

**El Problema Principal de Diseño.
Densificación a partir de la Solución
Inversa Generalizada Recíproca con
Zonas de Distinta Significación**

M.J. Jiménez Martínez, M. Chueca Pazos

2 de noviembre de 2012

Autora: M.J. Jiménez Martínez, M. Chueca Pazos
Tlfno. 963877007 Ext.75531
Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera, s/n
46022 Valencia
RECEPCIÓN: 06-11-2012
APROBACIÓN: 20-11-2012

El Problema Principal de Diseño. Densificación a partir de la Solución Inversa Generalizada Recíproca con Zonas de Distinta Significación

El objetivo del presente artículo es la densificación cartográfica de un punto o grupo de puntos relacionados, por intersección directa virtual, con vértices de la red primaria. Las ventajas son múltiples, destacamos en primer lugar se conocen las figuras de error y las probabilidades individuales o simultánea asociadas un punto a varios o a todos los puntos identificados sobre la cartografía en estudio, basándonos en el Análisis Multivariante Normal. Otra ventaja importante es la información que aporta al replanteo topográfico. Con este método podemos completar un Modelo Digital del Terreno con menos trabajo de campo, con más conocimiento de la precisión del levantamiento y con una buena interpretación de los resultados.

El presente trabajo completa cuatro publicaciones anteriores que constituyen la preparación previa e imprescindible para su estudio y comprensión. Los cuatro artículos publicados están en la Revista Digital: www.racv.es/racv: “Progreso en la práctica del Ajuste Gaussiano de una red local. Método de Triangulación”, “Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas”, y “Recintos de error y su interpretación en el Ajuste Gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis”, y por último “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”.

PALABRAS CLAVES:

MICROGEODESIA, RED LIBRE, AJUSTE DE REDES, FIGURAS DE ERROR, FIABILIDAD DE RESULTADOS, PROBLEMA DEL DATUM, PROBLEMA DE DISEÑO DE ORDEN DOS

El Problema Principal de Diseño. Densificación a partir de la Solución Inversa Generalizada Recíproca con Zonas de Distinta Significación

The goal of the present paper is the cartographic densification of one or a group of linked points by virtual direct-intersection, with primary network vertex.

There are lots of advantages, we focus at first that we know the error figures and the individual probabilities or simultaneous in association with a point or several or every point identified on the cartography in study, that we based in the Normal Multivariate Analysis.

Other important advantage is the information that provides to the topographical setting out. With that method we can complete a DTM with less fieldwork, with more knowledge about the accuracy of the survey and a good interpretation of the results.

To deal with the theory and practice that we present here, we refer to the four previous articles that has published in the Digital Journal: www.raev.es/raev “Progreso en la práctica del Ajuste Gaussiano de una red local. Método de Triangulateración”, “Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas”, “Recintos de error y su interpretación en el Ajuste Gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis”, and “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”.

Key Words:

Microgeodesy, free-network, network adjust, error figures, result's reliability, datum problem, PP2

EL PROBLEMA PRINCIPAL DE DISEÑO.
DENSIFICACIÓN A PARTIR DE LA SOLUCIÓN
INVERSA GENERALIZADA RECÍPROCA CON
ZONAS DE DISTINTA SIGNIFICACIÓN

M.J. Jiménez Martínez, M. Chueca Pazos

27 de noviembre de 2012

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	4
2. CUESTIONES CONCEPTUALES	20
2.1. CASO MALLA RECTANGULAR	20
2.2. CASO GENERAL CON UTILIZACIÓN DE EJES OBLICUOS	68
2.3. NOTA ACERCA DE LA DENSIFICACIÓN DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”, O VÉRTICES OBTENIDOS CON SOLUCIÓN PSEUDOINVERSA	91
3. APLICACIÓN SOBRE LA RED DE LA UPV	102
3.1. Vértices iniciales	102
3.2. RECINTOS DE ERROR DE LOS VÉRTICES INICIALES	103
3.2.1. LA ZONA “A”	104
3.2.1.1. COORDENADAS DE LA ZONA “A”	104
3.2.1.2. VARIANZA A PRIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD	104
3.2.1.3. VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD	105
3.2.1.4. MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”	105

3.2.1.5.	MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”	105
3.2.1.6.	SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “A”	106
3.2.1.7.	AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”	107
3.2.1.8.	SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES	108
3.2.1.9.	RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	109
3.2.2.	LA ZONA “B”	115
3.2.2.1.	COORDENADAS DE LA ZONA “B”	115
3.2.2.2.	MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”	115
3.2.2.3.	MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”	115
3.2.2.4.	SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “B”	116
3.2.2.5.	AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”	116
3.2.2.6.	SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES	117

4. DENSIFICACIÓN DE LA RED DE LA UPV	118
4.1. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “A”	119
4.1.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	119
4.2. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS PERTENECIENTES AL ARCO CA- PAZ DE $\frac{\pi}{2}$ SOBRE LA BASE DEFINIDA POR LOS VÉRTICES $V_1 V_2$	120
4.2.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	122
4.3. DENSIFICACIÓN CON UN PUNTO CUALQUIERA EN REFERENCIA AL CASO TEÓRICO DE EJES OBLICUOS	125
4.3.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	127
4.4. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “B”	129
4.5. DENSIFICACIÓN CON PUNTOS CON ABCISAS PROCEDENTES DE LA ZONA “A” Y ORDENADAS DE LA ZONA “B” Y VICEVERSA . . .	131
5. CONCLUSIONES	134
6. BIBLIOGRAFÍA	137

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Es objeto del trabajo que sigue la interpretación en términos de error temible y probabilidad de comisión del resultado obtenido en el ajuste gaussiano de una Red Local, desde el caso más simple al más general, considerando simultáneamente todas las variables o coordenadas, o fraccionándolas en grupos arbitrarios y densificando la red sin trabajo de campo adicional e incorporando nuevas variables interpretadas con idéntico poder de afirmación.

Procederemos por inducción en sucesivas particularizaciones del caso más general posible, cuya solución multivariante formularemos. Del mismo modo se estudiará la progresiva complejidad del proceso y como tratarla.

El supuesto más sencillo a considerar en el ámbito de actuación demarcado es obviamente la interpretación individualizada de la abscisa, la ordenada o la cota de un vértice previamente calculada. Puede considerarse siempre como una variable X , representativa de una magnitud escalar, no siendo asequible el conocimiento de la cifra X_e de su valor exacto,

Sí y solo si puede escribirse que X es una variable normal, en la fig 1.1 de interpretación inmediata

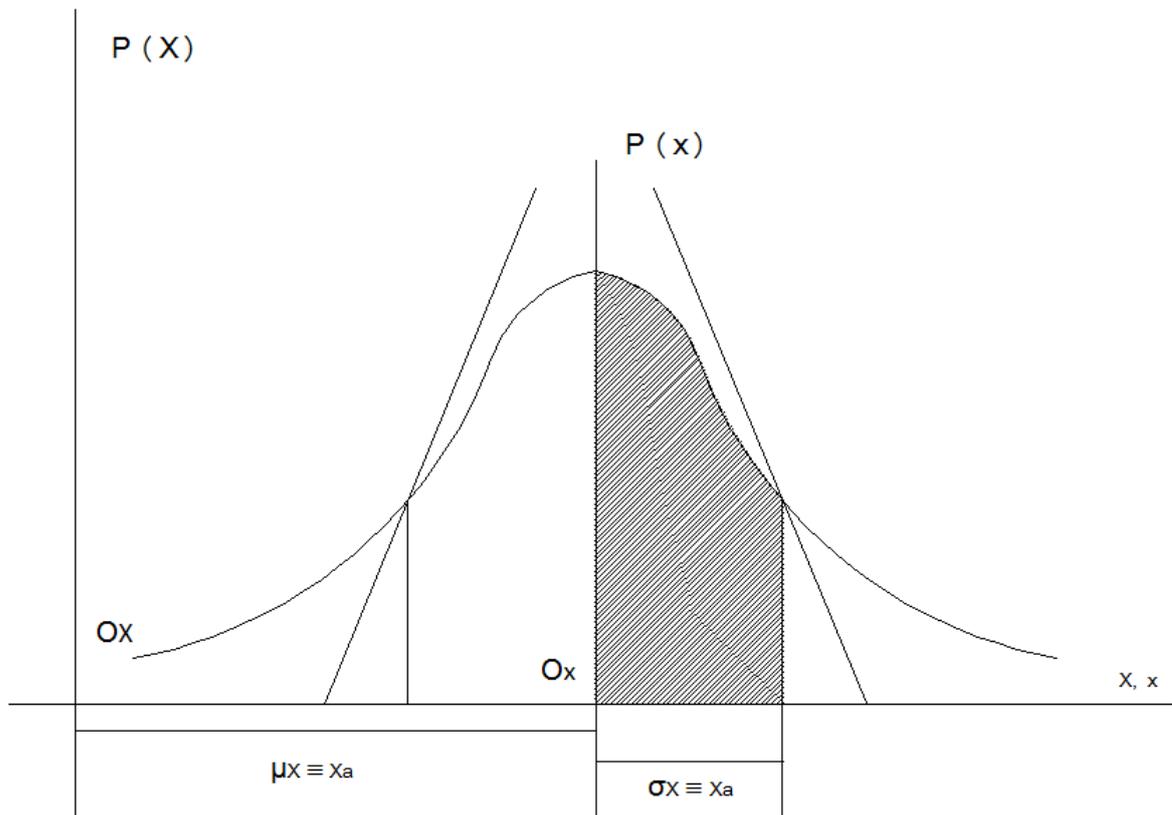


Figura 1.1: Curva de probabilidad normal de Gauss univariante

$$X \sim N(\mu_x = X_a, \sigma_x) \quad (1)$$

Se verificará según rutina

$$P(X) = P(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \quad (2)$$

semitipificando X según

$$X = \mu_x + x \quad (3)$$

$$\sigma_X = \sigma_x \quad (4)$$

pudiéndose escribir además

$$X = \sigma_x \cdot T + \mu_x \quad (5)$$

donde

$$T \sim N(0, 1) \quad (6)$$

Siendo T ¹, variable normal tipificada.

