todo ello generalmente complica doctrina y praxis, como vamos a ver.

Además tampoco es menos cierto que a priori tanto la hipótesis nula como la alternativa no son equiprobables. Una red no puede aceptarse a priori y en general al 50% como inalterable o deformada. Cualquier conocimiento a priori de la realidad física (o la práctica de una virtualidad impuesta) inclina en un sentido u otro la presumible caracterización del fenómeno y puede tener un valor decisivo a la hora de interpretar resultados.

En ello se basa la antigua y ahora muy recuperada y extendida Estadística Bayesiana⁴, que en primera aproximación podemos entender como el cálculo de probabilidades de sucesos de los que se tiene a priori experiencia a un nivel estimable y/o son función de la certeza de que previamente han sucedido otros sucesos relacionados con los primeros. Con aplicación de conceptos bayesianos pero tratando de eludir los prolijos cálculos que modernamente entrañan, de poder de afirmación en nuestra opinión a lo menos no suficiente y satisfactoriamente contrastados, vamos a tratar de abordar la cuestión por un camino menos prolijo y que entendemos original e innovador.

Bajo la hipótesis alternativa o de existencia de deformación en (15)

$H_1: d \neq 0$ (o $d_1 \neq 0$ en ajuste coordinado)

es preciso realizar algunas consideraciones previas, dirigidas a conseguir una batería de tests que analicen el error de 2º orden, de aceptación de la hipótesis nula siendo errónea, con la potencia β y nivel de significación α adecuados y usuales.

Así, según hemos visto anteriormente, en el supuesto de que se cumpla la condición

$$C_2 \approx C_1$$

se puede completar la expresión (78) y escribir

$$:R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} \approx D(R_d^T P_d R_d) = d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1 = \sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2 \quad (101)$$

Teniendo presente que a posteriori los “n”observables considerados en la muestra de índice

$$m+1 \leq i \leq m+n$$

⁴ THOMAS BAYES.(n.1702, Londres – m.1761, Tunbridge Wells. Kent). Teólogo por la Universidad de Edimburgo. Pastor presbiteriano en Tunbridge Wells hasta su muerte. Matemático, Estadístico. Defensor con éxito del cálculo diferencial newtoniano y sus “fluxiones” en diversos foros y circunstancias. En especial es memorable su refutación al obispo George Berkeley, antinewtoniano notable. Miembro de la Royal Society en 1742. Padre de la Estadística Inductiva Matemática. “La probabilidad de una realidad física, no es una propiedad objetiva de ella y se configura y afina a través del grado y calidad de conocimiento apriorístico que se disponga”. Su doctrina se publicó por la Royal Society después de su muerte. “Ensayo para la resolución de los problemas de la doctrina de probabilidades”(1763). Criticado y alabado fervientemente por distintas comunidades científicas, después de un último y largo periodo de olvido, vuelve ahora a tenerse en cuenta en diversas aplicaciones, como la que nos ocupa.

extraída del ajuste conjunto de m+n observables con condición de deformación nula forzada para toda la red ya no son de residuo nulo. Por tanto y en buena teoría, tampoco puede imputárseles peso tendente a infinito si (101) ha resultado finito y conocido, por serlo d_1 y Q_{d1} , resultados del ajuste gaussiano.

En base a lo expuesto es posible interpretar los resultados del ajuste conjunto bajo las dos hipótesis, nula y alternativa, *generando la mejor solución que en nuestra opinión puede aportarse en el presente estado de la doctrina.*

En efecto, sea en (15)

$H_0: d = 0$ (que implica según (63) $d_1 = D_d = 0$ en ajustes coordinados)

Con mayor razón, en (101)

$$d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1 = 0 \quad (102)$$

que también escribimos como

$$R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} = \sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2 = 0 \quad (103)$$

y que permite aceptar la distribución supuesta a posteriori de un residuo R_{d2i} cualquiera con $i \in \{ m+1, m+2, \dots, m+n \}$ como normal centrada de valor más probable la media $E(R_{d2i}) = \mu_{R_{d2i}} = 0$ y desviación típica $\sigma_{R_{d2i}} = \frac{\hat{\sigma}_{T_0}}{\sqrt{P_{2i}}}$. Es decir

$$R_{d2i} \approx N\left(0, \frac{\hat{\sigma}_{T_0}}{\sqrt{P_{2i}}}\right) \quad (104)$$

pudiéndose sustituir, incluso en alta precisión y según ya hemos visto, el estimador a posteriori $\hat{\sigma}_{T_0}$ por σ_{T_0} a priori, pues el F-Test de Pearson ha debido establecer que $\hat{\sigma}_{T_0} \approx \sigma_{T_0}$ como condición previa de aceptación. *Reiteramos que será preceptiva la cumplimentación con alto poder de afirmación del*

F-Test según $H_0: \hat{\sigma}_{T_0}^2 = \sigma_{T_0}^2$, $F = \frac{\hat{\sigma}_{T_0}^2}{\sigma_{T_0}^2}$ con $F_{\text{optimo}} = 1$. Incluso en la práctica

podrá aceptarse, aunque generalmente no sin riesgo y siempre previa adopción de adicionales y adecuadas precauciones y comprobaciones, $\hat{\sigma}_{T_0} \approx \sigma_{T_0} = s^2 = 1$.

En definitiva, es lícito escribir que bajo la hipótesis nula de no existencia de deformación, se cumplirá para un residuo cualquiera de la muestra R_{d2i}

$$H_0: d_1 = 0$$

$$R_{d2i} \approx N\left(0, \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{P_{2i}}}\right) \quad (105)$$

cuya tipificación inmediata da lugar a la variable aleatoria normal

$$\delta_{d2i} = \frac{\sqrt{P_{d2i}}}{\sigma_{T0}} R_{d2i} \approx N(0,1)$$

resultando, teniendo en cuenta (95) y (96)

$$\begin{aligned} \sum_{m+1}^{m+n} \theta_i^2 &= \sum_{m+1}^{m+n} \delta_{d2i}^2 = \sum_{m+1}^{m+n} \frac{P_{d2i} \cdot R_{d2i}^2}{\sigma_{T0}^2} = \frac{R_{d2i}^T P_{d2i} \cdot R_{d2i}}{\sigma_{T0}^2} = \\ &= \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{\sigma_{T0}^2} = \rho = \chi_n^2 = \text{conocido} \end{aligned} \quad (105\text{-bis})$$

como debía ser y avanzamos en (91), siendo obviamente extensible a (92)

Acerca de la licitud estadística de (104) puede plantearse alguna duda razonable al tratarse de residuos a posteriori, virtuales o no. Nos remitimos en su defensa a los principios, teoría y praxis establecidos para depuración de observables geodésicos por Grafarend, Teunissen y en especial, Baarda, a lo largo de las décadas sesenta a ochenta del siglo XX contrastados y aceptados universalmente por la comunidad científica y aún de completa actualidad⁵.

Entendemos que también son aplicables al control de deformaciones y así lo hacemos, avanzando e innovando sobre ellos.

Por consiguiente, y en primer lugar, el parámetro ρ puede considerarse en rigor como variable estadística conocida χ_n^2 función del vector de deformación d_1 cuya curva de probabilidad permite estudiar su comportamiento bajo la hipótesis nula $H_0 : d_1 = 0$ de ausencia de deformación.

Y completando el desarrollo y en el supuesto de existencia posible de deformación se cumplirá que $D_d \neq 0$, $d_1 \neq 0$ y se tendrá seguidamente

⁵ En la que sería interminable lista de trabajos publicados, destacamos cronológicamente los que que entendemos primeros y básicos:

BAARDA, W. "Statistical Concepts in Geodesy". Rijkcommissie voor Geodesie, Kanaalweg 4. Delft. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy. New series Volume 2 number 4. 1967.

BAARDA, W. "A testing procedure for use in Geodetic Networks". Rijkcommissie voor Geodesie, Kanaalweg 4. Delft. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy. New series Volume 2 number 5. 1968.

BAARDA, W. "S-transformations and Criterion Matrices". Rijkcommissie voor Geodesie, Kanaalweg 4. Delft. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy. New series Volume 5. Number 1. 1973.

P.J.Q TEUNISSEN "Quality control in geodetic networks". Papers of 3rd Course of the International School of Advanced Geodesy entitled "Optimization & Design of Geodetic Networks" pg. 526 y sig. Springer – Verlag. Berlin – New York. 1985.

$$d_1 Q_{d1}^{-1} d_1 \neq 0 \quad (106)$$

$$R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} = \sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2 \neq 0 \quad (107)$$

$$E(R_{d2i}) = \mu R_{d2i} \neq 0 \quad (108)$$

y la distribución de un residuo cualquiera de la muestra R_{d2i} bajo la hipótesis alternativa será normal por hipótesis, pero no centrada, con la expresión:

$$H_1: d_1 \neq 0$$

$$R_{d2i} \approx N\left(\mu R_{d2i}, \frac{\sigma_{T_0}}{\sqrt{P_{d2i}}}\right) \quad (109)$$

Donde $E(R_{d2i}) = \mu R_{d2i}$, valor mas probable o media de valor desconocido, correspondiente a un elemento arbitrario del vector muestra de observables virtuales bien conocido y que podría estimarse por el algoritmo usual, con presumible dificultad, lo que obviaremos porque su valor solo es intermedio en los cálculos que siguen y es posible resolverlos con una única estimación final, según se verá.

Y semitipificando también la distribución normal obtenida se expresan a continuación los dos supuestos anteriores bajo las hipótesis nula y alternativa conjuntamente y mediante la misma variable δ_{d2i} , aleatoria normal.

Así pues, escribimos sucesivamente

$$H_0: d_1 = 0$$

$$\delta_{d2i} = \frac{\sqrt{P_{d2i}} R_{d2i}}{\sigma_{T_0}} \approx N\left(\frac{\sqrt{P_{d2i}} \mu R_{d2i}}{\sigma_{T_0}}, 1\right) \approx N\left(\delta_{\mu d2i}, 1\right) \approx N(0,1) \quad (110)$$

por ser este supuesto la particularización correspondiente a $\mu R_{d2i} = 0$

$$H_1: d_1 \neq 0$$

$$\delta_{d2i} = \frac{\sqrt{P_{d2i}} R_{d2i}}{\sigma_{T_0}} \approx N\left(\frac{\sqrt{P_{d2i}} \mu R_{d2i}}{\sigma_{T_0}}, 1\right) \approx N\left(\delta_{\mu d2i}, 1\right) \quad (111)$$

En ambos casos se pone de manifiesto el parámetro de traslación o no centralidad más probable $\delta_{\mu d2i}$, notación que hemos preferido a la $\mu \delta_{d2i}$ para seguir la línea de trabajos anteriores.

Así podemos afirmar en definitiva que si no existe deformación, bajo la hipótesis nula, se tendrá

$$\begin{aligned} H_0: d_1 &= 0 \\ \delta_{\mu d2i} &= 0 \end{aligned} \quad (112)$$

y si existe deformación, bajo la hipótesis alternativa

$$\begin{aligned} H_1: d_1 &\neq 0 \\ \delta_{\mu d2i} &\neq 0 \end{aligned} \quad (113)$$

Expresiones ambas que en rigor podría utilizarse simultáneamente como doble test . Sin embargo, entendemos que para alcanzar los mejores resultados es imprescindible completar la exposición formulando una variable estadística de distribución conocida que sea función de $\delta_{\mu d2i}$ e interprete su variación en las aplicaciones prácticas.

La solución es sencilla escribiendo, para red ligada y libre respectivamente

$$\sum_{m+1}^{m+n} \delta_{d2i}^2 = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \chi_{n,\lambda}^2 = \rho \quad (114)$$

$$\sum_{m+1}^{m+n} \delta_{d2i}^2 = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^+ d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^+ d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \chi_{n,\lambda}^2 = \rho \quad (114\text{-bis})$$

Expresión del parámetro ρ , bien conocido, que teniendo en cuenta (110), (111), define una variable aleatoria estadística de distribución asequible y conocida, denominada $\chi_{n,\lambda}^2$ con n grados de libertad y parámetro de no centralidad o traslación λ . Y es el parámetro ρ que definimos en (91) y (92).

En efecto, como generalización del caso particular del conocido estadístico de notación genérica χ_v^2 , se define $\chi_{v,\lambda}^2$ mediante la notación y el sumatorio:

$$\chi_{v,\lambda}^2 = \sum_1^v \theta_i^2 \quad (115)$$

siendo

$$\theta_i \approx N(\theta_{\mu i}, 1) \quad (116)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^v \theta_{\mu i}^2 \quad (117)$$

cuya función de distribución es

$$G = G(\chi_{v,\lambda}^2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\chi_{v,\lambda}^2 + \lambda)}}{2^{\frac{1}{2}v}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\chi_{v,\lambda}^2)^{\frac{1}{2}v+i-1} \lambda^i}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v+i\right) 2^{2i} i!} \quad (118)$$

demostrándose que media y varianza valen

$$\text{media} = \mu_{\chi_{v,\lambda}^2} = v + \lambda \quad (119)$$

$$\text{varianza} = \sigma_{\chi_{v,\lambda}^2}^2 = 2(v + 2\lambda) \quad (120)$$

El estadístico χ_v^2 , ya conocido y empleado, es un caso particular de $\chi_{v,\lambda}^2$ con $\theta_i \approx N(0,1)$, normal tipificada, es decir $\theta_{\mu i} = 0$ en (116). También se deduce de la función de distribución de $\chi_{v,\lambda}^2$ particularizando para $\lambda = 0$ en (118), teniendo en cuenta que es necesario suprimir para $\lambda = 0$ en el sumatorio un término 0^0 sin sentido algébrico.

3.2.2.2.- EL PARÁMETRO DE NO CENTRALIDAD λ

Por lo expuesto, es ya inmediato definir la distribución del estadístico (114) como una $\chi_{v,\lambda}^2$, con $v = n$ grados de libertad en el caso de red ligada y parámetro de no centralidad λ definido en virtud de (116) y (117) y teniendo en cuenta (110) por:

$$\delta_{d2i} = N\left(\delta_{\mu d2i}, 1\right) \quad (121)$$

$$\lambda = \sum_{m+1}^{m+n} \delta_{\mu d2i}^2 \quad (122)$$

donde la determinación del parámetro λ de no centralidad permite establecer el test de control que denominaremos Jiménez/Quesada, apellidos de sus dos autoras⁶, sobre el vector de deformaciones genérico d en su conjunto con nivel de significación α y potencia β . En adelante J/Q -Test de teoría, interpretación y utilidad avanzando en línea paralela a otros dobles test estadísticos de universales y muy diversas aplicaciones. Así, en Geodesia el conocido W -Test de Baarda sobre los observables componentes del vector genérico O_T .

El parámetro λ formulado (122) puede expresarse en cualquier caso como una particularización de la ρ -variable en la forma :

$$\lambda = \sum_{m+1}^{m+n} \delta_{\mu d 2i}^2 = \rho_{\mu} = \rho(d_{\mu 1}) \quad (123)$$

para un determinado vector $d_1 = d_{\mu 1}$ a determinar. En definitiva:

$$\lambda = \rho_{\mu} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} \delta_{\mu d 2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T Q_{d1}^{-1} d_{\mu 1}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T (2Q_{xx})^{-1} d_{\mu 1}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T Q_{xx}^{-1} d_{\mu 1}}{2\sigma_{T_0}^2} \quad (124)$$

$$\lambda = \rho_{\mu} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} \delta_{\mu d 2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T Q_{d1}^+ d_{\mu 1}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T (2Q_{xx})^+ d_{\mu 1}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T Q_{xx}^+ d_{\mu 1}}{2\sigma_{T_0}^2} \quad (125)$$

red ligada o libre, reduciéndose la cuestión a lograr una estimación correcta del vector $d_{\mu 1}$.

Pero por definición (117) λ es una suma de cuadrados de valores más probables o medias, y se ha aceptado, en virtud de doctrina bien conocida las distribuciones normales seguidas de tipificación y semitipificación (105), (105-bis), (109), (110) y (111).

Por lo tanto, los valores más probables de los elementos R_{d2i} del vector de residuos ajustados R_{d2} son los obtenidos en el ajuste correspondiente cumpliéndose $R_{d2i} = E(R_{d2i}) = \mu R_{d2i}$ para un residuo cualquiera y $R_{d2} = E(R_{d2}) = \mu R_{d2}$ en expresión conjunta vectorial.

En consecuencia, podrá escribirse, en caso determinista

⁶ Ingenieras ambas en Geodesia y Cartografía. Doctora D^a Maria Jesús Jiménez Martínez y Profesora D^a Nieves Quesada Olmo, afectas a la Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Ingeniería Cartográfica y Agregadas a la Sección de Ingeniería Cartográfica y Geografía "Jorge Juan" de la Real Academia de Cultura Valenciana.

$$\lambda = \rho_{\mu} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} \delta_{\mu d_{2i}}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} P_{d_{2i}} R_{d_{2i}}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{\sum_{m+1}^{m+n} P_{d_{2i}} E(R_{d_{2i}})^2}{\sigma_{T_0}^2} = \quad (126)$$

$$= \frac{d_1^T Q_{d_1}^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{\mu 1}^T (2Q_{xx})^{-1} d_{\mu 1}}{\sigma_{T_0}^2}$$

Que implica también la lógica aceptación de d_1 como valor más probable del vector de deformación d . Al fin y al cabo, es el resultado que se espera de un ajuste gaussiano.