Y se podrá describir la realidad física aceptando el valor más probable

$$E(X) = M = \mu_x = X_a \quad (7)$$

al que se tendrá acceso *por el procedimiento que se entienda más adecuado* en cada supuesto. En el presente caso de una variable acostumbra a ser asequible y preferirse la media aritmética μ_x de los distintos valores obtenidos por medición directa o indirecta, siendo su probabilidad máxima.

$$P_{m\acute{a}x} = P(X = \mu_X) = P(x = 0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \quad (8)$$

expresándose para cualquier otro supuesto (incluyendo el anterior) como

$$P_{m\acute{a}x} = P(X = X_a) = P(x = 0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \quad (9)$$

que generalizaremos al caso multivariante, según se verá.

Sin embargo y para obtener un resultado riguroso y de aplicación práctica, es preciso establecer la integral definida

$$\begin{aligned} P_{\Phi} &= \int_{X_a - k\sigma_X}^{X_a + k\sigma_X} P(X) \cdot dX = \int_{-k\sigma_X}^{+k\sigma_X} P(x) \cdot dx = \int_0^{+k\sigma_X} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT = 2 \cdot [N(0, 1)]_0^k \quad (10) \end{aligned}$$

donde el recinto de integración (intervalo en este caso) es

$$\Phi \equiv \left\langle \begin{array}{l} X_a - k \cdot \sigma_X \leq X \leq X_a + k \cdot \sigma_X \\ |x| \leq k \cdot \sigma_x \end{array} \right\rangle \quad (11)$$

¹Utilizamos la notación T en este caso, en lugar de Y , empleada anteriormente en Análisis Multivariante para prevenir ambigüedad con expresiones posteriores.

siendo k una constante arbitraria. P_{Φ} se representa por un área bidimensional. Para $k = 1$ valdrá el doble de la superficie rayada en la figura 1.1.

Y evidentemente, la exigencia y cifrado a priori de una fiabilidad suficiente permite establecer rigurosamente una k y consecuentemente un recinto de integración, o de incertidumbre, en cuyo interior se encontrará el valor exacto X_e desconocido.

Por ejemplo, para $k = 1$, caso representado en la figura 1.1, la integral definida (10) resulta igual a 0,68 y con $k = 4$ resulta igual a la unidad con error despreciable en la inmensa mayoría de los casos, sea cual fuere la exigencia a priori establecida. Quiere decir que *con certeza* puede aceptarse que el valor adoptado X_a se aproximará al exacto X_e en menos de $4\sigma_x$.

Desconocemos el punto sobre el eje de abscisas X/x de la figura 1.1 donde se halla X_e , pero se cumplirá que

$$X_a - 4\sigma_x \leq X_e \leq X_a + 4\sigma_x \quad (12)$$

y si el error o aproximación $e_X = \pm 4\sigma_x$ es aceptable, X_a resuelve irreprochablemente y con todo rigor el problema.

Resumiendo:

- $E(X) = M = \mu_x = X_a$ es el valor más probable, solución adoptada. Coincide en el presente caso el valor más probable a priori y a posteriori.
- La función de probabilidad de X es

$$P = P(X) = P(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{X-M}{\sigma_X}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2}$$

- Se cumple que $X = \sigma_x \cdot T + \mu_x = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}} \cdot T + \mu_x = B \cdot T + M$, donde $T \sim N(0, 1)$.
- El lugar geométrico de los puntos X/x equiprobables con una probabilidad arbitraria $P = P(X) = P(x)$ se reduce a dos valores aislados de X/x tales que $X = \mu_x \pm x = M \pm x$, donde suele medirse $x = \pm k \cdot \sigma_x$ en desviaciones típicas sobre el valor más probable.

- La probabilidad $P_\Phi = P(|x| \leq k\sigma_x)$, concierne a los puntos X/x cuyo lugar geométrico es el segmento de recta sobre el eje de abscisas que une los valores anteriores y se expresa como $|x| \leq k\sigma_x$. Su valor viene dado por la integral definida simple de la función normal de Gauss

$$\begin{aligned}
 P_\Phi &= \int_{M-k\sigma_x}^{M+k\sigma_x} P(X) \cdot dX = \int_{-k\sigma_x}^{+k\sigma_x} P(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+k\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \cdot dx = \\
 &= 2 \cdot \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot T^2} \cdot dT = 2 \cdot [N(0, 1)]_0^k
 \end{aligned}$$

extendida al segmento de recta anteriormente citado considerado como recinto de integración.

Geométricamente está representada por el área bidimensional plana encerrada por la curva $P = P(X)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm k \cdot \sigma_x$. Doble de la superficie rayada en figura 1.1, representativa del caso $k = 1$.

Consideremos a continuación el caso más complejo de dos variables normales representativas para fijar ideas de las coordenadas de un vértice A en planimetría y sea su expresión

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \quad (13)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y) \quad (14)$$

$A(M_X, M_Y)$, coordenadas valores más probables ajustadas. Con menor rigor pueden entenderse también a priori.

A posteriori serían los valores compensados que, salvo decisión específica y justificada en contra, se supondrán obtenidos por aplicación del Método de Ajuste Gaussiano de Incrementos de Coordenadas, desarrollado en trabajos anteriores².

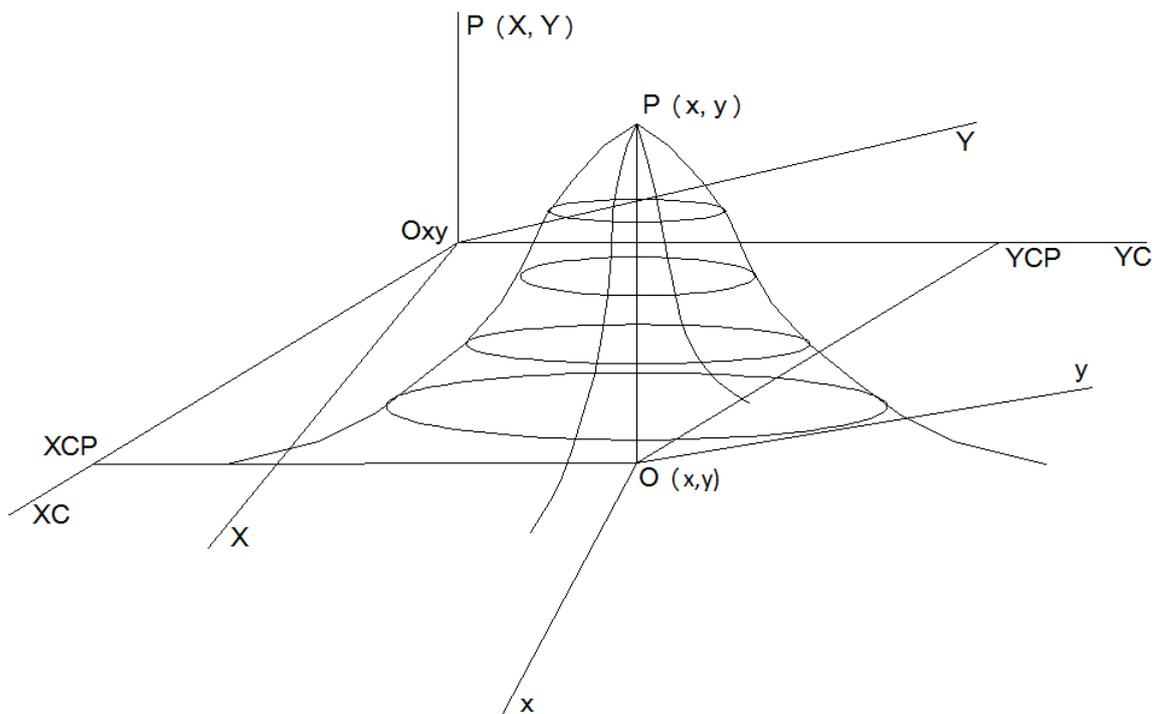


Figura 1.2: Recinto de probabilidad normal en el caso de dos variables

Así en la figura 1.2 ampliamos a dos variables el caso de una anteriormente estudiado.

Directamente podemos escribir³

$$\begin{aligned}
 P(X, Y) = P(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X-M)^T \cdot \sigma_{XX}^{-1} \cdot (X-M)} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \quad (15)
 \end{aligned}$$

con notación bien conocida, siendo

$$X = M + x \quad (16)$$

²Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, N. QUESADA OLMO, M. VILLAR CANO, J.M. PAREDES ASENCIO, A. MARQUÉS MATEU, "Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas". Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital). Valencia, 2011.

³Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, FR. GARCÍA GARCÍA, M. VILLAR CANO. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por Incrementos de Coordenadas". Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital). Valencia, 2012. Pg 159 y sig.

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} \quad (17)$$

verificándose además

$$X = B \cdot T + M \quad (18)$$

Vector normal multivariante de coordenadas compensadas, donde

$$B = (\sigma_{XX})^{\frac{1}{2}} = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$M = E(X) \quad (20)$$

$$T \sim N(0, 1) \quad (21)$$

siendo X , M , x , T , vectores columna de dos componentes.

Las expresiones (15) se representan en la figura referidas a unos ejes arbitrarios

O_{XY} y su trasladado de vector M , O_{xy} , resultando la probabilidad máxima:

$$\begin{aligned} P(X, Y)_{máx} &= P(x, y)_{máx} = P(X = M) = P(x = 0) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \quad (22) \end{aligned}$$

por otra parte en (15) tomando neperianos

$$\begin{aligned} L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= C^2 = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = \\ &= (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \quad (23) \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \cdot (x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy}) = \\ &= x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} = C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) \end{aligned}$$

haz de elipses con centro en el vértice compensado A_C y ejes paralelos , siendo

$$L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot \left| \sigma_{xx} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} = C^2 = \text{Constante para una } P \text{ determinada}$$

Así en la figura 1.2 se representa el haz de elipses de probabilidades constantes Φ_P secciones planas y paralelas de (15) por planos $P = \text{Constante}$.

Para la probabilidad correspondiente a $C = 1$ se obtiene la elipse standard de A_C

$$ES \equiv x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} - \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 + \sigma_{xy}^2 = 0$$

$$ES \equiv x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x - 1 = 0 \quad (24)$$

y del mismo modo que en (10), la probabilidad de que el vértice exacto A_e se encuentre dentro del recinto de incertidumbre o error definido por la elipse Φ_P valdrá en este caso la integral doble

$$P_\Phi = \iint_{\Phi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left| \sigma_{xx} \right|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \cdot dx \cdot dy \quad (25)$$

donde en el exponente de la función subintegral aparecen los términos cuadráticos de la elipse standard ES . La integral se extiende en principio al recinto

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \Phi_P \equiv x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} = \\ &= L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot \left| \sigma_{xx} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \cdot \left(\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

elipse homotética de ES y razón C , arbitraria.

El resultado es un volumen como el de la figura 1.3, formado por dos secciones acoladas: un cilindro recto con base en el plano del levantamiento Oxy y centro en el origen O , base la proyección ortogonal de la elipse Φ_P sobre dicho plano, generatrices verticales hasta cortar a la superficie de probabilidad $P = P(x, y)$,

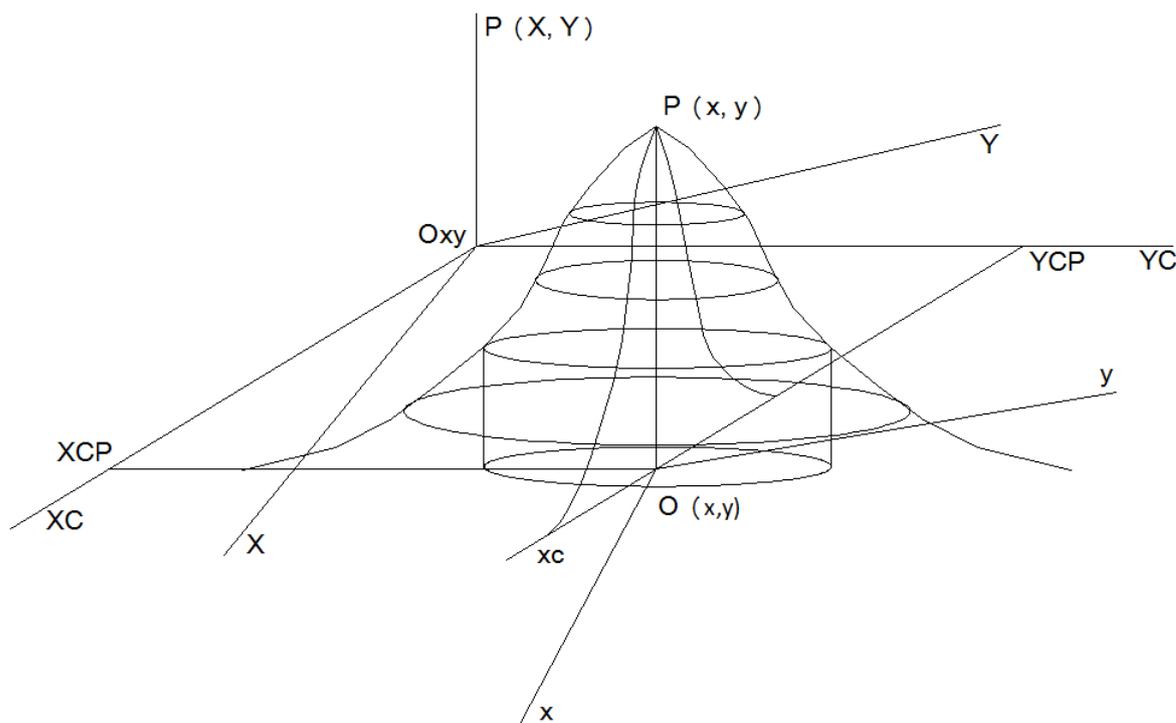


Figura 1.3: Volumen formado por un cilindro recto que corta a la superficie de probabilidad $P = P(x, y)$

que evidentemente lo hará en Φ_P , cubierto por el resto de la superficie citada, hasta su vértice en P_{max} .

El cálculo directo de (25) puede abordarse practicando una rotación de los ejes OXY , Oxy un mismo ángulo hasta situarlos en la dirección de los ejes de las elipses Φ_P , en O_{XCYC} y O_{xcyc} respectivamente (fig. 1.3).

El cambio de variable por rotación bien conocido

$$z = \Gamma^T \cdot x \quad (27)$$

con $\Gamma =$ matriz de autovectores columna de σ_{xx} resuelve la cuestión, transformando las elipses Φ_P a su expresión canónica desapareciendo las covarianzas, cuyo significado físico resulta a lo menos dudoso, al depender su existencia de un operador geométrico.

$$z = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \Gamma^T \cdot x = \Gamma^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \Gamma \cdot z = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \quad (28)$$

y practicándolo en (25) se obtiene

$$\begin{aligned} P_\Phi &= \iint_{\Phi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_c^2}{\sigma_{x_c}^2} + \frac{y_c^2}{\sigma_{y_c}^2} \right)} \cdot dx_c \cdot dy_c \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \iint_{\Phi} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_c^2}{\sigma_{x_c}^2}} \cdot dx_c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{y_c^2}{\sigma_{y_c}^2}} \cdot dy_c \end{aligned} \quad (29)$$

integral de variables separadas.

Sin embargo, establecer los límites de integración con el recinto elíptico considerado no es fácil. Y por otra parte y a efectos prácticos, el recinto de integración puede y debe modificarse si con ello se facilita el cálculo o se obtiene mayor información en el resultado.

Así, sabemos por teoría conocida que la proyección de cualquier elipse Φ_P , sobre sus ejes coordenados, en su caso más general, vale $2 \cdot \sigma_x$ y $2 \cdot \sigma_y$ ⁴. En nuestro caso canónico se proyectará según los ejes y se tendrá

$$\sigma_{x_c} = a \quad (30)$$

$$\sigma_{y_c} = b \quad (31)$$

Y en definitiva, puede resolverse el problema cambiando el recinto de integración, que también es de incertidumbre por el mucho más cómodo

$$\Psi = \left\langle \begin{array}{l} |x_c| \leq C \cdot a = C \cdot \sigma_{x_c} \\ |y_c| \leq C \cdot b = C \cdot \sigma_{y_c} \end{array} \right\rangle \quad (32)$$

En su caso más general, con $C =$ constante arbitraria, rectángulo con centro en el vértice compensado $A(X_{CP}, Y_{CP})$, que es también el origen Oxy , circunscrito a la elipse elegida Φ_P , tangente en sus vértices y de lados sus ejes $2 \cdot C \cdot a$ y $2 \cdot C \cdot b$. Mas coherente con el caso anterior, de segmento de recta.

Definitivamente

⁴*Ibidem.* Pg 70 y sig.

$$\begin{aligned}
P_{\Psi} &= \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-b=-C \cdot \sigma_{yc}}^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{y_c^2}{\sigma_{yc}^2}} \cdot dy_c \cdot \int_{-a=-C \cdot \sigma_{xc}}^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_c^2}{\sigma_{xc}^2}} \cdot dx_c \quad (33)
\end{aligned}$$

probabilidad de que el vértice exacto A_e se encuentre dentro del recinto Ψ . Adicionalmente, la utilización de la constante C permite calcular en (23) la probabilidad P asociada a los puntos de la elipse Φ_P inscrita en Ψ .