Y en definitiva puede escribirse también y como antes se hizo en el caso de los residuos, para un componente arbitrario de la deformación $d_{1i} = E(d_{1i}) = d_{\mu 1i}$ y para el vector en conjunto $d_1 = E(d_1) = \mu_{d_1} = d_{\mu 1}$.

Notación que adoptamos siguiendo el criterio de (110) y (111) con $\mu_{\delta_{d_{2i}}} = \delta_{\mu d_{2i}}$. El caso de red libre es ya banal.

4.- TEST ESPECIFICO DE CONTROL MICROGEODESICO DE DEFORMACIONES J/Q - JIMÉNEZ/QUESADA

La cuestión ahora estriba, según razonamiento y secuencia de cálculo expuestos, en interpretar el poder de afirmación del vector d_1 como medida de la deformación buscada, puesto que, sea cual fuere el trabajo en presencia y en mayor o menor cuantía, siempre d_1 será resultado del ajuste conjunto y distinto de cero.

Se trata de definir si dicho valor, contrastado por el o los oportunos tests de control estadístico, es significativo o no de acuerdo con las condiciones y objeto del trabajo en presencia.

En primer lugar es evidente la paridad de estructuras entre las expresiones del parámetro ρ y el de no centralidad λ . Particularizando para d_1 , conocido, las expresiones (91),(92) y (114), (114-bis) se obtiene un mismo valor de contraste

$$\rho = \chi_n^2 = \chi_{n,\lambda}^2 \quad (127)$$

Por otra parte, la expresión (97)/(98) permite conocer la curva de probabilidad o distribución

$$F = F(\chi_n^2) = F(\rho) \quad (128)$$

Y determinado λ la expresión (118) permite conocer también la curva de probabilidad o distribución

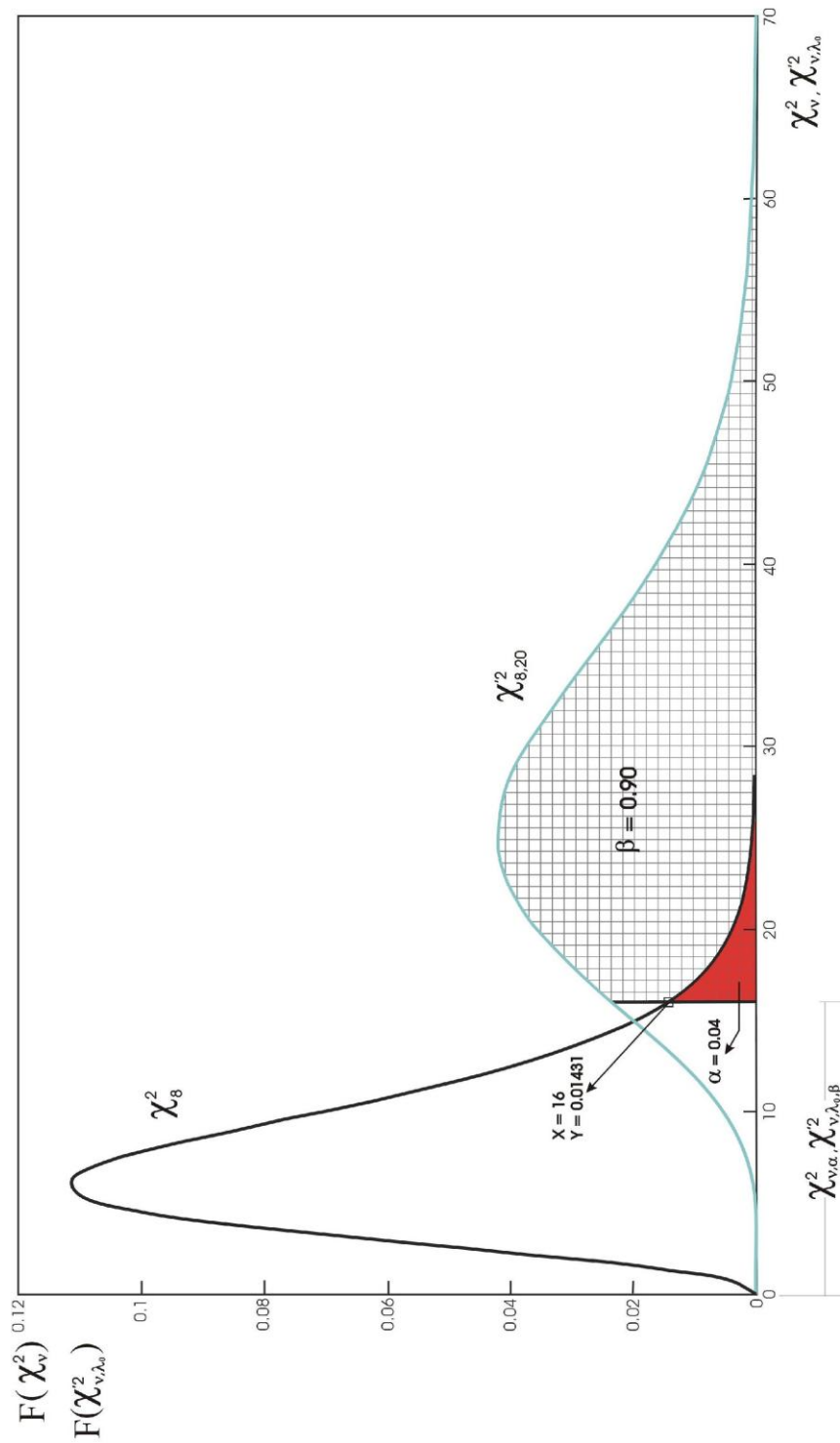
$$G = G\left(\chi_{n,\lambda}^2\right) = G(\rho) \quad (129)$$

y puede completarse la expresión (127) en la forma más general

$$\rho = \chi_n^2 = \chi_{n,\lambda}^2 = \frac{\sum_{d=2}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = J/Q - \text{variable} \quad (130)$$

Con lo que finalmente se está en condiciones de plantear, interpretar y resolver simultáneamente el nuevo J/Q - Test de estructura doble, nivel de significación α y potencia β , sobre la misma $\rho = J/Q$ - variable estadística de función $F = F(\rho)$ bajo la hipótesis nula $H_0: d_1 = 0$ y $G = G(\rho)$, bajo la hipótesis alternativa $H_1: d_1 \neq 0$. Con la disposición geométrica general del ejemplo representado en la figura 1.

Figura 1: Curvas de distribución χ^2_v y $\chi^2_{v,\lambda}$, con $v = 8$ y $\lambda = 20$. A partir del valor de abscisa 16 se obtiene el nivel de significación $\alpha = 0,004$ y la potencia de test $\beta = 0,90$



Así y suponiendo el problema resuelto en la figura 1 representamos la función de distribución

$$F = F\left(\chi_n^2\right) = F(\rho) \quad (131)$$

con parámetro nulo de traslación, o lo que es lo mismo, distribución prevista bajo la hipótesis nula H_0 de no deformación, y la función de distribución

$$G = G\left(\chi_{n,\lambda}'^2\right) = G(\rho) \quad (132)$$

con el parámetro $\lambda = \rho\mu$ de no centralidad establecido en (126) según se explicó, distribución prevista bajo la hipótesis alternativa H_1 de deformación significativa.

Y ya es inmediato escribir

$$\chi_{n,\alpha}^2 = \chi_{n,\lambda,\beta}'^2 = \rho\mu \quad (133)$$

que permite establecer niveles de significación α y potencia de test β , no arbitrarios, y aplicar el doble test para un mismo valor de la J/Q – variable particularizada para el parámetro específico de la red (133) calculando las dos integrales definidas

$$\alpha = \int_{\lambda=\rho\mu=\chi_{n,\alpha}^2}^{\infty} F\left(\chi_n^2\right) d\chi_n^2 \quad (134)$$

$$\beta = \int_{\lambda=\rho\mu=\chi_{n,\lambda,\beta}'^2}^{\infty} F\left(\chi_{n,\lambda}'^2\right) d\chi_{n,\lambda}'^2$$

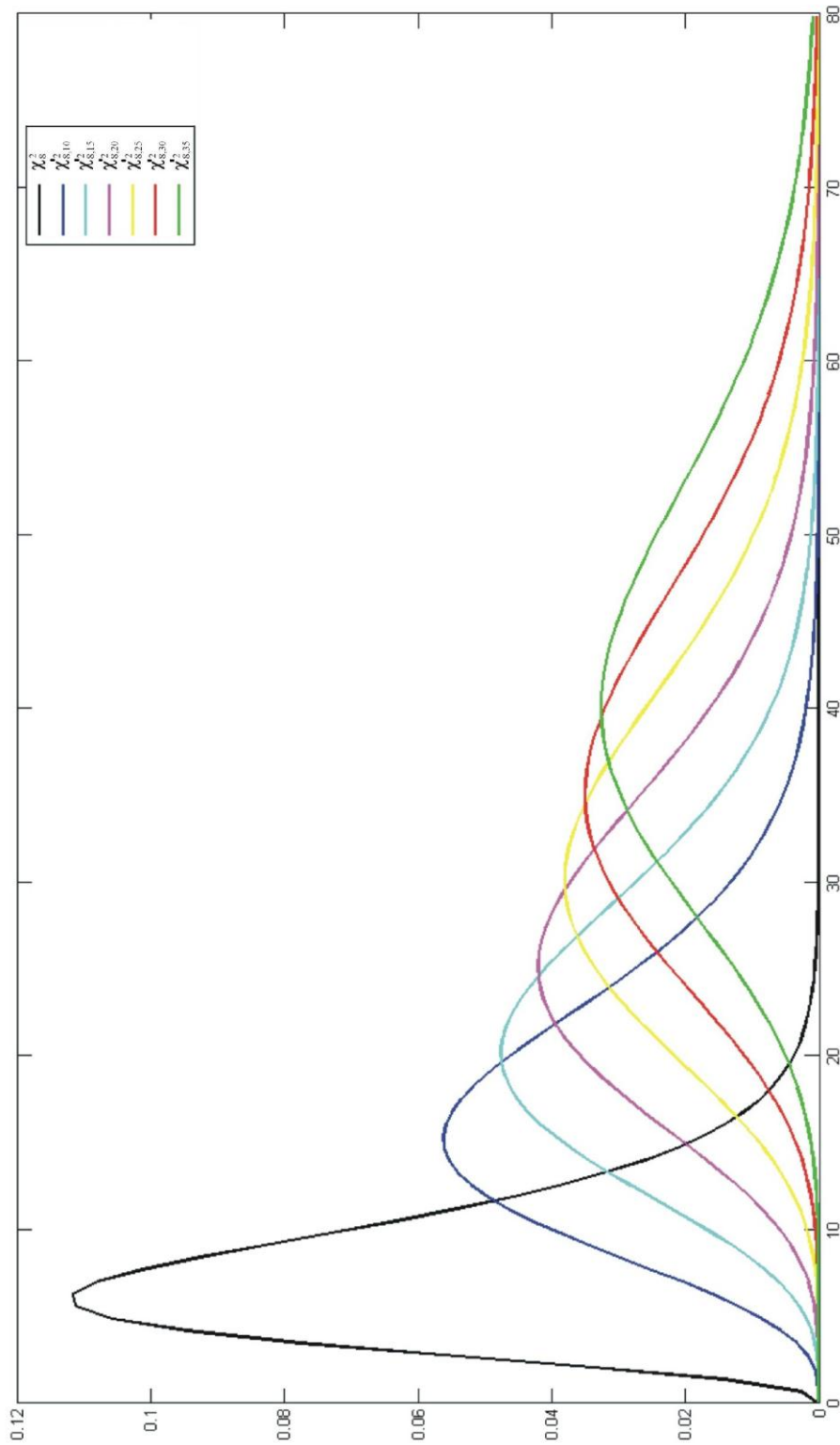
A cada valor de β establecido dentro de la horquilla de valores usuales corresponde un λ . Y conocido λ pueden representarse las curvas (131) y (132). Finalmente, con nivel de significación α y potencia de test β , podremos aplicar el doble test para cualquier valor arbitrario de ρ .

Y como debía ser, en general puede contrastarse la red inicial objeto del estudio (15) bajo la hipótesis nula $H_0 : d = 0$ ($\equiv d_1 = 0$) mediante cualquier $\rho = \chi_n^2 =$ arbitrario en la curva (131) y bajo la hipótesis alternativa $H_1 : d \neq 0$ ($\equiv d_1 \neq 0$) mediante el mismo $\rho = \chi_{n,\lambda}'^2$ en la curva (132).

Ambas curvas de distribución (131) y (132) son bien conocidas. Existe software informático que facilita su utilización.

Y ya es asequible abordar la estructuración y técnica de aplicación e interpretación del J/Q-Test propiamente dicho.

Figura 2: De izquierda a derecha curvas de distribución $\chi^2_{v,\lambda}$, con $v = 8$ y $\lambda = 0, 10, 15, 20, 25, 30$ y 35 . A medida que aumenta el parámetro de traslación λ la curva genérica se desplaza hacia la derecha



Es preciso interpretar con la fiabilidad más alta posible un escenario real que pueda describirse por parejas de curvas estadísticas de distribución tales que una de ellas será siempre la (131), mediante la que se estudiará la hipótesis nula $H_0 : d = 0$ ($\equiv d_1 = 0$), siendo la segunda la (132) que estudiará la hipótesis alternativa $H_1 : d \neq 0$ ($\equiv d_1 \neq 0$). Geométricamente, mientras la curva (131) permanece constante, las (132) se deformarán al crecer λ adoptando formas cada vez más parecidas a la distribución normal creciendo también el valor más probable según justificaremos, estudiaremos y cifraremos a continuación. En la figura 2 se representa la geometría descrita.

Es preciso tener en cuenta que, a diferencia de otros test de extendido uso que solamente estudian variaciones en componentes o elementos aislados e independientes de un vector solución, y según ya se ha indicado anteriormente, el J/Q – Test estudia el comportamiento conjunto del vector de deformaciones, cuyos elementos componentes en general deben considerarse variables a lo largo del tiempo, de tal manera de el crecimiento o disminución detectados de uno o varios de aquellos puede no ser significativo e incluso inducir a error.

En consecuencia se plantea la necesidad de establecer criterios de interpretación sobre el conjunto del vector de deformaciones y a este efecto se han obtenido buenos resultados mediante la aplicación del Método de Ajustes por Incrementos de Coordenadas ⁷ que se desarrolló y publicó en su momento, con observables GPS, GNSS,..., y ejes de punto fijo a variable. En dicho supuesto y en (130) puede conseguirse según veremos en la praxis siguiente que la matriz cofactor de deformaciones Q_{d1} resulte diagonal y de elementos iguales. Así pues

$$\rho = \chi_n^2 = \chi_{n,\lambda}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m+n} p_{d2i} R_{d2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (\text{diag } q)^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} =$$

$$= \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{m+n} d_{1i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{1}{q \sigma_{T_0}^2} |d_1|^2 = \text{Cte.} |d_1|^2 = J/Q - \text{variable}$$
(135)

La J/Q- variable es proporcional al cuadrado del módulo del vector deformación $|d_1|$, constante independientemente del n-edro de referencia adoptado. No así sus componentes. Lo que justifica con todo rigor la geometría de la Fig.2.

Por otra parte y según (119) y su particularización (99), la expresión de las probabilidades máximas de (131) y (132) se obtendrán particularizando respectivamente para $\rho = n$ y $\rho = n + \lambda$. Se conocerán pues los valores

⁷ Cfr. Parte II de la Tesis Doctoral “Innovaciones y avances en Ajustes Gaussianos de Redes Locales: Metodos de Triangulateración homogénea y de Incrementos de Coordenadas. Interpretación de resultados, densificación virtual equiprecisa y evolución en el tiempo”, de M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ. UPV. Valencia, 2013.

$$F_{\text{máx}} = F\left(\chi_n^2\right) = F(\rho) = F(n) = \text{constante y conocido} \quad (136)$$

$$G_{\text{máx}} = G\left(\chi_{n,\lambda}^2\right) = G(\rho) = G(n + \lambda) = \text{conocido para cada } \lambda \quad (137)$$

Y con lo expuesto ya se estaría teóricamente en condiciones de aplicar con rigor y buen éxito el J/O – Test. Sin embargo, queda una cuestión esencial. Teniendo la certeza de que, incluso en redes de deformación real nula siempre se obtendrá algún valor para el vector d_1 , es fundamental definir el umbral de significación del trabajo realizado. A dicho efecto se establece el módulo $|d_1|$, que en virtud de (135) permite deducir y expresar el valor de la variable ρ a partir del que resulta significativa la interpretación del J/O-Test, independientemente de los ejes de referencia adoptados. Es decir, lo que llamaremos sensibilidad de la red, según ya se enunció anteriormente.

4.1.- SOBRE LA SENSIBILIDAD DE REDES

Establezcamos en primer lugar una cuestión básica. Reiterando que, sea cual fuere el caso práctico en presencia, la instrumentación empleada y la metodología elegida, el resultado final real del trabajo con margen de incertidumbre despreciable será siempre distinto de cero y como hemos visto, tan solo mediante una deformación virtual impuesta puede asegurarse la obtención por cálculo de un vector $d = 0$ de componentes idénticamente nulos pero exento de significación física.

El vector representativo de la posible deformación será $d_1 \neq 0$, asociado y específico de la entidad física que se esté estudiando. Y en el supuesto, perfectamente probable y posible de que no haya existido deformación real, es preciso concluir que el resultado obtenido no será cierto y debido a multitud de causas, errores instrumentales, observacionales, de redondeo en cálculo... etc... ha arrojado un valor erróneo mensurable. Es más, como el valor exacto es cero, con todos los componentes del vector idénticamente nulos, se sigue que tanto el vector en sí mismo como todos los componentes del vector deformación $d_1 \neq 0$ obtenido representan errores absolutos.