Es inmediato tipificar (33) mediante el cambio de variables

$$T = \frac{x_c}{\sigma_{xc}} = \frac{y_c}{\sigma_{yc}}$$

$$dx_c = \sigma_{xc} \cdot dT = dy_c = \sigma_{yc} \cdot dT \quad (34)$$

siguiéndose

$$\begin{aligned}
P_{\Psi} &= \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sigma_{xc} \cdot \sigma_{yc}} \cdot \int_{-b=-C \cdot \sigma_{yc}}^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{yc} \cdot dT \cdot \int_{-a=-C \cdot \sigma_{xc}}^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{xc} \cdot dT = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT = \\
&= 2 \cdot N(0, 1)_0^C \cdot = 2^2 \cdot [N(0, 1)_0^C]^2 = [2 \cdot N(0, 1)_0^C]^2 \quad (35)
\end{aligned}$$

resultando evidente la relación con (10) en el caso anterior, que se obtiene particularizando el presente para una sola variable.

Así y completando el análisis, (35) representa la probabilidad anteriormente mencionada de que el vértice exacto A_e se encuentre dentro del recinto Ψ , y de que sus coordenadas X_{Ae} , Y_{Ae} disten de las compensadas X_{CP} , Y_{CP} a lo más $\pm C \cdot a$ y $\pm C \cdot b$ respectiva y simultáneamente, *siendo en nuestra opinión esta última característica fundamental para nuestro trabajo profesional.*

La generalización para tres dimensiones es trivial y de nuevo se obtiene en la práctica la certeza para $C = 4$.

Resumiendo:

- $E(X) = M$ es el valor más probable, solución adoptada. En rigor debe utilizarse el valor ajustado gaussiano a posteriori.
- La función de probabilidad de X es

$$\begin{aligned} P(X, Y) = P(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X-M)^T \cdot \sigma_{XX}^{-1} \cdot (X-M)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \end{aligned}$$

- Se cumple que $X = B \cdot T + M$, vector de coordenadas compensadas más probables, donde $B = (\sigma_{XX})^{\frac{1}{2}} = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}}$, $T \sim N(0, 1)$ y $M = E(X)$.
- El lugar de los puntos X/x equiprobables con una probabilidad arbitraria $P = P(X) = P(x)$ es una de las elipses con centro en el vértice compensado A_C y ejes paralelos

$$\begin{aligned} L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= C^2 = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = \\ &= (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \cdot (x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy}) = \\ &= x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} = C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) \end{aligned}$$

siendo $C^2 = \text{Constante}$ para una P prefijada.

- La probabilidad conjunta P_Ψ , donde $\Psi = \left\langle \begin{array}{l} |x_c| \leq C \cdot a = C \cdot \sigma_{xc} \\ |y_c| \leq C \cdot b = C \cdot \sigma_{yc} \end{array} \right\rangle$, concierne

a los puntos X/x cuyo lugar geométrico es el rectángulo definido por las rectas

$$\left\langle \begin{array}{l} |x_c| = C \cdot a = C \cdot \sigma_{xc} \\ |y_c| = C \cdot b = C \cdot \sigma_{yc} \end{array} \right\rangle.$$

Su valor, previas las transformaciones por rotación antes descritas, es el de la integral doble de variables separadas de la función normal bivalente de Gauss

$$\begin{aligned}
P_{\Psi} &= \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sigma_{xc} \cdot \sigma_{yc}} \cdot \int_{-b=-C \cdot \sigma_{yc}}^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{yc} \cdot dT \cdot \int_{-a=-C \cdot \sigma_{xc}}^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{xc} \cdot dT = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT = \\
&= 2 \cdot N(0, 1)_0^C \cdot 2 \cdot N(0, 1)_0^C = 2^2 \cdot [N(0, 1)_0^C]^2 = [2 \cdot N(0, 1)_0^C]^2
\end{aligned}$$

extendida al rectángulo antes definido considerado como recinto de integración.

Geoméricamente y supuesto $C = 1$, figura 1.3, corresponde al volumen formado por dos secciones acoladas, a saber: un prisma recto (no representado) con base rectangular en el plano del levantamiento, centro en el vértice compensado $A(X_{CP}, Y_{CP})$, que es también el origen Oxy , circunscrita a la elipse elegida Φ_P , tangente en sus vértices y de lados sus ejes $2 \cdot a$ y $2 \cdot b$, aristas verticales hasta cortar a la superficie de probabilidad $P = P(xy)$, según dicho rectángulo, cubierto por el resto de la superficie citada, hasta su vértice en P_{max} .

Es claro que el caso de una variable se deduce como una particularización del presente de dos variables. Del mismo modo, la extensión a tres variables (un vértice en el espacio tridimensional) es inmediata según lo expuesto, debiendo señalarse que los cálculos resultan más prolijos y la interpretación geométrica de la integral triple de probabilidad resultante es un hipervolumen tetradimensional, sin realidad física.

Finalmente, el caso más general corresponde al ajuste , compensación gaussiana e interpretación de resultados de una red local, bi o tridimensional, formada por un número cualquiera de vértices.

Así el vector de variables X asociado a la red tendrá un número par de componentes si se refiere a una red planimétrica o bidimensional y un número impar y múltiplo de tres si tridimensional. Y como de nuevo esta última es una extensión de la primera, con alguna complicación adicional de cálculo, nos referiremos a continuación monográficamente al caso planimétrico más general, con un número de vértices igual o mayor que dos, y de coordenadas $n \geq 4$.

La red propiamente dicha se representa por el afijo de X referido a un sistema de ejes cartesianos n-dimensional.

El desarrollo inicial es en principio generalización puntual del anteriormente expuesto.

Resumiendo:

- $E(X) = M$ es el valor más probable, solución adoptada. En rigor debe utilizarse el valor ajustado gaussiano a posteriori.
- La función de probabilidad de X es

$$P(X) = P(x) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X-M)^T \cdot \sigma_{XX}^{-1} \cdot (X-M)} =$$

$$= \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x}$$

siendo $n =$ numero de coordenadas generado por los vértices de la red, obteniéndose los casos anteriores particularizando para $n = 1, 2$.

- Se cumple que $X = B \cdot T + M$, vector de coordenadas compensadas más probables, donde $B = (\sigma_{XX})^{\frac{1}{2}} = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}}$, $T \sim N(0, 1)$ y $M = E(X)$, que define en su caso más general la distribución normal multivariante de las componentes del vector X .

Siendo de nuevo los casos anteriores particularizaciones para $n = 1, 2$.

- El lugar de los puntos n-dimensionales afijos de X/x equiprobables con una probabilidad arbitraria $P = P(X) = P(x)$ es uno de los hiperelipsoides del haz de ejes paralelos y con centro en el vértice compensado n-dimensional A_C cuya ecuación es

$$L \cdot \left(P \cdot (2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n} \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} = C^2 = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x$$

siendo $C = \text{Constante}$ para una P prefijada.

Evidentemente, sin realidad física.

• Referido el hiperelipsoide de que se trate a forma canónica mediante la conocida transformación de ejes $z = \Gamma^T \cdot x$, la probabilidad conjunta P_Ψ , donde el recinto de incertidumbre es $\Psi = \left\langle \begin{array}{l} |z_i| \leq C \cdot a_i = C \cdot \sigma_{zi} \\ i \in 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right\rangle$, que concierne a los puntos transformados Z/z cuyo lugar geométrico es el hiperparalelepípedo circunscrito al hiperelipsoide canónico definido por los hiperplanos $\left\langle \begin{array}{l} |z_i| = C \cdot a_i = C \cdot \sigma_{zi} \\ i \in 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right\rangle$, tangentes en sus vértices, viene dada por la integral múltiple⁵

$$P_\Psi =$$

$$= \iiint \dots \int_{\Psi, n} \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \left(\frac{z_i}{C \cdot \sigma_{zi}} \right)^2} \cdot dz_1 \cdot dz_2 \cdot dz_3 \cdot dz_4 \dots \cdot dz_n$$

que se resuelve por la de variables separadas

$$P_\Psi =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{z1}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{z2}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \dots \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{zn}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT =$$

$$= 2^n \cdot [N(0, 1)_0^C]^n = [2 \cdot N(0, 1)_0^C]^n$$

extendida al hiperparalelepípedo Ψ antes definido considerado como recinto de integración.

No existe evidentemente representación geométrica con realidad física.

Y a partir de lo expuesto el problema práctico puede así plantearse en toda su generalidad. Se trata en definitiva de conferir realidad e interpretación física

⁵Ibidem. Pg. 29 y sig.

práctica y rigurosa, bi y tridimensionales, a la doctrina descrita. Es posible, y en trabajos anteriores nuestros se ha desarrollado y tratado exhaustivamente una solución⁶ a la que nos remitimos. No insistiremos sobre ella.