Todo ello conduce como previamente se dijo a abordar la cuestión fundamental de determinación de la “sensibilidad” o umbral de precisión de la red por debajo del cual nada puede afirmarse o negarse y menos cifrarse con respecto a la posible deformación producida. A todos los efectos, no será distinguible una deformación real nula de otra, también real, inferior a la sensibilidad específica de una aplicación. Y es preciso convenir que dicha sensibilidad puede establecerse mediante consideraciones teóricas, por contrastación práctica con una red indeformable, o por métodos teórico-prácticos.

Es el momento de subrayar que, empleando la metodología e instrumentación que podemos llamar clásica, se ha venido utilizando la hipótesis.

$$d_s = kd_1 \quad (138)$$

estableciendo así k = factor de sensibilidad de la red.

$$d_s = \text{vector de sensibilidad}$$

Exige aceptar que todos y cada uno de los componentes de d_s puedan explicarse mediante una relación de semejanza de razón k respecto a sus homólogos en d_1 que parece difícil de justificar. Y ello es más cierto en el caso que nos ocupa, de observables GNSS y ajuste por incrementos de coordenadas varias veces enunciado, como veremos y deduciremos en seguida. Por ello nos limitamos a consignar su existencia.

Sin embargo, si se dispusiera de un a modo de banco de pruebas garante de indeformabilidad podría contrastarse sobre él y simultáneamente método e instrumentación.

Y es así que prácticamente siempre es posible realizar dos mediciones (o más) mediante observables GNSS sobre la propia red en estudio separadas por un lapso de tiempo suficientemente exiguo como para que pueda afirmarse que durante el mismo la red ha permanecido indeformable con alto poder de afirmación. En el límite, cinco o diez minutos. En dicho supuesto y práctica aceptamos como riguroso considerar el valor de seudodeformación así obtenido d_{sp} como vector de sensibilidad práctica de la red. Se tendrá

$$d_{sp} = E(d_{1\text{mín.}}) \quad (139)$$

vector columna que resuelve la cuestión, específico y único en aplicación a cualquier caso arbitrario en estudio, que es lo que a fin de cuentas interesa.

Y como consecuencia inmediata, en virtud de (126) y en el supuesto de observables y método adecuado de ajuste teniendo en cuenta (135), se escribirá

$$\lambda_{sp.\text{mín.}} = \frac{d_{sp}^T Q_{d1}^{-1} d_{sp}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{sp}^T (2Q_{xx})^{-1} d_{sp}}{\sigma_{T0}^2} = \quad (140)$$

$$= \frac{1}{q\sigma_{T0}^2} |d_{sp}|^2 = \text{Cte.} |d_{sp}|^2 =$$

Accediendo así a la curva umbral de sensibilidad

$$G = G\left(\chi_{n,\lambda_{sp.\text{mín.}}}^2\right) \quad (141)$$

que define en cada caso, para él y solo para él, el límite práctico de apreciación en el vector de sensibilidad d_{sp} con la información estadística y probabilística necesaria.

Es claro también que la adicional y necesaria condición de identidad de metodología y precisión en las mediciones de control efectuadas está garantizada con aplicaciones GNSS y análogas. Todas pueden practicarse como reproducción fiel de sí mismas, con consideración práctica de simultaneas, y sin influencia exterior alguna que las diferencie, incluso de ecuación de observador. No así utilizando metodología e instrumentación clásicas.

En cierto modo y como ya se dijo, la reflexión descrita es una aplicación conceptual bayesiana, ya que el conocimiento a priori de un suceso relacionado con el trabajo (aceptamos que la red permanece indeformable) califica y cifra con alto nivel de certidumbre una conclusión probabilística. Se verá en la praxis que sigue.

Y desde otro punto de vista, es posible establecer una estimación estadística teórica razonable, basada en los conocidos Test y criterios de Baarda, que definiremos como sensibilidad teórica de la red. Ambas sensibilidades, práctica y teórica, pueden utilizarse en conjunto, por separado y contrastarse e interpretarse de forma rigurosa.

Finalmente, una nueva suposición bayesiana del grado de congruencia entre teoría y praxis definirán el rigor y fiabilidad de los resultados establecidos y el grado de certidumbre de su interpretación.

4.2- ESTIMACIÓN DE LA SENSIBILIDAD TEÓRICA A PARTIR DEL W-TEST DE BAARDA

Más adelante se desarrollará la cuestión en detalle y ejemplo práctico. Por el momento, recordemos que el W-Test, que suponemos conocido en concepto y notación usual, determina en cada observable aceptada una cota de mínimo error detectable, a partir de la llamada “variable de Baarda” $w_i = \frac{R_i}{\hat{\sigma}_{R_i}}$, con nivel de

significación α y potencia de test β a partir de dos distribuciones normales, una de ellas centrada y la otra afectada de un cierto parámetro de traslación δ .⁸ Así, el mínimo error detectable resulta

$$\nabla_{O_i} = \frac{\delta \cdot \sigma_i}{\sqrt{r_i}} \quad (142)$$

Que se acepta así mismo como el máximo error temible que puede deslizarse en el observable O_i sin posibilidad de ser eliminado. Es de resaltar que el nivel de significación α y la potencia de test β se establecen arbitrariamente por el proyectista y en función de ellos se determinan δ y ∇_{O_i} . En nuestra opinión, aceptados cuantos supuestos, razonamientos y tanteos sean pertinentes, en

⁸ M.CHUECA ET ALT. “Microgeodesia y Redes locales: Complementos docentes”. Pg. 98 y sig. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2003.

definitiva el rigor exige una explicación suficiente de los parámetros α , β , δ y ∇O_i adoptados.

El valor (142) es variable para cada observable, con la fundamental excepción del método de incrementos de coordenadas que hemos propuesto y aplicamos. En dicho supuesto, en cada observable GNSS aceptado puede esperarse un mismo error temible máximo no detectado. Y siendo éste

$$\nabla O_i = \nabla O = \text{Constante} \quad (143)$$

también lo será la fiabilidad externa de cualquier coordenada compensada de la red. Es decir, el error máximo que pueda afectarla debido a un $\nabla O_i = \nabla O$ no detectado. La expresión será

$$\nabla_d O_i = \left(A^T P A \right)^{-1} A^T P e_i \nabla O \quad (144)$$

De valor constante e igual para cualquier variable-deformación de orden i . Y en el peor de los casos, supuesto que todos los observables fueran afectados por (143), el error final temible por dicha causa en el vector de deformaciones compensadas sería también constante, supuesta cumplida la norma de mantener un mismo número de observables afectando a cada variable deformación (diferencia de coordenadas) y sean N , resultando finalmente

$$\nabla_d = \text{veccol} \left(A^T P A \right)^{-1} A^T P \nabla O \sqrt{N} \quad (145)$$

Vector columna de componentes iguales representativos del error temible en cualquier variable deformación de orden i .

No parece razonable esperar que todos los observables hayan sido afectados de error grosero en el límite no detectable. Y tampoco es menos cierto que hay otras fuentes de error que no se han tenido en cuenta. Suponiendo que sea dominante la estudiada, se propone la aceptación de (145) como valor teórico máximo esperable en la estimación de d_{st} . Es decir, de la sensibilidad teórica.

Y definitivamente, podemos establecer una horquilla entre dos estimadores de d_{1min} , a saber:

- El vector columna de componentes esencialmente diferentes determinado por observación directa en (139), sensibilidad práctica.

$$d_{sp} = E(d_{1min}) \quad (146)$$

- El vector columna teórico de componentes iguales determinado por aplicación del W-Test según (145). Sensibilidad teórica.

$$d_{st} = \nabla_d = E(d_{1min}) \quad (147)$$

Ambos valores (146) y (147) pueden expresarse como estimadores d_{1min} .

Sin embargo y en la práctica, el poderoso coeficiente de seguridad que supone utilizar (147) permite, en un trabajo cuidadosamente efectuado, *aunque suponga a lo menos una aparente contradicción teórica*, y según comprobaremos en seguida, definir uno u otro más acertadamente como mínimo y máximo. En dicho supuesto y utilizando la metodología antes descrita (ajuste por incrementos de coordenadas

con observables GNSS, GPS...) es también muy aceptable utilizar el módulo de ambos vectores como elemento de comparación, independientemente de que existan componentes en el vector definido como máximo(mínimo) menores(mayores) que sus homólogos en el vector mínimo (máximo).

Así puede entenderse, siendo ya inmediato establecer los dos parámetros de no centralidad función de las sensibilidades d_{sp} y d_{st} , se pueda en resumen esperar que en una red bien proyectada y observada es muy probable y así se ratificará en lo que sigue que los extremos mínimo y máximo de sensibilidad o precisión puedan establecerse a partir de los valores

$$\lambda_{sp.mín.} = \frac{d_{sp}^T Q_{d1}^{-1} d_{sp}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{sp}^T (2Q_{xx})^{-1} d_{sp}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{sp}^T Q_{xx}^{-1} d_{sp}}{2\sigma_{T0}^2} \quad (148)$$

$$\lambda_{sp.mín.} = \frac{d_{sp}^T Q_{d1}^+ d_{sp}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{sp}^T (2Q_{xx})^+ d_{sp}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{sp}^T Q_{xx}^+ d_{sp}}{2\sigma_{T0}^2}$$

red ligada o libre, solución seudoinversa, como siempre.

$$\lambda_{st.max} = \frac{d_{st}^T Q_{d1}^{-1} d_{st}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{st}^T (2Q_{xx})^{-1} d_{st}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{st}^T Q_{xx}^{-1} d_{st}}{2\sigma_{T0}^2} \quad (149)$$

$$\lambda_{st.max} = \frac{d_{st}^T Q_{d1}^+ d_{st}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{st}^T (2Q_{xx})^+ d_{st}}{\sigma_{T0}^2} = \frac{d_{st}^T Q_{xx}^+ d_{st}}{2\sigma_{T0}^2} \quad (150)$$

misma consideración de red ligada y libre.

4.3- UNA CUESTION COMPLEMENTARIA. LA SENSIBILIDAD ESPECÍFICA

Más adelante se dedicará un apartado completo, utilizando la Red de Contrastación de la UPV, al desarrollo en detalle de un ejemplo real de determinación de la sensibilidad práctica de una aplicación. Con ello daremos por terminada la cuestión hasta donde se nos alcanza y en el momento presente. Sin embargo y antes de ello, entendemos conveniente considerar un nuevo punto de vista basado en la utilización de la doctrina de hiperfiguras de incertidumbre bien conocida a cuyo resultado denominamos “sensibilidad específica”.

Así, otra forma de estudiar la sensibilidad de la red es la siguiente.

Consideremos la expresión de la forma cuadrática fundamental reiteradamente utilizada:

$$\mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T \Gamma \mathbf{V}^{-1} \Gamma^T \mathbf{d}_1 \quad (151)$$

donde, como sabemos

$\Gamma =$ matriz de autovectores columnas normalizados

$\mathbf{V} =$ matriz diagonal de autovalores de \mathbf{Q}_{xx}

en efecto, cumpliéndose

$$\mathbf{Q}_{xx} = \Gamma \mathbf{V} \Gamma^T \quad (152)$$

y por tanto

$$\mathbf{Q}_{xx}^{-1} = (\Gamma^T)^{-1} \mathbf{V}^{-1} \Gamma^{-1}$$

y como

$$\Gamma^T = \Gamma^{-1}$$

pues Γ es ortogonal, se tiene

$$\mathbf{Q}_{xx}^{-1} = \Gamma \mathbf{V}^{-1} \Gamma^T \quad (153)$$

Además, si $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ son dos autovectores columna normalizados

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$$

$$|\mathbf{v}_i| = 1$$

y siendo x'_i la proyección de \mathbf{d}_1 sobre \mathbf{v}_i , formulemos el producto escalar

$$\mathbf{d}_1^T \mathbf{v}_i = |\mathbf{d}_1| |\mathbf{v}_i| \cos\{\mathbf{d}_1, \mathbf{v}_i\} = |\mathbf{d}_1| \cos\{\mathbf{d}_1, \mathbf{v}_i\} = d'_i \quad (154)$$

y en consecuencia

$$\mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1^T (2\mathbf{Q}_{xx})^{-1} \mathbf{d}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_{xx}^{-1} \mathbf{d}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_1^T \Gamma \mathbf{V}^{-1} \Gamma^T \mathbf{d}_1 \quad (155)$$

y teniendo en cuenta (151) escribimos la conocida rotación en el espacio E^n

$$\Gamma^T \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}'_1 \quad (156)$$

O lo que es lo mismo, transponiendo

$$\mathbf{d}_1^T \Gamma = (\mathbf{d}'_1 \mathbf{d}'_2 \mathbf{d}'_3 \dots \mathbf{d}'_n) \equiv \mathbf{d}'_1{}^T \quad (157)$$

resultando inmediato en la expresión (155) las expresiones cuadráticas generadoras de los conocidos hiperrectángulos de incertidumbre en forma no canónica y canónica.

$$\begin{aligned}
 d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1 &= d_1^T (2Q_{xx})^{-1} d_1 = \frac{1}{2} d_1^T Q_{xx}^{-1} d_1 = \frac{1}{2} d_1^T \Gamma V^{-1} \Gamma^T d_1 = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1' & d_2' & \dots & d_n' \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1' & d_2' & \dots & d_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} d_1' & \frac{1}{\mu_2} d_2' & \dots & \frac{1}{\mu_n} d_n' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1' \\ d_2' \\ \vdots \\ d_n' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} d_i'^2 = \Phi \quad (158)
 \end{aligned}$$

con la notación usual. Resultando μ_i , autovalor genérico de índice “i” constante por hipótesis al ser Q_{xx} , matriz invariante a lo largo de todas las campañas.

A partir de (158) son inmediatas las expresiones particularizadas no canónicas y canónicas de los hiperelipsoides de incertidumbre HE_d , HE_x de los afijos de los vectores genéricos d y x . Se tendrá:

1. Referido para simplificar notación al afijo del vector d_1 que hemos venido utilizando, siendo extensible con igual formulación a cualquier otra campaña de control de deformación de la red en estudio de orden k definida por d_k .

$$\begin{aligned}
 HE_{d1} &\equiv d_1^T \sigma_{d1}^{-1} d_1 = f_\alpha^2 \\
 HE_{d1} &\equiv d_1^T \sigma_{d1}^{-1} d_1 = d_1^T \left(\hat{\sigma}_{od1}^2 Q_{d1} \right)^{-1} d_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}_{od1}^2} \cdot d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1 = \quad (159) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_{od1}^2} \cdot d_1^T Q_{xx}^{-1} d_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_{od1}^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} d_i'^2 = f_\alpha^2
 \end{aligned}$$

Hiperelipsoide general de incertidumbre del afijo de d asociado a cualquier campaña. donde $f_\alpha^2 =$ parámetro de homotecia e incertidumbre, de significación bien conocida.

2. Y referido al afijo del vector x_1 que hemos venido utilizando siendo extensible con igual formulación a cualquier otra campaña de observación y ajuste de la red en estudio de orden k definida por x_k .

$$\begin{aligned}
HE_{x1} &\equiv x_1^T \sigma_{x1}^{-1} x_1 = f_\alpha^2 \\
HE_{x1} &\equiv x_1^T \sigma_{x1}^{-1} x_1 = x_1^T \left(\hat{\sigma}_{o1}^2 Q_{xx} \right)^{-1} x_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}_{o1}^2} \cdot x_1^T Q_{xx}^{-1} x_1 = \quad (160) \\
&= \frac{1}{\hat{\sigma}_{o1}^2} \cdot x_1^T Q_{xx}^{-1} x_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}_{o1}^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} x_i'^2 = f_\alpha^2
\end{aligned}$$

Hiperelipsoide general de incertidumbre del afijo de x asociado a cualquier campaña de ajuste. Donde, como en el caso anterior, f_α^2 = parámetro de homotecia e incertidumbre.

En general, siguiendo el desarrollo que antecede, en virtud de (38), (39), (40) y recordando la invariancia de $Q_{d1} = Q_{xx}$, es lícito escribir a efectos de estimación de incertidumbre estadística, si el trabajo está rigurosa y concienzudamente realizado

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{o1}^2 &\approx \hat{\sigma}_{o2}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \\
\hat{\sigma}_{od1}^2 &= \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2 \right) \approx \hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_{od}^2 \quad (161)
\end{aligned}$$

Lo que por otra parte es comprobable y salta a la vista a medida que avanza el trabajo en campo y gabinete, debiendo tenerse en cuenta que discrepancias excesivas sugieren la reconsideración en profundidad y hasta la repetición, en todo o parte, de la tarea emprendida. Un buen trabajo requiere que las varianzas a posteriori de peso unidad de los observables-ajuste y los que podemos llamar observables-deformación varíen muy poco. Así, puede establecerse su estimador común según (161) en $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$. En dicho supuesto se tendrá en definitiva:

$$HE_{d1} \equiv d_1^T \sigma_{d1}^{-1} d_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \cdot d_1^T Q_{xx}^{-1} d_1 = f_\alpha^2 \quad (162)$$

Hiperelipsoide de incertidumbre de deformación genérico.

$$HE_{d1} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} d_i'^2 = f_\alpha^2 \quad (163)$$

Hiperelipsoide de incertidumbre de deformación genérico en expresión canónica.

El vector de semiejes a_{d1} de HE_{d1} será

$$a_{d1} = \hat{\sigma}_0 f_\alpha \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} \\ \sqrt{\mu_2} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_i} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \quad (164)$$

$i \in 1, 2, \dots, n$

y del mismo modo

$$HE_{x1} \equiv x_1^T \sigma_{x1}^{-1} x_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \cdot x_1^T Q_{xx}^{-1} x_1 = f_\alpha^2 \quad (165)$$

Hiperelipsoide de incertidumbre de campaña de ajuste genérico.

$$HE_{x1} \equiv \frac{1}{\hat{\sigma}_{01}^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} x_i^2 = f_\alpha^2 \quad (166)$$

Hiperelipsoide de incertidumbre de campaña de ajuste genérico en expresión canónica.

Y el vector de semiejes a_{x1} de HE_{x1} será

$$a_{x1} = \hat{\sigma}_0 f_\alpha \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} \\ \sqrt{\mu_2} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_i} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \quad (167)$$

$i \in 1, 2, \dots, n$

La consecuencia es clara y entendemos que original.

Los hiperelipsoides HE_{d1} y HE_{x1} son semejantes, deduciéndose HE_{d1} mediante una homotecia de constante igual a $\sqrt{2}$ aplicada a HE_{x1} con centro en su origen de coordenadas.

La deformación en una campaña cualquiera de índice k se define en su caso más general por un vector $d_k = x_q - x_{q-1}$ en E^n , k y q , arbitrarios. En virtud de esta generación geométrica, los n -edros de referencia de HE_{d1} y HE_{x1} son idénticos correspondiendo cada eje de índice i , x_i a una deformación definida sobre él mismo d_j diferencia de coordenadas en dos campañas de ajuste y recíprocamente.

Además, y ello es fundamental, HE_{d1} y HE_{x1} deben resultar muy aproximadamente invariantes a lo largo de todo el trabajo.

Ello supone en primer lugar un importante y sólido instrumento de control de calidad que puede inducir decisiones adecuadas en ayuda de las labores en campo y gabinete. Y en segundo lugar y con no menos importancia, a posteriori puede establecerse la que llamaremos sensibilidad específica del trabajo, cifrada por y a partir de HE_{d1} y HE_{x1} con el poder de afirmación α que se precise eligiendo el f_α adecuado y geoméricamente definida por el hiperrecinto que se adopte, y ello tanto

en conjunto como por zonas, siendo posible aplicar la totalidad de la teoría conocida, incluyendo también Análisis Multivariante .

Una vez más se pone de manifiesto que una buena sensibilidad específica de la red requiere autovalores pequeños, recintos de error pequeños, excelente matriz cofactor invariante Q_{xx} y, en definitiva, una magnífica observación.

Y es obvio que las sensibilidades teórica y práctica establecidas “a priori” y la específica mantenida “a posteriori” deben ser congruentes hasta donde razonablemente sea necesario o posible llegar.

Finalmente veremos también que la sensibilidad teórica puede coincidir con la específica en el supuesto, que puede forzarse, de hiperelipsoides canónicos.

5.- LAS ZONAS DE DISTINTA SIGNIFICACIÓN EN CONTROL DE DEFORMACIONES

Con la doctrina que antecede se está en condiciones de estudiar la evolución de una red microgeodésica en su conjunto y a lo largo del tiempo, definiendo y evaluando las posibles deformaciones que, por las circunstancias físicas que fueren, hubieran podido afectarla. Más adelante y para mayor claridad se desarrollarán en detalle algunos ejemplos prácticos. El resultado se ofrece en forma de vector $d_{n,1}$ cuyas componentes cifran, con la notación usual, la variación de cada una de las n coordenadas de la red, vértice a vértice. Se establece un límite razonado de sensibilidad o umbral de capacidad de discriminación del resultado obtenido por diversos procedimientos y se estudia y valora el poder de afirmación estadístico de los resultados obtenidos, en conjunto o por zonas separadas aplicando diversas técnicas bien conocidas, en especial de Análisis Multivariante. Del mismo modo, es factible densificar virtualmente la red según metodología conocida hasta el límite que sea preciso con suficiente rigor, y el mismo nivel de precisión, punto a punto, que los de directa observación y cálculo.

Para completar la teoría y praxis expuestas es necesario abordar el problema de fraccionar la red, hasta llegar a efectuar el control de la misma por zonas arbitrarias e incluso vértice a vértice, identificando y aislando zonas de interés relevante, con posibilidad de extraer conclusiones sobre la previsible evolución en el tiempo del vector de deformaciones $d_i = d_1 - d_i$, referido a origen, mediante sucesivas campañas de orden i de observación y ajuste de la red adoptada, supuesta la correcta cumplimentación del condicionado previo establecido, especialmente por lo que a invariancias se refiere. Además y fundamentalmente es de aplicación sin dificultad mayor la teoría y praxis de zonas de distinta significación que se desarrolló en su momento y damos por sabida.

El vector de deformaciones individualiza en cada vértice de la red o correlativo y para cada coordenada las alteraciones acaecidas, pero su análisis

estadístico se ha realizado hasta ahora en conjunto y puede ser importante estar en condiciones de fraccionarlo también para parte de la red o para un vértice de la misma, o incluso para alguna coordenada determinada.

El Test F de Snedecor relaciona y compara $\hat{\sigma}_{0n}^2$, varianza a posteriori del observable de peso unidad de una muestra de n observables de la red afectada de deformación nula forzada definida en (44) y (45) con $\hat{\sigma}_{0d}^2$, varianza del resultado de un ajuste de la misma red en situación inicial (15), cuya deformación se pretende contrastar.

Bastará por tanto con reducir la muestra de deformación nula a los límites que se requieran y aplicar el F-Test. Su resultado es controlar estadísticamente la deformación en el ámbito indicado.

Es claro que la aplicación del método en redes de pocos vértices, caso muy común en Microgeodesia, tiene una importancia menor. Pero en redes de mediano o gran número de vértices, por ejemplo, en el estudio de la modelización de una cartografía antigua apoyándose en su red trigonométrica puede ser decisivo estudiarla por zonas de distinta deformación relativa respecto a un levantamiento moderno de control.

Refiriéndonos siempre al Método de Observaciones Indirectas y en primer lugar, la solución inversa generalizada de una red local cualquiera puede escribirse según sabemos mediante el sistema de ecuaciones normales⁹

$$\begin{pmatrix} A_1^T P A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T P K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (168)$$

donde el modelo F_i se ha linealizado como

$$F_i \cong A_{1m_1, n} x_{n,1} - K_{1m_1,1} = R_{1m_1,1} \quad (169)$$

y corresponde a una red libre con defecto de rango definido excepcionalmente con la notación δ para evitar ambigüedad con la usual d, que utilizaremos para designar el vector de deformaciones. Así, escribimos

$$\delta = n - R(A_1^T P A_1) = n - R(S) = n - R(A_1) \quad (170)$$

y siendo el modelo F_j también linealizado

$$F_j \cong A_{2\delta_1, n} x_{n,1} = 0 \quad (171)$$

tal que $A_{2\delta_1, n}$ resulte una matriz arbitraria de rango completo, condición necesaria pero no suficiente

$$R(A_2) = \delta_1 \geq \delta \quad (172)$$

⁹ M.CHUECA ET ALT. "Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia", Opus. Cit. pg.200 y sig. Dra. MARIA JESÚS JIMÉNEZ MARTÍNEZ, Tesis Doctoral "Innovaciones y avances en Ajustes Gaussianos de Redes Locales: Metodos de Triangulación homogénea y de Incrementos de Coordenadas. Interpretación de resultados, densificación virtual equiprecisa y evolución en el tiempo", Opus cit.

Además, condición necesaria y suficiente, es fácil ver que los elementos de las filas y columnas de $A_{2\delta_{1,n}}$ no deben ser combinación lineal de los correspondientes en sus paralelas de $S_1 = A_1^T P A_1$. Si así fuera resultará nulo el determinante $|N| = \begin{vmatrix} A_1^T P A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{vmatrix}$, comprobación inexcusable en fase de proyecto, previa a la aceptación, rechazo o modificación en su caso de $A_{2\delta_{1,n}}$.

Supongamos como evidencia empírica que se trata de un sencillo supuesto en que

$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, simétrica según debe ser y con la tercera fila o columna

suma de las otras dos. Entonces $R(S_1) = R(A_1^T P A_1) = 2$ y sea $A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 16 \end{pmatrix}$
 $\delta = n - R(S_1) = 3 - 2 = 1$ $R(A_2) = 1 = \delta_1 = \delta$

Donde los elementos de A_2 son respectivamente suma de los elementos de las tres filas de S_1 .

Se escribirá por tanto

$$|N| = \begin{vmatrix} A_1^T P A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 6 & 10 & 16 & 0 \end{vmatrix}$$

Directamente puede verse que la tercera fila/columna es suma de sus paralelas primera y segunda y por lo tanto el determinante nulo. También si sumamos a la cuarta fila o columna de $|N|$ la suma de sus tres paralelas multiplicadas cada una por (-1), se sigue, operando en la cuarta columna:

$$|N| = \begin{vmatrix} A_1^T P A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 6 & 10 & 16 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \\ 6 & 10 & 16 & -32 \end{vmatrix} = 32 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 32 \cdot |S_1| = 0$$

por ser la matriz cuadrada y simétrica S_1 deficiente de rango y su determinante, nulo.

La matriz N será también deficiente de rango en una unidad, es claro que $R(N) = 3$ y no tendrá inversa de Cayley. Por tanto, aunque A_2 es de rango completo, no es válida para el cálculo emprendido y debe reconsiderarse el proyecto.

Bien entendido lo que antecede, supongamos que en cualquier caso, que el defecto de rango del ajuste definido por el modelo F_i se ha logrado compensar por F_j , desapareciendo la indeterminación.

A continuación, como ejemplo y para fijar ideas, particularizamos para $\delta_1 = \delta$, según extendida práctica profesional en proyecto y ejecución, que permite acceder a la solución seudoinversa y a las inversas generalizadas recíprocas de aplicación en zonas de distinta significación. Así podrá escribirse sucesivamente¹⁰:

$$\begin{pmatrix} A_{1\ n,m}^T & P_{m,m} A_{1\ m,n} & A_{2\ n,\delta}^T \\ & A_{2\ \delta,n} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\ d,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\ n,m}^T & P_{m,m} K_{1\ m,1} \\ & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (173)$$

$$N_{n+\delta,n+\delta} \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\ \delta,1} \end{pmatrix}_{n+\delta,1} = W_{n+\delta,1}$$

$$R(N_{n+\delta,n+\delta}) = R(N) = n + \delta = \text{completo} \quad (174)$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\ \delta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1\ n,m}^T & P_{m,m} A_{1\ m,n} & A_{2\ n,\delta}^T \\ & A_{2\ \delta,n} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{1\ n,m}^T & P_{m,m} K_{1\ m,1} \\ & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (175)$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\ \delta,1} \end{pmatrix}_{n+\delta,1} = N_{n+\delta,n+\delta}^{-1} \cdot W_{n+\delta,1}$$

Solución ajustada de red libre con infinitas soluciones asegadas y consistentes asociadas a matrices inversas generalizadas recíprocas generadas al variar A_2 arbitrariamente, según las características específicas del problema en presencia y teoría conocida.

Así, puede establecerse también la solución seudoinversa, única, bien conocida, que da lugar mínima corrección en módulo del vector de variables o parámetros

$$|x| = \text{mínimo}$$

$$\text{que implica } \sum_{i=1}^n x_i^2 = \text{mínimo}$$

bastando con particularizar¹¹

$$A_{2\ \delta,n} = E_{2\ \delta,n} = \text{matriz de constreñimientos}$$

dando lugar a

¹⁰ Ocasionalmente y para facilitar la lectura se prefiere reproducir fórmulas ya deducidas en evitación de un exceso de citas a páginas anteriores y/o notas de pie.

¹¹ Ibidem. M.CHUECA ET ALT. Pg 219 y sig. Ibidem Tesis Doctoral Dra. M.J. JIMÉNEZ MARTINEZ.

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\delta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T P_{m,m} A_{1m,n} & E_{2\delta,n}^T \\ & E_{2\delta,n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T P_{m,m} K_{1m,1} \\ 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (176)$$

solución llamada pseudoinversa, asociada a la matriz de dicha denominación.

(176) es una primera solución general que siempre debe tenerse en cuenta, según sabemos y se verá en la particularización que sigue.

Y dentro de la teoría y praxis de las zonas de distinta significación¹², es relevante la aplicación en que, a partir de la matriz de constreñimientos puede dividirse el espacio cubierto por una red libre en dos zonas definidas una de ellas por cualquier circunstancia física o geométrica y sean las representadas por el vector

$$\begin{matrix} x_{a_i} \\ i \in 1,2,3,\dots,i \end{matrix} \quad (177)$$

y el resto por presentar mínima corrección en módulo del vector de variables y sean

$$\begin{matrix} x_{b_j} \\ j \in i+1, i+2, i+3, \dots, n \end{matrix} \quad (178)$$

siendo evidentemente

$$x_{n,1} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}_{n,1} \quad (179)$$

bastará con utilizar en ajuste coordinado la matriz de constreñimientos correspondiente a la red de que se trate, sustituyendo por ceros todos los elementos correspondientes a las coordenadas aproximadas a priori X_a correspondientes a las correcciones x_a . Así, si por ejemplo el defecto de rango fuera $\delta = 4$ máximo en planimetría, se escribirá:

$$A_{2\delta,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -Y_{i+1} & X_{i+1} & \dots & -Y_n & X_n \\ 0 & \dots & 0 & X_{i+1} & Y_{i+1} & \dots & X_n & Y_n \end{pmatrix} \quad (180)$$

y el problema se resuelve según las expresiones que siguen, en las que se explicita la división del vector columna de correcciones x en sus dos fracciones (43). Es decir

$$x_{n,1} = \begin{pmatrix} x_{a_i,1} \\ x_{b_{n-i},1} \end{pmatrix} \quad (181)$$

y el resultado es

¹² M.CHUECA ET ALT.. "Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño". Opus cit. pg 50 y sig. Ibídem la Tesis Doctoral Dra. M. J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ.

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_2 \delta_{,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{a_i,1} \\ x_{b_{n-i,1}} \\ -\lambda_2 \delta_{,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T & P_{m,m} A_{1,m,n} & A_2^T \\ & A_{2,\delta,n} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1^T & P_{m,m} K_{1,m,1} \\ & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (182)$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_2 \delta_{,1} \end{pmatrix}_{n+\delta,1} = \begin{pmatrix} x_{a_i,1} \\ x_{b_{n-i,1}} \\ -\lambda_2 \delta_{,1} \end{pmatrix} = N_{n+\delta,n+\delta}^{-1} \cdot W_{n+\delta,1}$$

como debía suceder, siendo importante subrayar que en la práctica utilizaremos casi exclusivamente observables GNSS o similares con metodología de ajustes coordinados por incrementos de coordenadas, que reducen siguiendo el supuesto planimétrico el número de constreñimientos o defecto de rango a $\delta = 2$ con importante ventaja de cálculo e interpretación geométrica. Así la matriz (180) se reducirá a las dos primeras filas, procedentes de dos traslaciones ortogonales según los ejes coordenados.

El resultado será único y podrá obtenerse según (182), solución asociada también a una infinidad de matrices inversas generalizadas recíprocas operando con las matrices A_2 , variable arbitraria y E, fija.

En el caso contemplado puede formularse el resultado fraccionado mediante dos matrices específicas, una pseudoinversa cuya solución es x_b y otra inversa de Cayley cuya solución es x_a ¹³, con interpretación geométrica bien conocida.

En resumen, el método de ajustes coordinados permite obtener los resultados del vector de correcciones x en cuantos supuestos se entiendan procedentes con sencillez y alto rendimiento. No obstante, es claro que la presencia de los parámetros de Lagrange λ_2 dificultan la formulación de las matrices, vectores y estimadores generales de criterio a posteriori.

Su utilidad por ello es indiscutible en fase de proyecto, diseño y simulación, ahorrando tiempo y calculos. También como comprobación de los resultados definitivos a adoptar en cuanto al vector x se refiere determinado por el método usual. Y con mayor razón si cabe en las fases siguientes de interpretación de resultados.

En cualquier caso, (182) es una primera posibilidad de aplicación dividiendo la red en dos zonas reiteradamente mediante criterios lógicos ajustados a la realidad a interpretar y eligiendo una con la condición específica de vector de deformación de módulo MÍNIMO.

Y avanzando en la exposición y aplicando ya en el campo del ajuste e interpretación del vector de deformaciones d , se deducirá inmediatamente la formulación adecuada aplicando (168) sustituyendo el vector de variables x por el de deformaciones d . Es decir, sucesivamente

¹³ Ibídem.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (183)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (184)$$

Donde \mathbf{A}_2 se particularizará por la matriz de constreñimientos \mathbf{E}_2 que corresponda a efectos de calcular la solución pseudoinversa, o bien la (180) deducida de ella con zonas de distinta significación. En nuestro caso, nos inclinaremos decididamente por la utilización de observables GNSS y método de incrementos de coordenadas. En dicho supuesto se tendrán sucesivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{22,n} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{22,n} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (184 - \text{bis})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{n,1} \\ -\lambda_{22,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1n,m}^T \mathbf{P}_{m,m} \mathbf{A}_{1m,n} & \mathbf{E}_{22,n}^T \\ & \mathbf{0}_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1n,m}^T \mathbf{P}_{m,m} \mathbf{K}_{1m,1} \\ \mathbf{0}_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{n,1} \\ -\lambda_{22,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1n,m}^T \mathbf{P}_{m,m} \mathbf{A}_{1m,n} & \mathbf{A}_{22,n}^T \\ & \mathbf{0}_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1n,m}^T \mathbf{P}_{m,m} \mathbf{K}_{1m,1} \\ \mathbf{0}_{2,2} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{d}_{n,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{a_{i,1}} \\ \mathbf{d}_{b_{n-i,1}} \end{pmatrix}$ según (181) en la última expresión, soluciones

respectivas pseudoinversa de toda la red e inversa generalizada con zonas de distinta significación.