Queda extender la doctrina a la densificación de la red de que se trate hasta alcanzar cualquier punto de la superficie cubierta, interpretando el resultado sin pérdida de rigor y supresión o sustancial ahorro en trabajo de campo adicional. Es el objeto del trabajo que sigue, en el que aplicaremos con algún avance incorporado tal vez importante, la doctrina del Problema Principal de Diseño, también desarrollada por nosotros con anterioridad⁷.

⁶*Ibidem*. Es el objeto de la publicación citada.

⁷M. CHUECA PAZOS, A. B. ANQUELA JULIÁN, S. BASELGA MORENO “Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 2007. En las páginas que siguen reproducimos básicamente nuestra teoría del PPD y entendemos que por primera vez, la aplicamos a una red real, con todas sus consecuencias.

Capítulo 2

CUESTIONES CONCEPTUALES

2.1. CASO MALLA RECTANGULAR

Con anterioridad¹ hemos desarrollado el estudio de los distintos recintos de error asociados a los vértices de una red libre o ligada, ajustada por Gauss-Marcov, a priori y a posteriori, individualizados por separado y en conjunto o conjuntos simultáneos, estableciendo siempre sus expresiones algébricas e interpretaciones geométricas correspondientes desde la consideración de la red completa hasta su particularización puntual en un solo vértice cualquiera.

Así mismo se ha completado la doctrina estableciendo distintos criterios de aproximación al conocimiento, interpretación estadística y probabilística y cifrado consiguiente con cualquier poder de afirmación predeterminado de los

¹*Cfr.* M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, A. MARQUÉS MATEU, J.M. PAREDES ASENSIO, M. VILLAR CANO “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local. Método de Triangulateración”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv-digital). Valencia, 2010.

Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, N. QUESADA OLMO, M. VILLAR CANO, J.M. PAREDES ASENSIO, A. MARQUÉS MATEU, “Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv-digital). Valencia, 2011.

Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, FR. GARCÍA GARCÍA, M. VILLAR CANO “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv-digital). Valencia, 2012.

Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, FR. GARCÍA GARCÍA, M. VILLAR CANO “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv-digital). Valencia, 2012.

mencionados recintos, siempre referidos a la red en mallas cartesianas rectangulares generadas a partir de hipercuádricas n-dimensionales, y particularizaciones bi o tridimensionales.

Se trata ahora de densificar dichas mallas hasta lograr el desideratum de acceder a la misma información sobre *cualquier punto del espacio definido y abarcado por la red y su evolución en el tiempo*. La cuestión es fundamental por sí misma y su aplicación práctica en cuestiones de control de deformaciones, decisiva, ya que la elección a priori de vértices de control, por fundamentada que sea, no garantiza en absoluto que se produzcan en ellos las modificaciones de la realidad física que se pretende controlar e interpretar.

En adelante nos referiremos a la cuestión enunciada y su desarrollo correspondiente como Problema Principal de Diseño (PPD), que se considera conveniente desarrollar en dos partes diferenciadas. La primera se ocupará del establecimiento conceptual de la doctrina, en buena parte novedosa, y la segunda de la praxis de aplicación, deduciendo y formulando la instrumentación geométrica, algebraica y estadística necesaria. Completará el trabajo la tercera parte dedicada a la resolución completa y en detalle de una aplicación práctica.

De acuerdo con la teoría conocida², la expresión general de probabilidad normal multivariante de n variables, representativas de coordenadas de vértices configurando una red local reducida a un punto en el espacio E^n , es

$$P = P(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|_{n,n}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})} \quad (36)$$

con la notación usual establecida. Y aun cuando en la práctica no acostumbra a tenerse en cuenta, con todo rigor debe aceptarse la expresión anterior como a posteriori, por serlo la matriz σ_{XX} y su determinante $|\sigma_{XX}|$.

La función de probabilidad a priori, con la notación usual, sería

$$P = P(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\Sigma_X|_{n,n}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})^T \cdot \Sigma_X^{-1} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})} \quad (37)$$

² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano...". *Opus cit.* Pg. 23 y sig. expresiones (45), (74) y (75).

siéndolo también la matriz de varianzas Σ_X y su determinante $|\Sigma_X|$. Otra cuestión es la dificultad de su establecimiento riguroso, generalmente poco asequible.

En el mismo orden de ideas, el vector $M = E(X)$ tiene el significado físico de vector de coordenadas más probable. Por consiguiente, es lícito establecerlo a priori utilizando medias aritméticas cuando ello es posible y escribiendo $M = \mu_X$, más frecuentemente por medio del camino de mejor consistencia, con la notación $M = X_a$ o por cualquier otro procedimiento adecuado.

Así mismo, entendemos razonable y así lo haremos a continuación, establecer hipótesis alternativas a posteriori. Y será así mismo lícito particularizar $M = X = E(X)$, vector de coordenadas ajustadas por Gauss Marcov como más probable. Y en este último supuesto estará rigurosamente justificado utilizar la matriz σ_{XX} y su determinante $|\sigma_{XX}|$.

P es máxima = P_{max} , para $X = M$. Así se tendrá

$$P = P(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \cdot |\Sigma_X|^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

$$P = P(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \quad (39)$$

Las expresiones (36) y (39) a posteriori son generalmente las de más fácil particularización y mayor fiabilidad y utilidad en la práctica. Por ello y para evitar la doble exposición nos referiremos en adelante solo a ellas. En cualquier caso, el algoritmo a priori es trivial conocido lo que sigue.

Se considera a continuación la integral definida múltiple de orden n , cuya función subintegral es la de probabilidad normal multivariante (36) a posteriori extendida a un recinto $\Phi = \Phi(X)$ en el espacio E^n , adecuado al trabajo en presencia y previamente establecido.

$$P_\Phi = \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(X) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 \dots dX_n \quad (40)$$

Y practicando el cambio de variable

$$X - M = x \quad (41)$$

$$X = M + x \quad (42)$$

se genera así en cualquier caso y previa aplicación del método Gauss Marcov, bien conocido y que forma parte de la resolución del problema, el paso del vector de variables-coordenadas X ajustadas al de variables-correcciones x sobre los valores más probables, medibles sobre el n -edro cartesiano de referencia en unidades de desviación típica σ_x .

Y se tendrá en definitiva

$$\begin{aligned} P_{\Phi} = P_{\Phi}(X) = P_{\Phi}(M + x) &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} \frac{D(X)}{D(x)} \cdot P(M + x) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_n = \\ &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(x) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_n \quad (43) \end{aligned}$$

probabilidad de que el vector X_e desconocido de valores exactos de las variables X se encuentre dentro de un recinto prefijado Φ geoméricamente conocido y situado en el entorno de X , valores ajustados. Posteriormente, la particularización de (43) a uno, varios, o todos los vértices de la red completa el trabajo.

Y siguiendo rutina, en (43) la función subintegral se expresa según

$$P = P(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|_{n, n}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \quad (44)$$

donde tomando neperianos

$$-2L \cdot \left(P(X) \cdot (2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n} \cdot |\sigma_{xx}|_{n, n}^{\frac{1}{2}} \right) = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = C^2 \quad (45)$$

expresión del hiperelipsoide de error HE asociado a una red determinista con el poder de afirmación correspondiente a una probabilidad $P = P(x)$, arbitrariamente prefijada. Se tiene

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^{-1}$$

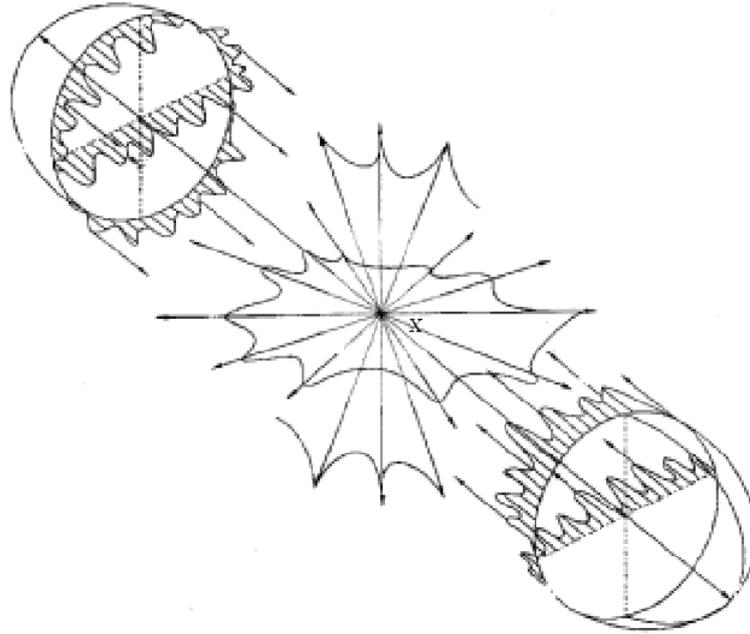


Figura 2.1: Hiperelipsoide de error

$$\sigma_{XX}^{-1} = \sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \quad (46)$$

$$R(\sigma_{XX}) = R(\sigma_{xx}) = R(S^{-1}) = R(S) = n \implies \text{completo}$$

Y según sabemos³, el hiperelipsoide de error HE permite acceder a recintos $\Phi = \Phi(X) = \Phi(x)$, de tipo hiperparalelepípedos circunscritos a HE , que facilitan la aplicación del Análisis Multivariante a la interpretación de resultados en el ajuste de Redes Locales especialmente por medio de la integración de (43) separando las variables, y sus correspondientes particularizaciones por secciones planas a cualquier grupo de vértices de la red en estudio.