Siguiendo la exposición y siendo el modelo más general $\mathbf{F}_j \equiv \mathbf{A}_2 \mathbf{d} = \mathbf{0}$, particularicemos para deformación nula virtual forzada extendida a toda la red. En dicho supuesto se tendrá $\mathbf{F}_j \equiv \mathbf{A}_2 \mathbf{d} \equiv \mathbf{d} = \mathbf{0}$, es decir $\mathbf{A}_2 = \mathbf{I}$, resultando en definitiva

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (185)$$

(185) es la segunda solución general que también debe tenerse en cuenta, según se verá.

Y con la expresión de dimensiones de matrices y vectores componentes.

$$\begin{pmatrix} A_{1n,m}^T & P_{1m,m} & A_{1m,n} & A_{2n,n}^T \\ & & A_{2n,n} & -P_{2n,n}^{-1} \end{pmatrix}_{2n,2n} \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} = \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T & P_{1m,m} & K_{1m,1} \\ & & K_{2n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} \quad (186)$$

$$\begin{pmatrix} A_{n,m}^T & P_{d_{m,m}} & A_{m,n} & I_{n,n} \\ & & I_{n,n} & 0_{n,n} \end{pmatrix}_{2n,2n} \begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{2n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} = \begin{pmatrix} A_{n,m}^T & P_{d_{m,m}} & K_{d_{m,1}} \\ & & 0_{n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} \quad (187)$$

de acuerdo con la teoría de deformaciones y poniendo de manifiesto la conservación de invariancias bien conocidas.

Y generalicemos las expresiones (44) y (45) imponiendo la condición de nulidad de las deformaciones específicamente a las componentes arbitrarias de índice 1,2,3,.....,v en el vector d, que representaremos en la forma

$$d = \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix} \quad (188)$$

$$i \in 1,2,3,\dots,v$$

$$n \in 2v+1,2v+2,2v+3,\dots,2v+(n-v)$$

escribiéndose pues, según sabemos, el sistema de ajustes coordinados

$$A d - K_d = R_d \quad (189)$$

$$A_2 d = 0 \quad (190)$$

donde

$$A_2 = (I_v \ 0)_{v,n}, \text{ de rango completo } R(A_2) = v$$

I_v = matriz unidad de orden v

0 = matriz de elementos nulos y dimensiones v,n-v

O lo que es lo mismo, desarrollando vectores y matrices

$$A_{m,n} \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix}_{n,1} - K_{d_{m,1}} = R_{d_{m,1}} \quad (191)$$

$$(I_{v,v} \ 0_{v,n-v})_{v,n} \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix}_{n,1} = 0_{v,1}$$

cuya solución, según (186) y (187) se obtiene despejando d en

$$\begin{pmatrix} A_{n,m}^T & P_{d_{m,m}} & A_{m,n} & \begin{pmatrix} I_{v,v} \\ 0_{n-v,v} \end{pmatrix}_{n,v} \\ \begin{pmatrix} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{pmatrix}_{v,n} & & & 0_{v,v} \end{pmatrix}_{n+v,n+v} \begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{2v,1} \end{pmatrix}_{n+v,1} = \begin{pmatrix} A_{n,m}^T & P_{d_{m,m}} & K_{d_{m,1}} \\ & & 0_{v,1} \end{pmatrix}_{n+v,1} \quad (192)$$

y planteando cualquier supuesto del proyecto con la ya citada condición previa de que se cumpla

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_{v,v} \mathbf{0}_{v,n-v}) = v = \text{completo}$$

$$v \geq \delta = n - \mathbf{R}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = n - \mathbf{R}(\mathbf{S}) = n - \mathbf{R}(\mathbf{A})$$

con lo que

$$\mathbf{R} \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}^T_{n,m} \mathbf{P}_{d_{m,m}} \mathbf{A}_{m,n} & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{v,v} \\ \mathbf{0}_{n-v,v} \end{pmatrix}_{n,v} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{v,v} & \mathbf{0}_{v,n-v} \end{pmatrix}_{v,n} & \mathbf{0}_{v,v} \end{array} \right)_{n+v,n+v} = n + v = \text{completo}$$

se podrá despejar con inversa de Cayley en (192), resultando

$$\begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{2v,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T_{n,m} \mathbf{P}_{d_{m,m}} \mathbf{A}_{m,n} & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{v,v} \\ \mathbf{0}_{n-v,v} \end{pmatrix}_{n,v} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{v,v} & \mathbf{0}_{v,n-v} \end{pmatrix}_{v,n} & \mathbf{0}_{v,v} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T_{n,m} \mathbf{P}_{d_{m,m}} \mathbf{K}_{d_{m,1}} \\ \mathbf{0}_{v,1} \end{pmatrix} \quad (193)$$

en su caso más general.

(193) junto con (182), es la segunda posibilidad de aplicación dividiendo la red en dos zonas reiteradamente mediante criterios lógicos ajustados a la realidad a interpretar y eligiendo una con la condición específica de vector de deformación de módulo NULO.

Las dos soluciones generales (176) con su particularización (184-bis) y (185) y la aplicación lógica y reiterada de las (182) con su particularización (184-bis) y (193) deben resolver satisfactoriamente cualquier aplicación usual.

Reemprendiendo la rutina de cálculo, se tendrá sucesivamente, con el mismo método antes empleado (69) y siguientes

$$\mathbf{D}(\mathbf{R}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{R}_d) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2)^T \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2) = (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1)^T \mathbf{T}_2^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{d}_1) \quad (194)$$

Y teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{A}_2^T = (\mathbf{I}_v \quad \mathbf{0}) \mathbf{S}_d^{-1} (\mathbf{I}_v \quad \mathbf{0})^T = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{dv}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{v,n} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_v \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n,v} = (\mathbf{S}_{dv}^{-1})_{v,v} = (\mathbf{Q}_{d1v})_{v,v} = (2\mathbf{Q}_{xxv})_{v,v} \quad (195) \end{aligned}$$

$(\mathbf{S}_{dv}^{-1})_{v,v}, (\mathbf{Q}_{d1v})_{v,v}, (2\mathbf{Q}_{xxv})_{v,v}$, menores de orden v formados por las « v » primeras filas y las « v » primeras columnas en $(\mathbf{S}_d^{-1})_{n,n}, (\mathbf{Q}_{d1})_{n,n}, (2\mathbf{Q}_{xx})_{n,n}$

y es inmediata ya la expresión análoga a la (69) y generalización de la misma, poniendo de manifiesto el dimensionado de las matrices de cálculo

$$\begin{aligned}
 D(R_d^T P_d R_d) &= ((I_v \ 0) d_1)^T Q_{d1v}^{-1} (I_v \ 0) d_1 = \\
 &= d_1^T \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}_{n,v} Q_{d1v}^{-1} \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} d_{1n,1} = \\
 &= d_i^T Q_{d1v}^{-1} d_i = d_i^T (2Q_{xxv})^{-1} d_i = R_{d2}^T P_{d2} R_{d2} \quad (196) \\
 &i \in 1,2,3,\dots,v
 \end{aligned}$$

expresión de la forma cuadrática fundamental generalizada y por otra parte, en forma análoga a la empleada en (63) y siguientes

$$\begin{aligned}
 D_d &= -S_d^{-1} A_2^T T_2^{-1} (A_2 d_1 - K_2) = -Q_{d1} (I_v \ 0)^T Q_{d1v}^{-1} (I_v \ 0) d_1 = \\
 &= Q_{d1n,n} \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}_{n,v} Q_{d1v}^{-1} \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} d_{1n,1} = \\
 &= - \begin{pmatrix} Q_{d1v} \\ M_1 \end{pmatrix}_{n,v} Q_{d1v}^{-1} \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} d_{1n,1} = \\
 &= - \begin{pmatrix} I_v \\ M_2 \end{pmatrix}_{n,v} \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} d_{1n,1} = - \begin{pmatrix} I_v & 0 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix}_{n,n} d_{1n,1} \quad (197)
 \end{aligned}$$

$$Dd = - \begin{pmatrix} d_i \\ d'_{n-v} \end{pmatrix} \quad (198)$$

donde M_1, M_2 , matrices no nulas, $d'_{n-v} \neq d_{n-v}$, vector no nulo, que resultan del cálculo.

y como en (64) se tendrá finalmente

$$d = d_1 + Dd = \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_i \\ d'_{n-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i & -d_i \\ d_{n-v} & d'_{n-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_i \\ d''_{n-v} \end{pmatrix} \quad (199)$$

con la notación establecida, que pone de manifiesto la deformación nula forzada en las v primeras coordenadas.

Es claro que basta hacer $v = n$ para obtener la solución particular de deformación nula forzada a toda la red que antes se estudió en detalle.

El método estudiado, unido a la doctrina bien conocida de zonas de distinta significación, permite una notable flexibilidad en el control de deformaciones por zonas, aplicando distintos criterios hasta la individualización y seguimiento de un solo vértice o incluso una sola coordenada.

En efecto, es particularizable y aplicable con toda sencillez la doctrina expuesta para la red en su conjunto a las zonificaciones que ahora estudiamos. Por ejemplo, el estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad en

una campaña de orden “k” de control de deformaciones referido a las “v” coordenadas definidas en (188), con la notación e hipótesis establecidos será de la forma

$$\hat{\sigma}_{odki}^2 = \frac{R_{d2ki}^T P_{d2ki} R_{d2ki}}{i} = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{i} = \frac{d_{ki}^T (2Q_{xxi}^{-1}) d_{ki}}{i} \quad (200)$$

con $i = v$

d_{ki} = vector de deformaciones en las coordenadas de índice $i \in 1,2,3,\dots,v$ obtenido del d_k , correspondiente a toda la red.

$Q_{dki} = 2Q_{xxi}$ matriz cofactor de las coordenadas “i” obtenida de Q_{xx} mediante los elementos de subíndices indicados.

$R_{d2ki}^T P_{d2ki} R_{d2ki}$ = suma ponderada de cuadrados de residuos de los observables- deformación concernidos.

Por consiguiente y de forma coherente con la doctrina desarrollada anteriormente para deformación virtual nula impuesta a la totalidad de la red, al imponer ahora a las “v” componentes del vector parcial de deformaciones d_{ki} la condición de nulidad virtual, los “v” residuos R_{d2ki} a posteriori de los observables virtuales deformación concernidos resultan en general distintos de cero y se cumple (200) siendo d_{ki} el mismo vector parcial de deformaciones obtenido inicialmente, supuesto su módulo $|d_{ki}| \neq 0$ y sin imposición virtual alguna.

En consecuencia, la varianza a posteriori del observable de peso unidad $\hat{\sigma}_{odki}^2$ de la muestra elegida podrá contrastarse con la varianza a priori del observable de peso unidad σ_{T0}^2 de la población inicial a través del F-Test, según rutina y bajo la hipótesis nula $H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{T0}^2$, con $F_{opt} = 1$ que implica $H_0 = d_k \neq 0$, más general, o lo que es lo mismo $H_0 : |d_k| \neq 0$. Siendo el caso particular de inexistencia supuesta a priori de deformación $H_0 : d_k = 0$, que implica $H_0 : |d_k| = 0$ con $F_{opt} = 0$.

Es por tanto evidente que, siendo comparables mediante el F-Test los observables reales a priori y los virtuales a posteriori según hemos visto, en un trabajo bien proyectado y ejecutado, las precisiones de todos ellos también lo serán. Y veremos más adelante que con observables reales equiprecisos a priori y siguiendo la metodología que se propondrá se seguirán no solo observables virtuales equiprecisos a posteriori, si no que además con $H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{T0}^2$ se obtendrá el óptimo $F_{opt} = 1$, que implica mantenimiento de la precisión inicial en observables a priori y a posteriori, reales y virtuales.

Y considerando alguno de los casos antes estudiados, por ejemplo el F-Test correspondiente a la muestra escogida en control planimétrico respecto de toda la red en su conjunto se formulará en la forma:

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{T_0}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{T_0}^2} = F \approx F_{v, \infty} \quad (201)$$

$$F_{optimo} = 1$$

En F-Test de dos puntas que según se sabe y con el nivel de significación α exigible es generalizable a comparar la muestra elegida con otra finita procedente de la red. Más adelante volveremos sobre ello.

Pudiéndose aplicar también el χ_v^2 - Test resultando el cuadro conjunto

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{T_0}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{T_0}^2} = F \approx F_{v, \infty} = \frac{1}{v} \rho = \frac{1}{v} \chi_v^2$$

$$F_{optimo} = 1 \quad (202)$$

$$\chi_{v, optimo}^2 = \rho_{optimo} = v$$

o adoptando otra hipótesis nula, si procediere

$$H_0 : d_k = 0$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{v \cdot \sigma_{T_0}^2} = F = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{v \cdot \sigma_{T_0}^2} \approx F_{v, \infty} = \frac{1}{v} \rho = \frac{1}{v} \chi_v^2 \quad (203)$$

$$F_{optimo} = 0$$

$$\chi_{v, optimo}^2 = \rho = 0$$

poniendo en cualquier caso de manifiesto la J/Q- variable = ρ

y así mismo, siguiendo el orden de exposición establecido y bajo la hipótesis alternativa

$$H_1 : d_k \neq 0$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{v \cdot \sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{v \cdot \sigma_{T_0}^2} = \frac{1}{v} \rho = \frac{1}{v} \chi_{v, \lambda}^2 \quad (204)$$

$$\rho = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{\sigma_{T_0}^2} \approx \frac{1}{v} \chi_{v, \lambda}^2$$

$\chi_{v,\lambda_{\text{optimo}}}^2$ = variable en función de λ , que hay que determinar

Caso determinista, que deberá ser seguido del J/Q doble Test , siendo banales las aplicaciones en redes libres que no se considera necesario reproducir. Siempre con $i = v$ y la interpretación adecuada, según supuestos, hipótesis y doctrina anterior, junto con las salvedades varias veces indicadas. Del mismo modo se operará con *todas las metodologías de aplicación y los instrumentos, estadísticos o no, de interpretación y control desarrollados en las páginas anteriores.*

Veamos finalmente con algún detalle y para mayor claridad de comprensión el supuesto de control planimétrico definido en (196) a la muestra de los dos observables - deformación del vector d_{ki} = vector de deformaciones en las coordenadas de índice $i \in j, j+1$ referidas a un vértice en estudio cualquiera. Se tendrá:

$$\begin{pmatrix} d_{kj} & d_{k(j+1)} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_{kjj} & q_{kj(j+1)} \\ q_{kj(j+1)} & q_{k(j+1)(j+1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_{kj} \\ d_{k(j+1)} \end{pmatrix} = R_{d2ki}^T P_{d2ki} R_{d2ki} \quad (205)$$

es decir

$$d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki} = d_{ki}^T Q_{di}^{-1} d_{ki} = R_{d2ki}^T P_{d2ki} R_{d2ki} \quad (206)$$

en aplicación directa de (200), aceptándose la condición $C_t \approx C_1$ y sus consecuencias, según se vió, y siendo $i \in j, (j+1)$

La varianza a posteriori del observable de peso unidad de la muestra escogida será:

$$\hat{\sigma}_{odki}^2 = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{2} = \frac{d_{ki}^T Q_{di}^{-1} d_{ki}}{2} \quad (207)$$

Y por lo tanto, el F-Test o su alternativo χ_2^2 -Test correspondiente al vértice V en control planimétrico y en cualquier caso con dos grados de libertad se formulará como:

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{To}^2$$

$$H_0 : \frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} = F \approx F_{2,\infty} \approx \frac{1}{2} \chi_2^2 \quad (208)$$

$$F_{\text{optimo}} = 1$$

$$\chi_{2\text{optimo}}^2 = 2$$

Y con única posibilidad de aplicación mediante F-Test

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{2,(m-n)} \quad (209)$$

$$F_{optimo} = 1$$

seguida de la interpretación adecuada, según la teoría anterior, y las salvedades varias veces indicadas.

Del mismo modo y en secuencia con el J/Q – Test se aplicará el χ_v^2 - Test en supuesto análogo al antes estudiado particularizado para $v = 2$.

$$H_0 : d_{ki} = 0$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{2 \cdot \sigma_{T_0}^2} = F = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{2 \cdot \sigma_{T_0}^2} \approx F_{2,\infty} = \frac{1}{2} \rho = \frac{1}{2} \chi_2^2 \quad (210)$$

$$F_{optimo} = 0$$

$$\chi_{2optimo}^2 = \rho_{optimo} = 0$$

junto con el $\chi_{v,\lambda}^2$ - Test

$$H_1 : d_k \neq 0$$

$$\rho = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{\sigma_{T_0}^2} \approx \frac{1}{2} \chi_{2,\lambda}^2 \quad (211)$$

$$F_{optimo} = \text{variable}$$

siendo preciso estimar λ según teoría conocida.