A continuación, para fijar conceptos, y mejor avanzar en la correcta comprensión de la doctrina que desarrollamos, merece la pena insistir sobre algún aspecto de las hipersuperficies HE .

³*Ibidem.* Pg. 20 y sig.

En la figura 2.1, representación espacial idealizada del espacio E^n , imaginemos que X es el afijo del vector $X_{n,1}$ de los valores ajustados por Gauss-Marcov de las coordenadas de la red en estudio referidas a un n-edro cartesiano rectangular arbitrario no representado.

Trasladando dicho n-edro paralelamente a sí mismo hasta que su origen O coincida con el punto X , puede imaginarse como el haz de rectas concurrentes en X representado, bien entendido que todas ellas serán también ortogonales entre sí, y nulo en consecuencia el producto escalar de cualquier pareja de vectores situados respectivamente sobre dos cualesquiera de ellas.

Dicho n-edro trasladado será el de referencia de las variables-correcciones x . Y el lugar del afijo del vector x será el hiperelipsoide HE de n ejes y ecuación (45) con centro en el origen $O \equiv X$.

El hiperelipsoide HE en general será no canónico y sus ejes no coincidirán con los de coordenadas. Será objetivo esencial del proyectista conseguir que no sea así, y para ello deberá lograr una matriz de criterio a posteriori tan diagonal como le sea posible $\sigma_{xx} \approx \text{diag } \sigma_{xi}$, siendo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Además tratará de alcanzar como condición muy favorable para la correcta interpretación de resultados que las longitudes de los ejes de HE sean muy semejantes.

En el límite, una hiperesfera sería la figura perfecta. En la práctica, un hiperelipsoide HE casi-canónico y casi-hiperesférico, debe ser el resultado del buen hacer del proyectista. Es lo que se ha pretendido representar en la figura 2.1.

Supuesto para fijar ideas que estamos tratando del caso planimétrico (la extensión a tres dimensiones no ofrece dificultad mayor), la cuestión siguiente es trasladar la información geométrica contenida en la figura 2.1 y el algoritmo algébrico que la sustenta al plano del levantamiento, de forma útil y rigurosa.

Al fin y al cabo se trata de una generalización de tecnología cartográfica básica. Si ésta trata de representar en un plano bidimensional espacios tridimensionales expresando analítica y gráficamente la correspondencia de sus dos geometrías,

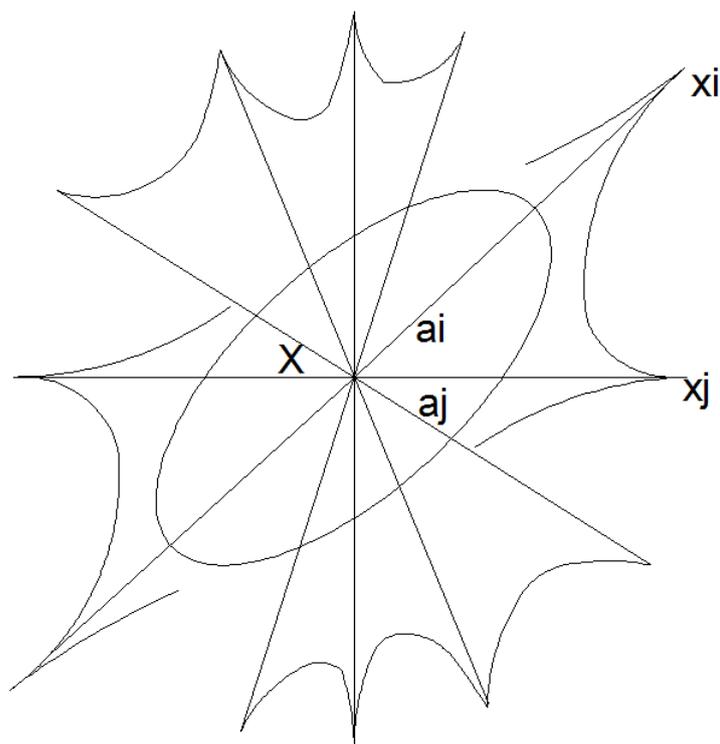


Figura 2.2: Plano coordenado cualquiera del Hiperelipsoide de error

ahora se trata de lo mismo, generalizando el espacio tridimensional a un número arbitrario n de dimensiones.

Existe sin embargo una diferencia importante. En la Ingeniería Cartográfica clásica, los dos espacios relacionados (tri y bidimensional), tienen realidad física. En el caso general que estudiamos, la realidad física solo corresponde al espacio bidimensional.

Así, en la figura 2.2, representativa del n -edro de referencia de las variables x en figura 2.1, si se corta al hiperelipsoide HE , que hemos supuesto canónico, por un plano coordenado cualquiera $Ox_ix_j = Xx_ix_j$, se obtendrá una elipse canónica de semiejes a_i, a_j , pero el eje Oxi de la variable x_i tiene existencia real, así como el eje Oxj de la variable x_j . Ambos ejes definen un plano que coincide con el del levantamiento. Llevando sobre éste el origen O al punto (X_i, X_j) conservando el paralelismo con el sistema general OXY , se obtiene (figura 3.3) un sistema local Ox_ix_j , y sobre él representada la elipse de error según

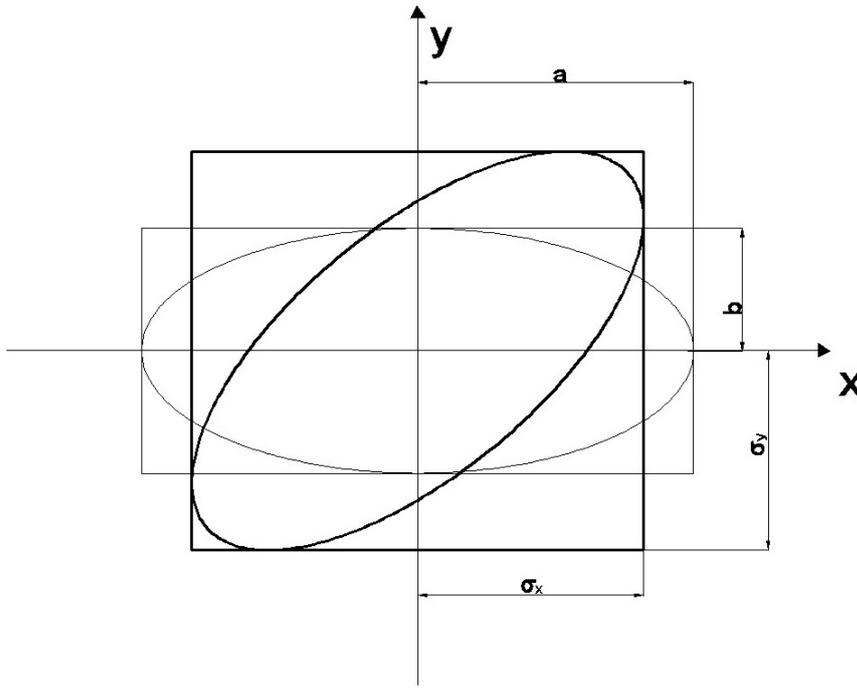


Figura 2.3: Elipses canónica y no canónica. En trazo grueso la no canónica

$$\frac{x_i^2}{a_i^2} + \frac{x_j^2}{b_j^2} \equiv \frac{x_i^2}{\sigma_{xi}^2} + \frac{x_j^2}{\sigma_{xj}^2} = 1 \quad (47)$$

por teoría conocida y donde hemos supuesto el coeficiente de homotecia $C = 1$ para simplificar.

Pero si la sección plana fuera no canónica, la elipse sección hubiera resultado de la forma

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) \quad (48)$$

en ambos casos la proyección ortogonal de la elipse sobre los ejes locales de coordenadas por tangentes paralelas a aquellos da lugar a rectángulos circunscritos cuyos semilados valen siempre las desviaciones típicas σ_{xi} , σ_{xj} , esencialmente variables según la situación de rotación del sistema de ejes, pero conocidas por serlo σ_{xx} . Es obvio que resultados idénticos se obtienen girando los ejes $Oxixj$ en el plano que los contiene, sin perder realidad física.

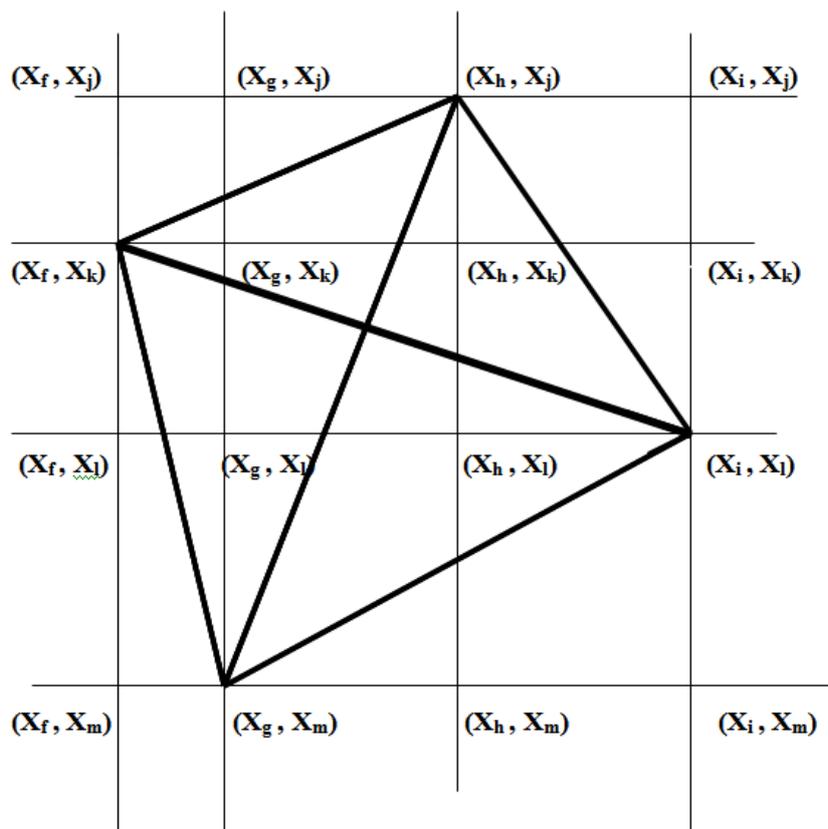


Figura 2.4: Red local de 4 vértices básicos iniciales y 12 correlativos

Si el punto (X_i, X_j) es un vértice de la red, (47) o (48) será su elipse de error, geométrica y analíticamente según es bien conocido. Pero si no pertenece a la red corresponderá a uno de los nudos de la malla rectangular de la figura 2.4, donde se han representado cuatro vértices libres de una red local formando un trapezoido irregular.

En dicho supuesto, puede densificarse la red con 12 puntos más, llamados correlativos, según es evidente en la figura. Y la información de cada uno de ellos tendrá la misma calidad que la de los cuatro vértices básicos iniciales, supuesto correctamente realizado el imprescindible trabajo de replanteo en el terreno. La densificación lograda es claramente importante. Y ello considerando como venimos haciendo solamente el caso planimétrico. La elemental extensión a tres dimensiones da lugar lógicamente a una densificación mucho mayor.

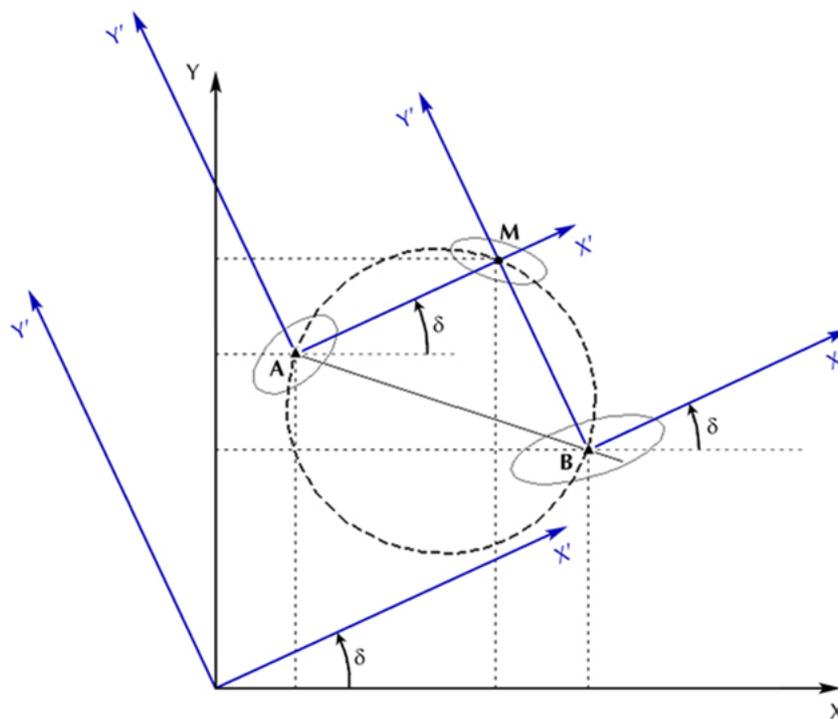
Con menos inmediatez, pero también es asequible según veremos en lo que sigue, acceder a análoga información con el mismo poder de afirmación asociada a cualquier punto arbitrario replanteable en el espacio abarcado por la red, formando o no parte de ella, mediante rotaciones de ejes adecuados y sin perder la realidad física. Un primer procedimiento (Figura 2.5) consistirá en rotar los ejes locales Axy y Bxy correspondientes a dos vértices A y B de una red local ajustados por Gauss-Marcov un mismo ángulo arbitrario δ hasta $Ax'y'$ y $Bx'y'$.

Demostremos que la operación conserva la realidad física, define dos nuevos puntos en M , intersección de los sentidos positivos de By' y Ax' y N (no representado), intersección de los negativos de Bx' y Ay' , e interpreta sus datos métricos y figuras de error con el mismo poder de afirmación obtenido en A y B , supuesto efectuado un replanteo correcto de M , N .

Se conserva la ortogonalidad de los ejes locales en M y N y puede extenderse la densificación obtenida variando el ángulo arbitrario δ a cualquier punto del arco capaz de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ sobre AB . Es decir, la circunferencia de dicho diámetro.

Finalmente, y ello es esencial en la teoría y praxis que nos ocupa, se podrá aplicar Análisis Multivariante en todos los aspectos y particularizaciones estudiados y resolver por variables separadas las integrales múltiples formadas agregando a las ya existentes las coordenadas de los vértices y las longitudes de los lados de los rectángulos de error asociados a los puntos de densificación. Para ello bastará con volver a referir toda la red, incluyendo los nuevos puntos densificados, al sistema de referencia inicial OXY . Así, será preciso deshacer la rotación practicada mediante una nueva rotación adicional de argumento $-\delta$ a los sistemas locales en A , B y M .

La cobertura del espacio ocupado por la red mediante las dos técnicas de densificación descritas es ampliamente suficiente en la gran mayoría de los casos, como puede apreciarse en la representación de la figura 2.6.

Figura 2.5: Giro δ de los ejes coordenados

No obstante, puede surgir ocasionalmente la necesidad de estudiar algún punto o grupo de puntos específico no cubierto por la metodología anterior. En este caso, es inevitable acudir a rotaciones de distintos argumentos, lo que obliga a trabajar en parte del proceso con coordenadas oblicuas, lo que es generalmente laborioso. Así, en figura 2.7, dos rotaciones de argumentos δ y γ en los sistemas locales de referencia en A y B definen como en el caso anterior el punto de densificación M .

En consecuencia, el sistema de referencia local $M_{x'Ay'B}$ del vértice de densificación M resulta de ejes oblicuos formando un ángulo

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi - (\delta - \gamma) \quad (49)$$

Ello obliga a trabajar, según se dijo, en ejes oblicuos, manteniéndose la ineludible necesidad final de pasar de nuevo a los ejes ortogonales OXY del levantamiento