Repitiendo el test en todos los vértices pueden llegar a individualizarse las deformaciones planimétricas probables sufridas por cada uno de ellos.

La aplicación a red tridimensional con $W = 3$ es inmediata, aunque es más frecuente que si se desea control planimétrico y altimétrico en uno o varios vértices individualizados o en conjunto se efectúen por separado con $W = 2$, según hemos visto, y con $W = 1$ en altimetría, que resulta trivial.

Finalmente, y en la generalidad de la práctica profesional es ya inexcusable la aplicación de criterios de interpretación sobre el conjunto del vector de deformaciones y a este efecto se impone la aplicación del Método de Ajustes por Incrementos de Coordenadas¹⁴ que se desarrolló y publicó en su momento, con observables GPS, GNSS, ..., y ejes de punto fijo a variable. En dicho supuesto y en

¹⁴ Cfr. Parte II de la Tesis Doctoral M.J. JIMÉNEZ MARTINEZ, Opus cit.

(130) puede conseguirse que la matriz cofactor de deformaciones Q_{d1} resulte diagonal y de elementos iguales. Se podrá escribir

$$\begin{aligned}
 & H_1 : d_k \neq 0 \\
 & \rho = \frac{d_{ki}^T \frac{1}{2} Q_{xxi}^{-1} d_{ki}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_{ki}^T Q_{dki}^{-1} d_{ki}}{\sigma_{T_0}^2} \approx \frac{1}{v} \chi_{v,\lambda}^2 \\
 & F_{\text{óptimo}} = \text{variable} \\
 & \rho = \chi_n^2 = \chi_{n,\lambda}^2 = \frac{\sum_{d2i}^{m+n} P_{d2i} R_{d2i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T Q_{d1}^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{d_1^T (\text{diag } q)^{-1} d_1}{\sigma_{T_0}^2} = \\
 & = \frac{1}{q} \frac{\sum_{d1i}^{m+n} d_{1i}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{1}{q \sigma_{T_0}^2} |d_1|^2 = \text{Cte.} |d_1|^2 = J/Q - \text{variable}
 \end{aligned} \tag{212}$$

La J/Q - variable resulta proporcional al cuadrado del módulo del vector deformación resultado del ajuste, con las favorables consecuencias analíticas y geométricas que en su momento se vieron.

Entre otras, la expresión de las probabilidades máximas de (131) y (132) como particularizaciones para $\rho = n$ y $\rho = \lambda + n$. Se conocerán pues los valores

$$F_{\text{máx}} = F\left(\chi_n^2\right) = F(\rho) = F(n) = \text{constante y conocido} \tag{213}$$

$$G_{\text{máx}} = G\left(\chi_{n,\lambda}^2\right) = G(\rho) = G(n + \lambda) = \text{conocido para cada } \lambda \tag{214}$$

Con lo expuesto ya se está teóricamente en condiciones de aplicar con rigor y buen éxito el J/Q - Test y toda la teoría de sensibilidades ya desarrollada, esencial en cualquier supuesto planteado.

Y ello fraccionando reiteradamente la red más general $Ad - K_d = R_d$ linealizada según (15) de forma arbitraria en dos zonas de distinta significación hasta adoptar la modelización que se entienda más procedente y representativa de la realidad física.

En una de ellas con aplicación adecuada de la matriz $A_{2\delta,n}$ que corresponda podrá elegirse entre proyectar deformación mínima o deformación virtual nula impuesta.

En el primer supuesto definiendo $A_{2\delta,n}$ obtenida a partir de la matriz de constreñimientos E según la expresión (180) y resolviendo la zona de deformación mínima a través de una matriz pseudoinversa, resolviéndose la zona restante por

inversa de Cayley y siendo equivalente el resultado a una solución conjunta por matriz inversa generalizada recíproca que también se sabe calcular.

En el segundo supuesto definiendo $A_{2\delta,n} = \begin{pmatrix} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{pmatrix}$ según la expresión (192) resolviendo por inversa de Cayley (193).

Y es claro que los resultados de los dos supuestos anteriores finalmente elegidos deberán ser coherentes entre sí y con la solución pseudoinversa general del conjunto de la red.

Conseguido el resultado favorable deseado de los tres algoritmos, la determinación, en sus distintas acepciones estudiadas, de la sensibilidad conjunta de la red y sensibilidades parciales de sus zonas, hasta la individualización vértice a vértice si se precisara, es aplicación directa de la doctrina expuesta y su rigor y poder de afirmación difícilmente discutible.

Resuelta la cuestión de la sensibilidad, el ajuste, cálculo e interpretación de resultados no debe ofrecer mayor dificultad, siendo aplicación directa de la doctrina conocida, incluyendo la densificación o densificaciones que se consideren necesarias, sea directamente por puntos correlativos o arcos capaces de cualquier amplitud.

Finalmente y para completar la exposición, cabe considerar que las baterías de tests empleadas hasta ahora han comparado siempre estadísticos referidos a muestras con los correspondientes a toda la población o poblaciones correspondientes. Puede ser indudablemente útil en la práctica profesional comparar estadísticos referidos a dos muestras por definición, finitas y de la misma población. Ello conduce a revisar y generalizar el bien conocido F-Test de Fisher - Snedecor.

6- SOBRE LA AMPLIACIÓN DEL J/Q-TEST MEDIANTE GENERALIZACIÓN DEL F-TEST DE FISHER-SNEDECOR

En su momento, epígrafe 3.1 expresiones (82) a (90) formulamos el F-Test con carácter general. Correspondiendo el parámetro $\sigma_{T_0}^2$ al estimador a priori de toda una población, con infinitos grados de libertad era lícito sustituir el F-Test, con ventaja de aplicación y, sobre todo, de interpretación de resultados por la utilización alternativa del χ_n^2 - Test. Y se adoptó dicha opción, desarrollada en las páginas anteriores.

Sin embargo entendemos preceptivo completar la doctrina de estudio y determinación de sensibilidad de redes volviendo sobre él F-Test, estudiando su

comportamiento y adelantando su obligada aplicación en tanto y cuanto se comparen muestras de extensión finita, como será preciso plantearnos en breve.

Consecuentemente, merece la pena subrayar que el F-Test de una punta descrito en (82), (83),(86),(87), deben aplicarse también en su forma tradicional de hipótesis nula , óptimo y contrastación de dos puntas. Así y con la notación usual expresamos, siempre en la red de control directo de deformación expresada por (15), la relación entre los parámetros estudiados anteriormente bajo la hipótesis nula de igualdad de estimadores a priori y a posteriori, teniendo en cuenta lo expuesto en páginas anteriores, epígrafe 3.2.1., expresión (82) y siguientes. Así, se tiene con carácter general $\sigma_{T_0}^2 \cong \sigma_{od}^2$, es preciso contrastar si en cada caso particular puede establecerse además $\sigma_{T_0}^2 \cong \sigma_{od}^2 \cong \hat{\sigma}_{on}^2$, esta última varianza de peso unidad de la muestra a posteriori de los observables virtuales que imponen la deformación nula. Todo ello constituye un importante criterio de control de calidad del trabajo . Se establecerá con el nivel de significación α que sea adecuado lo que sigue:

$$H_0: \sigma_{T_0}^2 = \hat{\sigma}_{on}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T_0}^2} = F \approx F_{n,\infty} \approx \frac{1}{n} \chi_n^2 \quad (215)$$

en caso determinista

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T_0}^2} = F \approx FR(Q_{d1}),\infty \approx \frac{1}{R(Q_{d1})} \chi_n^2 \quad (216)$$

en caso de red libre

con $F_{\text{óptimo}} = 1$ en ambos casos y aceptándose la hipótesis nula, en test de dos puntas y con tantas más graves cautelas cuanto más se separe F del óptimo si

$$F_{n,\infty,1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{n,\infty,\frac{1}{2}\alpha} \quad (217)$$

en caso determinista

$$F_{R(Q_{d1}),\infty,1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{R(Q_{d1}),\infty,\frac{1}{2}\alpha} \quad (218)$$

en caso de red libre

Es interesante ratificar una vez más que la desviación típica a posteriori de los n observables virtuales adicionales que fuerzan deformación nula en ajustes coordinados, a priori de peso infinito y residuo cero, se comportan a posteriori tras el ajuste conjunto como observables cualquiera *si existe deformación d_1* . Y, sensibilidades aparte, reiteramos una vez más que la solución $d_1 = 0$, idénticamente nula, puede ser cierta, pero inasequible como resultado de un tratamiento sobre observables reales a través de un algoritmo de cálculo, sea cual fuere. *La práctica del cálculo siempre arrojará un resultado, tal vez muy pequeño,*

pero siempre será $d_1 \neq 0$, aun cuando solo se deba a los inevitables errores de redondeo en el ordenador. Por ello es esencial definir las sensibilidades del trabajo en cada caso en presencia. Ello es evidente a partir de la expresión (63) y (64) y supone un nuevo criterio de interpretación de la red (15).

En puridad de criterio una vez más reiteramos que hay determinar cuidadosamente y sin lugar a dudas el valor de $\sigma_{T_0}^2$, evitando la peligrosa práctica de igualarlo a la unidad.

Además y a tener en cuenta que durante las sucesivas campañas deben permanecer sensiblemente iguales y constantes los estimadores de la varianza de los observables de peso unidad $\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$, según (161) y tampoco diferirá de ellos el estimador a priori $\sigma_{T_0}^2$. En resumen, deberá vigilarse y mantenerse a lo largo de todo el proceso la mejor cumplimentación posible de $\hat{\sigma}_0^2 \approx \hat{\sigma}_{od}^2 \approx \sigma_{T_0}^2$. Lo que requiere una atención minuciosa y es índice indudable de la calidad del trabajo.

Los observables deberán ser equiprecisos aunque evidentemente distintos en cada campaña, en especial si existe deformación, y los sucesivos valores de ésta vendrán dados por la variación de los correspondientes términos independientes K según (26).

En definitiva, en un buen trabajo todas las piezas del puzzle deben encajar correctamente.

Volviendo al desarrollo de la doctrina, es claro que los supuestos anteriores (215) y (216) pueden resolverse alternativamente también con el χ^2 -Test. Sin embargo para algunos es específica la aplicación del F-Test, como vamos a ver.

En efecto, la comparación de $\hat{\sigma}_{on}^2$ y $\hat{\sigma}_{od}^2 = \hat{\sigma}_{od1}^2$, de imprescindible aplicación también en la gran mayoría de los supuestos prácticos se formula según:

$$\text{Ho: } \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{n,(m-n)} \quad (219)$$

que puede escribirse también, según sabemos

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = \frac{\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T_0}^2}}{\frac{\hat{\sigma}_{od}^2}{\sigma_{T_0}^2}} = \frac{F_{n,\infty}}{F_{(m-n),\infty}} = \frac{\frac{1}{n} \chi_n^2}{\frac{1}{m-n} \chi_{m-n}^2} = F \approx F_{n,(m-n)} \quad (219\text{-bis})$$

siempre con $\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2)$ según (40)

siendo igual el numero de observables m en las dos campañas de partida. En caso contrario es de aplicación la expresión ponderada (41), es decir

$$\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{o1}^1(m_1 - n) + \hat{\sigma}_{o2}^1(m_2 - n)}{(m_1 - n) + (m_2 - n)} \quad (220)$$

en supuesto determinista.

En red libre las expresiones son también inmediatas.

$$H_0: \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx FR(Q_{d1}), (m - R(Q_{d1})) \quad (221)$$

$$\text{con} \quad \hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2)$$

o bien

$$\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{o1}^1(m_1 - R(Q_{xx1})) + \hat{\sigma}_{o2}^1(m_2 - R(Q_{xx2}))}{(m_1 - R(Q_{xx1})) + (m_2 - R(Q_{xx2}))} \quad (222)$$

según el número de observables de las dos campañas sea el mismo e igual a m o sean m_1 y m_2 , distintos, como antes.

La aceptación de la hipótesis nula se producirá según rutina en el supuesto de que

$$F_{n, (m-n), 1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{n, (m-n), \frac{1}{2}\alpha} \quad (223)$$

red ligada

$$F_{R(Q_{d1}), (m-R(Q_{d1})), 1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{R(Q_{d1}), (m-R(Q_{d1})), \frac{1}{2}\alpha} \quad (224)$$

red libre, teniendo en cuenta, como siempre que pueden utilizarse también cualquiera de las expresiones.

$$R(A) = R(S) = R(Q_{xx}) = R(Q_{d1}) \quad (225)$$

Concluimos que el F-Test aplicado bajo la hipótesis nula de igualdad de varianzas de observables de peso unidad, cualquiera que sea el caso, relacionable siempre con el o los supuestos estudiados $H_0: \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2 = \sigma_{T_0}^2$, representa específicamente el contraste de un requisito de cumplimentación obligada para calibrar la calidad del trabajo, calificarlo y aceptarlo o, en su caso, proceder a su rechazo y repetición, en todo o parte.

No ofrece información directa sobre existencia o no de deformación ni por supuesto, cuantía de ella, y presenta serias dificultades parcialmente compensadas por su interés teórico contrastar la hipótesis alternativa.

Sin embargo, es procedente considerar que otra cosa es lo que plantea la práctica profesional mostrando sus cifras de resultados reales, distintos en su gran mayoría de la aceptación o rechazo indiscutibles. Ello conduce a la permanente necesidad de establecer el grado de cumplimentación y fiabilidad estadística de ambas hipótesis, en orden a adoptar decisiones razonables. La cuestión se centra en el nivel de significación α más adecuado en cada caso. Y fundándose en el conocimiento a priori de la realidad física fundada en una larga experiencia que normalmente se posee, la decisión generalizada de aceptar valores muy pequeños de α , del orden de las centésimas, es tan lícita como bayesiana.

Finalmente, y en especial a efectos de determinación de sensibilidades debe tenerse en cuenta que la F-distribución con parámetro de no centralidad de expresión $H = H(F'_{v_1, v_2, \lambda})$ como veremos a continuación permite generalizar el doble J/Q-Test simultaneando su aplicación sobre las mismas hipótesis nula y alternativa de existencia o no de deformación, en función de la misma variable estadística y pudiendo operar además solamente con estimadores de muestras finitas.

6.1.- GENERALIZACIÓN DEL F - TEST

Del mismo modo que antes se vio con la distribución χ^2 , se define también la distribución F' con parámetro de no centralidad o traslación según

$$F' = \frac{\frac{1}{v_1} \chi^2_{v_1, \lambda}}{\frac{1}{v_2} \chi^2_{v_2}} = \frac{v_2 \chi^2_{v_1, \lambda}}{v_1 \chi^2_{v_2}} = \frac{v_2 \sum_{i=1}^{v_1} \theta_i^2}{v_1 \sum_{i=1}^{v_2} \xi_i^2} = F'_{v_1, v_2, \lambda} \quad (226)$$

donde

$$\theta_i \sim N(\theta_{\mu i}, 1)$$

$$\xi_i \sim N(0, 1)$$

$$v_1 = \text{grados de libertad de } \chi^2$$

$$v_2 = \text{grados de libertad de } \chi^2$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{v_1} \theta_{\mu i}^2 = \text{parámetro de no centralidad o de traslación} \quad (227)$$

demonstrándose que media y varianza valen

$$\begin{aligned} \text{media} &= \mu_{F'_{v_1, v_2, \lambda}} = \frac{v_2(v_1 + \lambda)}{v_1(v_2 - 2)} \quad \text{para } v_2 > 2 \\ \text{varianza} &= \sigma^2_{F'_{v_1, v_2, \lambda}} = \frac{v_2^2 [(v_1 + \lambda)^2 + 2(v_1 + 2\lambda)]}{(v_2 - 2)(v_2 - 4)v_1^2} - \frac{v_2^2(v_1 + \lambda)^2}{v_1^2(v_2 - 2)^2} \quad (228) \\ &\quad \text{para } v_2 > 4 \end{aligned}$$

y la función de distribución es

$$\begin{aligned} H &= H(F'_{v_1, v_2, \lambda}) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda} \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j}{j! B\left(\frac{1}{2}v_1 + j, \frac{1}{2}v_2\right)} \frac{1}{v_2} \left(\frac{v_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}v_1 + j} \cdot F'_{v_1, v_2, \lambda} \left(\frac{1}{2}v_1 - 1 + j, \left(1 + \frac{v_1}{v_2} F'_{v_1, v_2, \lambda}\right)^{-\frac{1}{2}(v_1 + v_2) - j}\right) \right] \quad (229) \end{aligned}$$

en que B es la conocida función euleriana definida por las integrales de igual denominación

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \frac{\Gamma p \Gamma q}{\Gamma(p + q)} = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (230) \\ \Gamma p &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \end{aligned}$$

permitiendo aplicar el doble test antes desarrollado, con potencia β y nivel de significación α , bajo la hipótesis de existencia de un cierto

$$\lambda = \lambda_0 \neq 0 \quad (231)$$

se demuestra y es fundamental que particularizando con $\lambda = 0$ se obtiene la distribución clásica F ya estudiada y que hemos utilizado hasta ahora. Así se tendrá

$$F' = \frac{\frac{1}{v_1} \chi^2_{v_1, 0}}{\frac{1}{v_2} \chi^2_{v_2}} = \frac{\frac{1}{v_1} \chi^2_{v_1}}{\frac{1}{v_2} \chi^2_{v_2}} = F_{v_1, v_2} \quad (232)$$

Y recordemos que la función de distribución de F es

$$F = F(F_{v_1, v_2}) = \frac{\left(\frac{v_1 + v_2 - 2}{2}\right)! \cdot \frac{1}{2} v_1 \cdot \frac{1}{2} v_2 \cdot \frac{1}{2} (v_1 - 2)}{\left(\frac{v_1 - 2}{2}\right)! \cdot \left(\frac{v_2 - 2}{2}\right)! \cdot \left(v_2 + v_1 \cdot F_{v_1, v_2}\right)^{\frac{1}{2} (v_1 + v_2)}} \cdot F_{v_1, v_2}$$

$$\mu_{F_{v_1, v_2}} = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{para } v_2 > 2 \quad (233)$$

$$\sigma_{F_{v_1, v_2}}^2 = \frac{v_2^2}{(v_2 - 2)^2 (v_2 - 4) v_1} [2(v_1 + v_2) - 2] \quad \text{para } v_2 > 4$$

siendo también trivial que para $v_2 \rightarrow \infty$

$$F_{v_1, \infty} = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} F_{v_1, v_2} = F(F_{v_1, \infty}) = \frac{1}{v_1} \chi_{v_1}^2$$

siendo

$$G = G\left(\chi_{v_1}^2\right) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2} v_1} \cdot \left(\frac{v_1 - 2}{2}\right)!} \cdot \left(\chi_{v_1}^2\right)^{\frac{v_1 - 2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \chi_{v_1}^2} \quad (234)$$

$$\mu_{\chi_{v_1}^2} = v_1$$

$$\sigma_{\chi_{v_1}^2}^2 = 2v_1$$

y por tanto

$$\mu_{F_{v_1, \infty}} = \frac{1}{v_1} \mu_{\chi_{v_1}^2} = \frac{v_1}{v_1} = 1$$

$$\sigma_{F_{v_1, \infty}}^2 = \frac{1}{v_1} \sigma_{\chi_{v_1}^2}^2 = \frac{1}{v_1} 2v_1 = 2$$

y tambien

$$\mu_{F_{v_1, \infty}} = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{v_2}{v_2 - 2} = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{v_2}{v_2} = 1 \quad (235)$$

$$\sigma_{F_{v_1, \infty}}^2 = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{v_2^2}{(v_2 - 2)^2 (v_2 - 4) v_1} [2(v_1 + v_2) - 2] =$$

$$= \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{2v_2^3}{v_2^3} = 2$$

resultando evidente que la formulación de un estadístico F cualquiera por cociente de estimadores de varianzas de observables de peso unidad, por ejemplo el expresado en (219)

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{n, (m-n)} \quad \text{bajo la hipótesis nula } H_0: \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

refiere al valor óptimo $F_{\text{óptimo}} = 1$, al que tenderá a la media μ_F , valor más probable, con $F_{n, (m-n)} \rightarrow F_{n, \infty}$, según hemos visto en (235). Es claro que las distintas distribuciones se relacionan entre sí de forma que posibilitan comprobaciones imprescindibles en la práctica profesional, como veremos más adelante.

La aplicación de la distribución descrita en el F'-Test se realiza en la misma forma y con igual criterio empleados anteriormente con la distribución χ^2 -Test, test simple y doble, puesto que ambas tienen el mismo parámetro de no centralidad λ con idéntico significado.

Efectivamente, (227) puede escribirse en la forma (124) o (125),

$$\lambda = \sum_{m+1}^{m+n} \delta_{\mu d 2i}^2 \quad (236)$$

estimándose a partir de las expresiones (132), (133), (140) y (141) según teoría anteriormente desarrollada que resuelve la cuestión.

La práctica de la aplicación del F'-Test a nuestros fines es sencilla. En efecto y como caso más general, supongamos el control de deformación de la red definido en su orden "k" por el modelo matemático:

$$A d - K_{dk} = R_{dk} \quad (237)$$

donde

$$\hat{\sigma}_{odk}^2 = \text{estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad.}$$

$d = d_k =$ vector de deformaciones solución del ajuste.

Y aplicando (87), (88) se tendrá el F-test de una punta

$H_0 : d = 0$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{0n}^2}{\hat{\sigma}_{odk}^2} = \frac{dk^T Q_{dk}^{-1} dk}{n \cdot \hat{\sigma}_{odk}^2} = F_{n,g} \quad (238)$$

siendo $g = m-n =$ grados de libertad del ajuste (237)

$m = n^\circ$ de observables del ajuste = invariante

$Q_{dk} = Q_{d1} = 2Q_{xx}$ invariante por hipótesis exigible

en caso determinista, y entendiéndose, según rutina, que podemos acceder al caso de red libre sustituyendo g por $m - R(Q_{dk})$ y Q_{dk}^{-1} por Q_{dk}^+ , o Q_{dk}^- en el caso más general.

La práctica de aplicación, con $F_{\text{óptimo}} = 0$ y test de una punta es ya trivial.

Y ciñéndonos al primer caso, red ligada, para fijar ideas y bajo la hipótesis alternativa de existencia de deformación apreciable escribimos

$H_1 : d \neq 0$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{0n}^2}{\hat{\sigma}_{odk}^2} \frac{\sigma_{T_0}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{\frac{\hat{d}_k^T Q_{dk}^{-1} \hat{d}_k}{n \cdot \sigma_{T_0}^2}}{\frac{\hat{\sigma}_{odk}^2}{\sigma_{T_0}^2}} = \frac{\frac{1}{n} \chi'^2_{n,\lambda}}{F_{g,\infty}} = \frac{\frac{1}{n} \chi'^2_{n,\lambda}}{\frac{1}{g} \chi^2_g} = F'(n, g, \lambda) \quad (239)$$

siguiéndose el mismo razonamiento que en la distribución χ'^2 y deduciéndose también que el parámetro de no centralidad tiene la misma expresión (132) y (140).

$$\lambda_0 = E(\lambda) = \hat{\lambda} = \frac{\hat{d}_{\mu k}^T Q_{dk}^{-1} \hat{d}_{\mu k}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{\hat{d}_{\mu k}^T (2Q_{xx})^{-1} \hat{d}_{\mu k}}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{\hat{d}_{\mu k}^T Q_{xx}^{-1} \hat{d}_{\mu k}}{2\sigma_{T_0}^2} \quad (240)$$

con $E(d_{\mu k}) = \hat{d}_{\mu k}$ determinado según teoría conocida y generalizando a una campaña k arbitraria.

Y la práctica de aplicación del test de deformación significativa es completamente análoga a la correspondiente al $\chi'^2_{v,\lambda}$ -Test explicada en detalle anteriormente. En el caso que nos ocupa, con nivel de significación α y potencia de

test β y grados de libertad ν_1 y ν_2 . Y siempre cifrando y teniendo en cuenta la sensibilidad de la red, en sus diversas acepciones..

La flexibilidad de aplicación del F'-Test es mayor que la del $\chi'_{\nu,\lambda}^2$ -Test permitiendo comparar dos campañas cualquiera bajo la hipótesis alternativa, fraccionando la red o en su conjunto, siendo evidentemente posible también el seguimiento de un vértice, en planimetría, altimetría, y en las tres dimensiones del espacio simultáneamente.

Es subrayable que el $\chi'_{\nu,\lambda}^2$ -Test es una caso particular del F'-Test. En efecto, en (236) se tendrá con la sustitución perfectamente lícita en alta precisión

$$\hat{\sigma}_{odk}^2 \approx \sigma_{T0}^2 \quad (241)$$

$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T0}^2} \frac{\sigma_{T0}^2}{\sigma_{T0}^2} = \frac{\frac{\hat{d}_k^T Q_{dk}^{-1} \hat{d}_k}{n \cdot \sigma_{T0}^2}}{\frac{\sigma_{T0}^2}{\sigma_{T0}^2}} = \frac{\frac{1}{n} \chi'^2_{n,\lambda}}{1} = \frac{1}{n} \chi'^2_{n,\lambda} = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n} \rho \quad (242)$$

$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T0}^2} = \frac{1}{n} \chi'^2_{n,\lambda} = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n} \rho$$

caso determinista, generalizable de inmediato a

$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T0}^2} = \frac{1}{R(Q_{dk})} \cdot \chi'^2_{R(Q_{dk},\lambda)} = F'(R(Q_{dk}), \infty, \lambda) = \frac{1}{R(Q_{dk})} \rho \quad (243)$$

red libre.

De nuevo se trata de interpretar ρ , que es la bien conocida J/Q – variable. Y siendo conocidas las dos distribuciones F y F' y establecidas las hipótesis nula y alternativa el resto es trivial.

7.- CONCLUSIONES

El desarrollo que antecede presenta una metodología original sobre el proceso de determinación microgeodésica de la deformación o variación en el tiempo de una red local.

Es condición previa y necesaria la utilización de instrumentación moderna GNSS o análoga en el trabajo de campo, y metodologías avanzadas de Ajustes Coordinados e Incrementos de Coordenadas en gabinete.

La interpretación estadística de resultados se realiza a través de diversos tests, alguno novedoso que supone un avance sensible sobre los ya conocidos de contrastación simultanea en potencia y nivel de significación.

El trabajo propiamente dicho se realiza en dos etapas diferenciadas y que también presentan un enfoque y tratamiento novedoso con respecto a la metodología que ya se puede llamar clásica. Ambas aplican en campo y gabinete idéntica tecnología sobre la misma red en estudio, pero partiendo de hipótesis ciertas y opuestas, con tratamiento que para fijar ideas nos hemos permitido llamar de “criterio bayesiano”:

- **La primera etapa, solo asequible a la instrumentación moderna empleada, calibra la precisión específica o sensibilidad del método estrictamente ante el trabajo en presencia, considerando la posibilidad cierta de que la propia red pueda tratarse como indeformable al comparar dos campañas de medición consecutivas, equiprecisas y distintas, pero muy cercanas en el tiempo.**
- **La segunda etapa aplica la misma metodología en cuantas campañas consecutivas sean necesarias, considerando ahora la posibilidad de que la propia red pueda tratarse como deformable al considerar un periodo de tiempo suficientemente dilatado.**

A lo largo de todo el trabajo es imprescindible controlar y lograr el mantenimiento de un paquete de invariaciones en observación y cálculo solo asequible a la instrumentación de campo antes definida.

Finalmente, los resultados se contrastan con los datos de sensibilidad específica determinados en la primera etapa y se interpretan en términos de aceptar la existencia de deformación y cifrarla, interpretándola en parámetros estadísticos de alta fiabilidad, o de considerar la red como inalterable, o lo que a nuestros efectos es lo mismo, de nivel alteración no detectable por el método.

8. ANEXO: APLICACIÓN DEL F-TEST DE FISHER-SNEDECOR GENERALIZADO

Merece la pena detenerse en la ampliación del J/Q-Test en su doble aplicación con distribuciones F y F'.

El test pretende estudiar el comportamiento de los observables desde el principio al fin del trabajo, campaña a campaña, a origen y campañas entre sí, tanto con estimadores de muestras finitas y/o zonas de distinta significación como de poblaciones completas.

Supuesto verificado con éxito el análisis que podemos llamar clásico de los observables también clásicos en cada una de las sucesivas campañas, y ciñéndose exclusivamente a observables-deformación, se contrastarán entre sí los estadísticos

$$\sigma_{od}^2, \hat{\sigma}_{od}^2, \sigma_{To}^2, \hat{\sigma}_{To}^2, \hat{\sigma}_{on}^2, \hat{\sigma}_{odki}^2$$

con notación y significado establecido en paginas anteriores. Bajo la hipótesis nula $H_0 : \bar{\sigma}_{\alpha}^2 = \bar{\sigma}_{\beta}^2$, donde $(\rightarrow, \leftarrow)$ pueden ser α o β y $\alpha/\beta \in od, To, on, odki$ $\alpha \neq \beta$ y bajo la doble hipótesis simultanea nula y alternativa $H_0 : d = 0, H_1 : d \neq 0$.

Siempre realizando en garantía del trabajo emprendido y a arbitrio del proyectista cuantas pruebas se precisen, hasta su satisfacción, utilizando los F-Test, F'-Test, χ^2 -Test, χ'^2 -Test, en contrastes simples y dobles. Estos últimos según el J/Q – Test antes enunciado y que ahora se completa.

Ciñéndonos al ejemplo de este anexo, algunos de los Test posibles referidos a determinación de sensibilidades exclusivamente se desarrollan a continuación. Se insiste en que merecerá la pena completarlos con los que sean precisos, tanto a lo largo de todo el proceso en el resto de los ejemplos como en cualquier trabajo real.

Nos referimos en primer lugar a la sensibilidad práctica. Los datos de partida del ejemplo de aplicación son:

Grados de libertad:

$$v_1 = n = 24$$

$$v_2 = n = 24$$

varianzas a priori y posteriori del observable de peso unidad.

$$\sigma_{od}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2 = 1,7655 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

módulo del vector de sensibilidad práctica

$$|d_p| = 0,0406 \text{ m}.$$

matriz cofactor de deformaciones

$$Q_{dd} = (\text{diag } q)_{24,24} = (\text{diag } 0,1667)_{24,24}$$

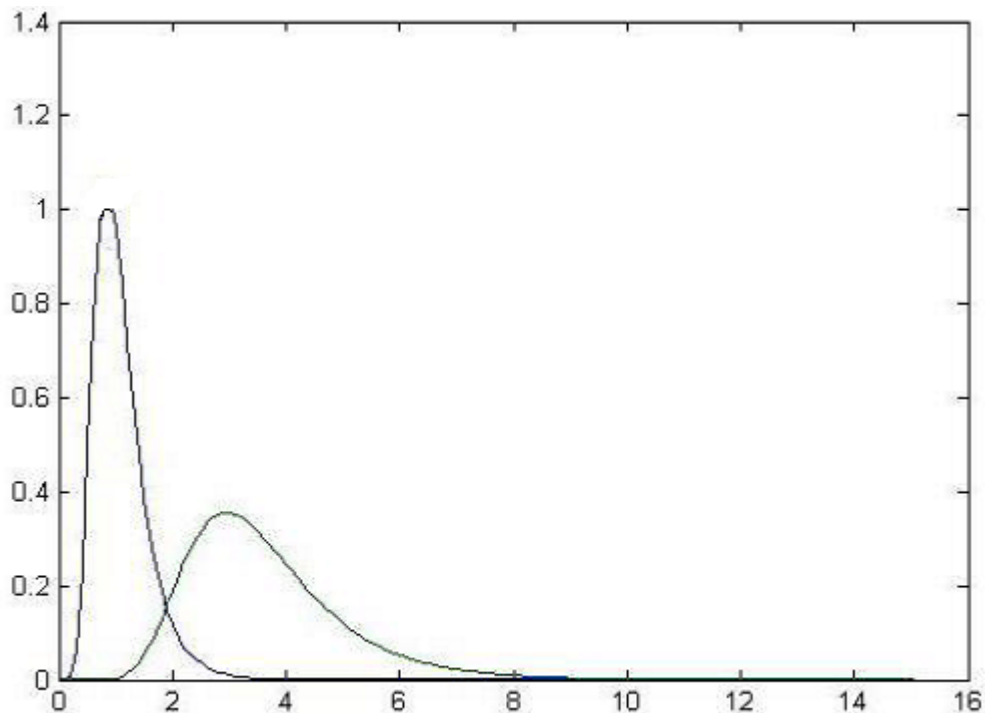
parámetro de no centralidad práctica, con $\sigma_{od}^2 = \sigma_{To}^2$

$$\lambda_P = \frac{|d_P|^2}{q \cdot \sigma_{T_0}^2} = 55,9643$$

abscisa de comparación

$$F \cong \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T_0}^2} = \frac{1}{n} \chi'_{n,\lambda} = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n} \rho = \frac{1}{24} \cdot 55,9643 = 2,3318$$

La figura concernida es la que sigue. De izquierda a derecha curvas F y F' de Snedecor con grados de libertad : $\nu_1 = n = 24$ y con parámetro de traslación $\lambda = 55,9643$



Contraste en J/Q-Test:

1°. La igualdad de varianzas $\sigma_{od}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2 = 1,7655 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. a priori y a posteriori permita aceptar el ajuste con fiabilidad en el entorno de la certeza, bajo la hipótesis nula $H_0 : \sigma_{od}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$, en F-Test , con valor óptimo $F = 1$. Y por lo que respecta a los observables,

La distribución es la curva de la izquierda en la figura, donde llama la atención que el valor máximo de F exceda de la unidad, lo que es imposible y sin duda un error de representación.

2°. Sin embargo, la evidente existencia de un vector umbral de deformación $|d_P| = 0,0406m$. obliga a replantear el problema, aceptada como excelente la práctica de observación y cálculo, y por lo que respecta a la posible deformación de la red.

Bajo la hipótesis nula $H_0 : d = 0$, con abscisa de comparación

$$F \cong F' = \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T0}^2} = \frac{1}{n} \rho = \frac{1}{24} .55,9643 = 2,3318 \text{ y sobre la curva } F \text{ se obtiene un}$$

resultado en nivel de significación de $\alpha = 0,0513$.

Por consiguiente, la probabilidad de COMISIÓN de error de Primer Orden, rechazar H_0 siendo cierta aceptando H_1 siendo falsa, es de un 5%. Generalmente aceptable.

Bajo la hipótesis alternativa simultanea $H_1 : d \neq 0$ con la misma abscisa de comparación $F \cong F' = 2,3318$ y sobre la curva F' se obtiene un resultado en potencia de Test de $\beta = 0,7183$.

Por consiguiente, la probabilidad de COMISIÓN de error de Segundo Orden, rechazar H_1 siendo cierta aceptando H_0 siendo falsa, es de $1 - \beta = 0,7183 = 0,2817$ es decir un 28% aproximadamente, fijada la sensibilidad en $|d_P| = 0,0406m$. Es un valor menos satisfactorio, que afortunadamente veremos a continuación mejora en la práctica por ser necesariamente y por definición el módulo de la deformación detectable superior a la sensibilidad.

Por otra parte, es claro que $\hat{\sigma}_{on} = \sigma_{T0} \sqrt{2,3318} = 1,52 \cdot \sigma_{T0}$. *La desviación típica del observable de peso unidad de la muestra a posteriori de los n observables virtuales ajustados resulta un 50% mayor que la correspondiente a priori de los m observables reales. Los observables virtuales, exactos a priori, resultan a posteriori y una vez ajustados menos precisos que los reales....*

Y en definitiva, los valores de deformación inferiores en módulo a $|d_P|$ se tendrán por no detectables. Cualquier deformación mayor conduce a un parámetro de no centralidad también mayor con el supuesto y algoritmo contemplado que genera un desplazamiento a la derecha de la curva F' , con la consiguiente detección de la deformación. Y también deterioro relativo de los observables virtuales a posteriori. Será preciso establecer la horquilla de aceptación del resultado del trabajo. Y es de sentido común que se tratará siempre de deformaciones que puedan entenderse como diferenciales. Hasta que resulte absurdo emplear la batería de recursos desarrollada.

A este respecto, parece indudable la alta fiabilidad de los números anteriores, que es el objetivo de la Microgeodesia, suficientemente cubierto. Su aceptación o rechazo es otra cuestión ajena a ella y que depende de condicionados externos impuestos de antemano al trabajo en presencia.

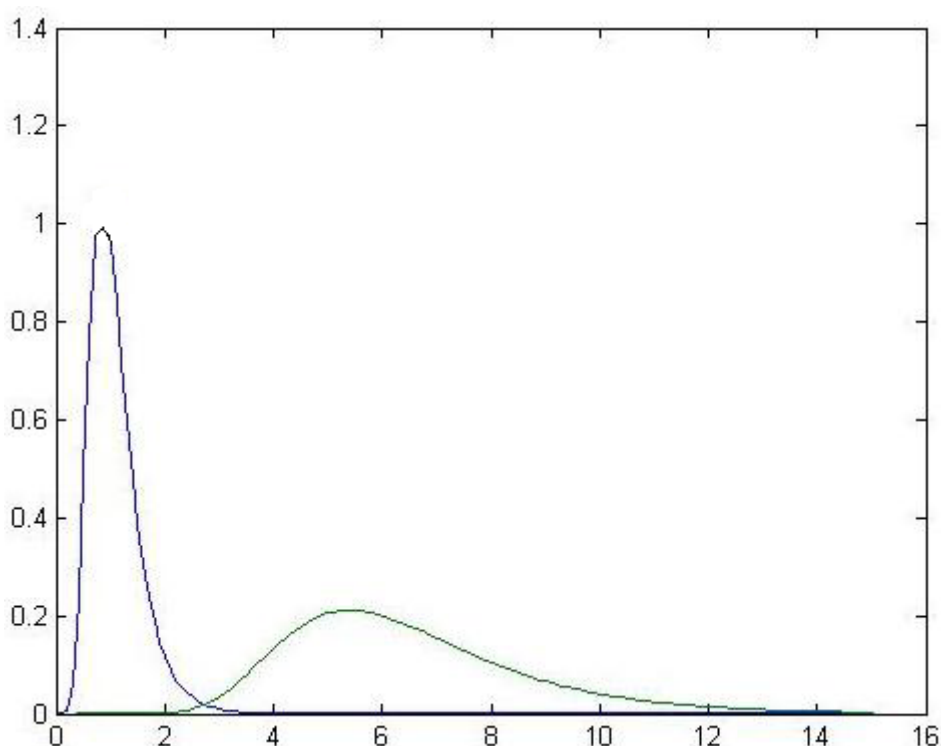
Es evidente que en contrapartida a los observables virtuales, si es aceptable incrementar, aún ligeramente, el umbral de sensibilidad mejoran los resultados de nivel de significación α y potencia de Test β a obtener en J/Q - Test.

Una vez estudiada la sensibilidad práctica en su doble aplicación con distribuciones F y F', nos referimos finalmente a la sensibilidad teórica.

Así, en el ejemplo de aplicación considerado y referido a la sensibilidad teórica, la figura, datos de partida y resultados son los que siguen.

En la figura, de izquierda a derecha, curvas F y F' de Snedecor con grados de

libertad: $v_1 = n = 24$
 $v_2 = n = 24$, y parámetro de traslación $\lambda = 120$



varianzas a priori y posteriori del observable de peso unidad.

$$\sigma_{od}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2 = 1,7655 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

módulo del vector de sensibilidad teórica

$$|d_T| = 0,0594 \text{ m}.$$

matriz cofactor de deformaciones

$$Q_{dd} = (\text{diag } q)_{24,24} = (\text{diag } 0,1667)_{24,24}$$

parámetro de no centralidad teórica con $\sigma_{od}^2 = \sigma_{T0}^2$

$$\lambda_T = \frac{|d_T|^2}{q \cdot \sigma_{T0}^2} = 120,00.$$

abscisa de comparación

$$F \cong \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{T0}^2} = \frac{1}{n} \chi_{n,\lambda}^2 = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n} \rho = \frac{1}{24} \cdot 120 = 5$$

contraste en J/Q-Test:

Bajo la hipótesis nula $H_0 : d = 0$, con abscisa de comparación

$F \cong F' = 5$ y sobre la curva F se obtiene un resultado en nivel de significación de $\alpha = 1,6719 \cdot 10^{-4}$.

Por consiguiente, la probabilidad de COMISIÓN de error de Primer Orden, es prácticamente cero. Es la certeza de su no comisión.

Bajo la hipótesis alternativa $H_1 : d \neq 0$ con la misma abscisa de comparación y sobre la curva F' se obtiene un resultado en potencia de Test de $\beta = 0,7955$.

Con probabilidad de COMISIÓN de error de Segundo Orden, $1 - \beta = 0,20$ es decir un 20% aproximadamente, fijada la sensibilidad en $|d_T|$.

Se tendrá $\hat{\sigma}_{on} = \sigma_{T0} \sqrt{5} = 2,23 \cdot \sigma_{T0}$.

Comentarios y conclusiones análogos al caso anterior. Y se confirma que con el incremento del módulo del vector de sensibilidad $|d|$ se deteriora muy rápidamente la calidad de los observables virtuales a posteriori. La mayor calidad del trabajo se encontrará pues según el criterio expuesto en la detección de deformaciones entendidas como diferenciales cercanas en módulo por exceso al módulo del vector sensibilidad adoptado.

No hay recetas infalibles. Es preciso contrapesar adecuadamente unos criterios de calidad con otros para sacar adelante con el debido rigor, fiabilidad y coste cualquier proyecto técnico de alto nivel como el que nos ocupa.

9. BIBLIOGRAFÍA

ANQUELA, A.B., Aportación al problema general de redes locales de alta precisión: condicionantes específicos de fijación de criterios teóricos y prácticos, de calificación de parámetros intermedios y resultados finales, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2001.

BUSCASHKENAZI, V., Models for control in National and continental Network, Bulletin Geodesique, Vol. 55, 1981.

ASHKENAZI, V., Criterion for optimisation Boletino di Geodesia e Scienze Affine.

BAARDA, W., Measures for the accuracy of geodetic networks, Hungría, Sopron, 1977.

BAARDA, W., S-transformations and Criterion Matrices, Netherlands Geodetic Commission, Vol. 5, núm. 1, 1973.

BAARDA, W., Statistical concepts in Geodesia, Rijkscommissie voor geodesie, Delft, Holanda, 1967.

BAARDA, W., Statistical Transformations and Criterion Matrices, Rijkscommissie voor geodesie, Delft, Holanda, 1967.

BANNISTER, A.; RAYMOND, S., Técnicas modernas en topografía, R. S. Méjico, 1984.

BASELGA, S., Aplicación informática para el diseño y compensación de redes locales, Proyecto Fin de Carrera de Ingeniería en Geodesia y Cartografía, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2000.

BASELGA, S., Cálculo, compensación e interpretación de resultados en redes locales de alta precisión observadas por GPS y Topografía Clásica con aplicación de análisis estadístico multivariante y técnicas de estimación robusta, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2003.

BELAYEV, V., Optimal weiyhting in linear function estimation, Journal of Geodesy, 1996.

BERNÉ, J. L.; HERRÁEZ, J., Instrumentos modernos en Topografía, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993.

BERNÉ, J. L.; BASELGA, S.; ANQUELA, A. B., RedTop. Aplicación Informática para el Diseño, Análisis y Compensación de Redes Topográficas, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2000.

BJERHAMMAR, A., Theory of errors and generalized matrix inverses, Editorial Elsevier, Michigan, 1973.

BEZOARI, G.; MARTÍ, C.; SELVINI, A., Topografía e Cartografía, Editorial Ulrico Hoepli, Milán, 1994.

BLACHUT, T. J. A., CHRZANOWSKI, A., SAASTAMOINEM J.H., Cartografía y levantamientos Urbanos, Editorial Librería del Congreso, Méjico, 1980.

BLACKIE AND SON LTD. Lauf. G. B., The method of least Squares. Editorial Oxford University Press, Londres, 1971.

BOMFORD, G., Geodesy, Editorial Oxford University Press, Londres, 1971.

BURNSIDE, C. D., Electromagnetic Distance measurements, Editorial Crosby Lockwood, Londres, 1971.

CAMACHO, A.; MARTÍN, M., Constreñimientos internos en la compensación de estaciones, Editado por el Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid, 1986.

CASPARY, W. F., Concepts of network and deformation analysis, Monograph XI, School of Surveying, Editorial University of New South Wales, Australia, 1987.

CHEN, Y. Q., Analysis of deformations. Surveys A. generalized Method, Dep. Sur. Eng. Fredericton, Editorial University of New Brunswick, Canadá, 1983.

CHUECA, M., Topografía, Editorial Dossat S.A., Madrid, 1982.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Topografía. Análisis de errores, Tomo I, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Topografía. Nivelación, Valencia, Tomo II, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Topografía. Poligonación, Tomo III, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Topografía. Triangulación, Tomo IV, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1993.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Redes topográficas y locales, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1994.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Ampliación de redes topográficas y locales, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1995.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia, Editorial Paraninfo, Madrid, 1996.

CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., Métodos Topográficos, Editorial Paraninfo, Madrid, 1996.

CHUECA, M.; BERNÉ, J. L., Ampliación de Redes Topográficas y locales. Cuestiones de Diseño, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2000.

CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., Avances en la interpretación de resultados en Redes Locales. Recintos de Error, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2001.

CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2003.

CHUECA, M.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los Problemas del Datum y Principal de Diseño, Editorial Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2007.

DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F., Topografía general y aplicada, Editorial Dossat, Madrid, 1978.

ESPIGA GÓMEZ LOBO, E., El tratamiento matricial del método de los mínimos cuadrados, Madrid, Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.

FERRER TORIO, R.; PINA, B., Métodos topográficos, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1991.

FERRER TORIO, R.; PINA, B., Introducción a la topografía, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Santander, 1991.

FERRER TORIO, R., y otros, Topografía aplicada a la Ingeniería Civil, Universidad de Cantabria, Cantabria, 1992.

GRAFAREND, E. W., Optimisation of Geodetic Networks. Bollettino di Geodesia e Science Affini.

GROTEN. E.; STRAU, B., GPS - Techniques Applied to Geodesy and Surveying, Editorial Springer Verlag, Berlín, 1988.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H; Geodesia Física, Editado por el IGN, Madrid, 1985 .

HIRVONEN, R. A., Adjustment by least squares in Geodesy and Photogrammetry, Editorial Ungar Pub, USA, 1971.

HOFMAN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; COLLINS, J.; GPS. Theory and Practice, Editorial Springer-Verlag, New York, 1994.

HOTINE, M., Mathematical Geodesy, Department of Commerce, Washington D.C., U. S, 1969.

JIMENEZ MARTINEZ, M. J., Innovación y avances en Ajustes Gaussianos de Redes Locales: métodos de Triangulación homogénea y de Incrementos de Coordenadas. Interpretación de resultados, densificación virtual equiprecisa y evolución en el tiempo. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2013.

JORDAN, W., Tratado general de topografía, Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1974.

KENNIE, T. J. M; PETRIE, G., Engineering Surveying Technology, Editorial Taylor & Francis, Oxon, England, 1990.

KINCAID, D.; CHENEY, W., Análisis Numérico: las Matemáticas del Cálculo Científico, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (U.S.A.), 1994.

LEICK, A., GPS. Satellite Surveying, Editorial John Wiley and Sons, New York, 1990.

LEICK, A., GPS. Satellite Surveying, Editorial John Wiley and Sons, New York, 2004.

LEVALLOIS, J.J., Geodesie Générale, Editorial Eyrolles, París,1970.

LÓPEZ CUERVO, S., Topografía, Editorial Mundi Prensa, Madrid, 1994.

MAESTRO, I., BASELGA, S., CHUECA, M., Contribución al estudio microgeodésico de deformaciones: diseño de redes mediante el cálculo y modelización de la incertidumbre, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia 2005.

MARTÍN ASÍN, F., Geodesia y Cartografía matemática, Editorial Paraninfo, Madrid, 1989.

MARUSSI, A., Intrinsic Geodesy, Editorial Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985.

MIKHAIL, E. M.; ACKERMAN, F., Observations and least squares, Editorial IAP. Dun-Donneley Pub, New York, 1976.

MIKHAIL, E. M.; ACKERMAN, F., Analysis and Adjustements of Survey Measurements, Editorial Van Nostrand, New York, 1981.

MONTES DE OCA, M., Topografía, Editorial Mc. Gaw-Hill Interamericana de México, México, 1985.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., Ajuste de redes geodésicas en un arco Tridimensional, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Santander, 1992.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., Análisis de redes libres, Asamblea nacional de Geodesia y Geofísica, Madrid, 1987.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., Concepto de precisión y fiabilidad en redes Geodésicas. Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A. y VALBUENA DURAN, J. L., Determinación de movimientos pequeños por procedimientos de trilateración. Aplicación a la auscultación de presas. Particularización a la presa del Atazar, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Santander, 1992.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., Distancimetría electrónica de precisión. Distanciómetros submilimétricos, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Santander, 1992.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., Medida electrónica de los parámetros topográficos, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, Santander, 1992.

NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., VII Curso de Geodesia Superior. Instrumentos, teoría y funcionamiento, Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid, 1991.

OJEDA RUIZ, J. L., Métodos topográficos y oficina técnica, publicado por el Autor, Madrid, 1984.

OLLIVIER, F., Instruments Topographiques, Editorial Eyrolles, París, 1995.

POPE, A. J., The statistics of the residuals and the detection of outliers, IUGG XVIII, General Assembly, Grenoble, 1975.

RICHARDUS, P.; ALIMAN, J., Project Surveying, Editorial North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.

RICHARDUS. P., Project Surveying, Editorial A. Balkema, Netherlands, 1977.

RÜEGER, J.M., Electronic Distance Measurement, Editorial Springer-Verlag, Berlin Heiderberg, Alemania, 1996.

RÜEGER, J.M., Precision of measurements and least squares, 37th Australian Surveyors Congress, Perth, Western Australia, 13-19 April 1996.

RUIZ MORALES. M., Manual de Geodesia y Topografía, Editorial Proyecto Sur, Granada, 1991.

RUSSELL, C; WOLF, P.R., Elementary Surveying, Editorial Harper and Row Publishers, Inc., 1984.

SEVILLA, M. J.; NÚÑEZ, A., Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geoido, Física de la Tierra, Editorial Universidad Complutense, Madrid, 1980.

SEVILLA, M. J., Colocación mínimos cuadrados, Madrid, Editorial Instituto de Astronomía y Geodesia, 1987.

SEVILLA, M. J., Curso de Geodesia Superior, Editorial Universidad Complutense, Madrid, 1987.

SEVILLA, M. J.; MUÑOZ, P. VELASCO, J.; ROMERO, P., “Calibración de un distanciómetro de infrarrojos en una base interferométrica”. Revista Topografía y Cartografía, Vol. III, 1987.

SEVILLA, M. J., Compensación de redes de nivelación trigonométrica, Editorial Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid, 1989.

SEVILLA, M. J., Soluciones progresivas en el método mínimos cuadrados, Editorial Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid, 1989.

SEVILLA, M. J., Física de la Tierra II, Editorial Universidad Complutense, Madrid, 1990.

SEVILLA, M. J., Refracción atmosférica y su influencia en la medida electromagnética de distancias, VII Curso de Geodesia Superior, Editorial Instituto de Astronomía y Geodesia, Madrid, 1991.

STRANG, G., Álgebra lineal y sus aplicaciones, Editorial Addison-Wesley, Madrid, 1990.

WOLFGANG, T. Geodesia física, Editorial Diana, Madrid, 1983.

VALBUENA DURAN. J. L., Distanciometría electrónica, calibración y puesta a punto, Revista Topografía y Cartografía, Vol. IV, 1989.

VANICEK, P., y KRAKWSKY, E., Geodesy, Editorial North Holland, Amsterdam, 1986.

WELLACH, W., A review of the adjustment of the free network. Survey Review, XXV, 194, 1979.

ZAKATOV, P.S., Curso de Geodesia Superior, Editorial Mir, Moscú, 1981.

ZUND, J., Foundations of Differential Geodesy, Editorial Springer-Verlag, Londres, 2012.