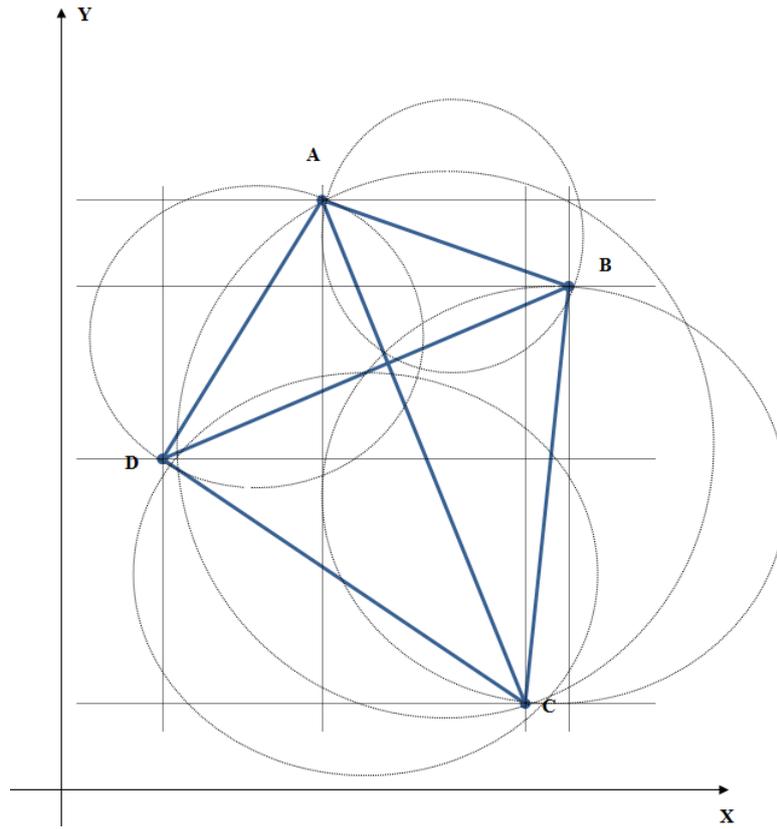


Figura 2.6: Red principal, vértices correlativos y arcos capaces

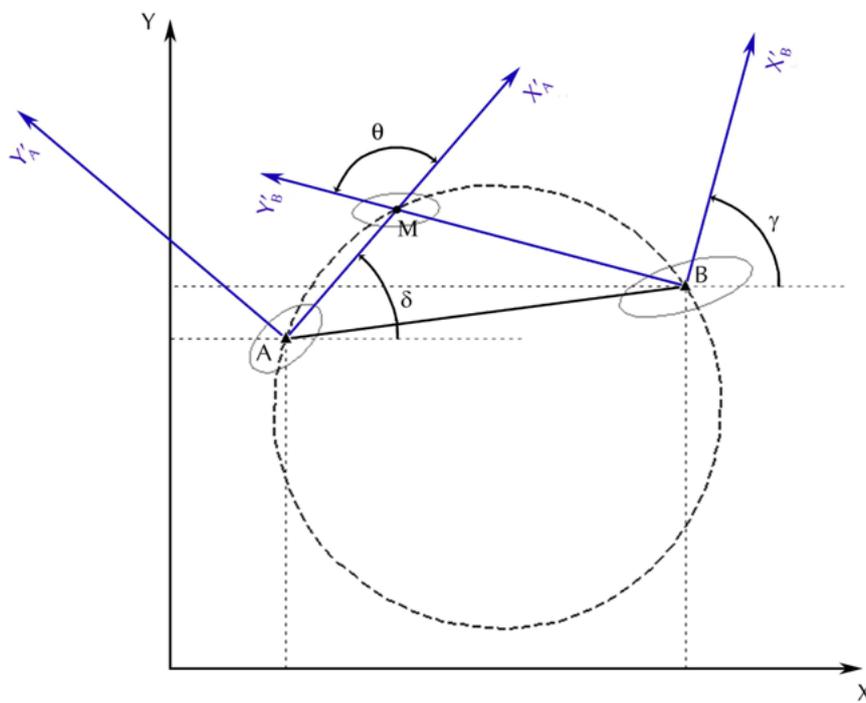


Figura 2.7: Giro δ y γ de los ejes coordenados

junto con la totalidad restante de vértices y puntos de densificación mediante la o las oportunas rotaciones, según se deducirá y formulará más adelante, y a efectos de poder aplicar Análisis Multivariante.

El procedimiento es sencillo, aunque prolijo, y a poco grado de reiteración que requiera el trabajo es aconsejable proveerse del adecuado apoyo informático específico en evitación de errores y ahorro de atención y tiempo.

Como en el caso anterior y con el mismo condicionado y poder de afirmación, puede extenderse la aplicación a cualquier punto del arco capaz de ángulo θ sobre AB .

De acuerdo con lo expuesto y sin necesidad de nuevos trabajos de campo, con excepción de los inevitables y generalmente sencillos replanteos de densificación que sean menester, es posible acceder con resultados totalmente homogéneos en rigor, precisión e interpretación, a la determinación de la geometría de cualquier punto y cualquier zona de la superficie abarcada por la red local inicial. Es posible, y puede considerarse como un avance destacable, modelizar con las condiciones técnicas de calidad descritas, espacios prácticamente “sólidos”, con miles de puntos, utilizando instrumentación de barredores láser.

Es banal la ampliación y generalización de la doctrina y praxis planimétrica descrita a tres dimensiones agregando por separado la altimetría, no ofreciendo dificultad sensible tampoco su aplicación directamente tridimensional.

Y nada más habría que agregar en lo concerniente al supuesto determinista o de redes ligadas, de aplicación formalmente exclusiva en la práctica actual de la profesión, y que hemos venido considerando hasta ahora. Sin embargo, adelantando ideas y desarrollos que figuran en las páginas que siguen, ello supone aceptar en primer lugar error cero en todos los vértices de apoyo, que implica una contradicción básica en sí mismo. Y si se considera posible la existencia de error mensurable y apreciable, que pueda llegar a influir en los resultados finales de un posible trabajo, presente o futuro en un previsible horizonte exigencia creciente,

es inevitable modificar las hipótesis de partida y considerar a la red a lo menos como dividida en dos zonas que llamaremos “de distinta significación”, a saber: la zona de los vértices de apoyo, que supondremos de error mínimo, pero existente, y la de los vértices libres, a determinar.

El problema se resuelve según se verá en las páginas que siguen, mediante la aplicación fraccionada del algoritmo de las redes libres, solución inversa generalizada recíproca, resolviendo cada zona con dos matrices específicas de criterio distintas.

En cualquier caso y tratándose de una red libre se tendrá

$$R(S) = (n - d) \implies \text{incompleto} \quad (50)$$

$$d = \text{defecto de rango}$$

y escribiremos sucesivamente, según sabemos

$$x = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot K$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q_K \cdot (S^- \cdot A^T \cdot P)^T = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q \cdot P \cdot A \cdot S^- = \\ &S^- \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot S^- = S^- \cdot S \cdot S^- \quad (51) \end{aligned}$$

$$Q_{xx} = S^-$$

siendo S^- matriz inversa generalizada recíproca arbitraria.

Y por consiguiente

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^- \quad (52)$$

existiendo infinitas soluciones. Entre ellas, la solución con matriz pseudoinversa única S^+

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^+ \quad (53)$$

generalización de (11), pero siempre con defecto de rango = d

$$R(S) = R(S^-) = R(S^+) = R(\sigma_{xx}) = n - d \quad (54)$$

resultando nulo el determinante de la matriz varianza covarianza a posteriori σ_{xx}

$$|\sigma_{xx}| = 0 \quad (55)$$

Con lo que, en el caso de Red Libre, las expresiones (44), (45) y (46) no tienen sentido. No es posible aplicar Análisis Multivariante en la misma forma que lo hemos hecho en la Red Ligada. Es razonable porque, por definición, el vector x de variables-correcciones es indeterminado, sus componentes adoptan infinitos valores, y no existe distribución estocástica específica alguna. No existe hiperelipsoide ni hipercuádrica de error en el espacio E^n análogos a los estudiados en el caso determinista, red ligada.

No obstante, aplicada que sea una solución inversa generalizada a la red, lleva implícita la formulación de una matriz varianza covarianza σ_{xx} de la forma (52), rango incompleto, como más adecuada para la red en presencia. Pero, en cualquier caso, ello equivale a determinar una descripción de los errores esperados en las variables x , estableciendo distribuciones normales para todas ellas y cifrando covarianzas y desviaciones típicas individualizadas.

Podrán formularse las expresiones análogas a (45) y (46)

$$x_p^T \cdot \sigma_{xx}^- \cdot x_p = x_p^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \cdot x_p = k^2 \quad (56)$$

donde k es un coeficiente de homotecia adimensional, sin significación probabilística alguna.

Nada que ver con el parámetro C de (45). Pero sea cual fuere la solución adoptada para la red, la varianza a posteriori del observable de peso unidad $\sigma_0^2 = \frac{R \cdot P \cdot R}{m - R(S)}$ será invariante por definición de solución Gauss Marcov. S , matriz de diseño, es constante en todos sus elementos y la expresión (56) será una forma cuadrática

en E^n de tipo hiperelipsoide en que un número de ejes $d =$ defecto de rango de S tienen longitudes ilimitadas, infinitas. Es decir, un hipercilindro, recto único con hiperelipsoide directriz de $n - d$ dimensiones y d direcciones generatrices ortogonales entre sí, afectado de un coeficiente de homotecia arbitrario k .

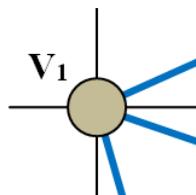
Sus secciones planas no paralelas a las generatrices del cilindro adoptan evidentemente la forma y expresión más general (48) y pueden considerarse elipses de error. Más propiamente y describiendo determinada realidad física, en algún caso las llamaremos de sensibilidad. Y a fortiori (56) será una figura de error de la red completa según rutina, representada por el afijo del vector X en E^n , única sea cual fuere la solución adoptada.

Avanzando un trecho más, veremos que la mejor solución (51) adoptada para la red puede resolverse mediante dos matrices, una inversa de Cayley aplicable a la zona de vértices libres a determinar, con lo que estamos en el caso anterior, y otra pseudoinversa, aplicable a los vértices llamados de apoyo o fijos, que se entiende como de error mínimo.

Y así estamos ya en condiciones de expresar el concepto de caso más general de resolución, densificación e interpretación del ajuste Gauss Marcov de una red local. Para fijar ideas, supongamos que se trata de la red planimétrica de cuatro vértices que venimos estudiando en esta publicación y otras anteriores. Sea su representación la figura 2.8.

Sean las dos zonas de distinta significación A y B , siendo A la correspondiente a los vértices a determinar V_1 y V_2 y B los puntos de apoyo V_3 y V_4 .

La zona A , vértices V_1 y V_2 señalados con un círculo opaco de trazo fino



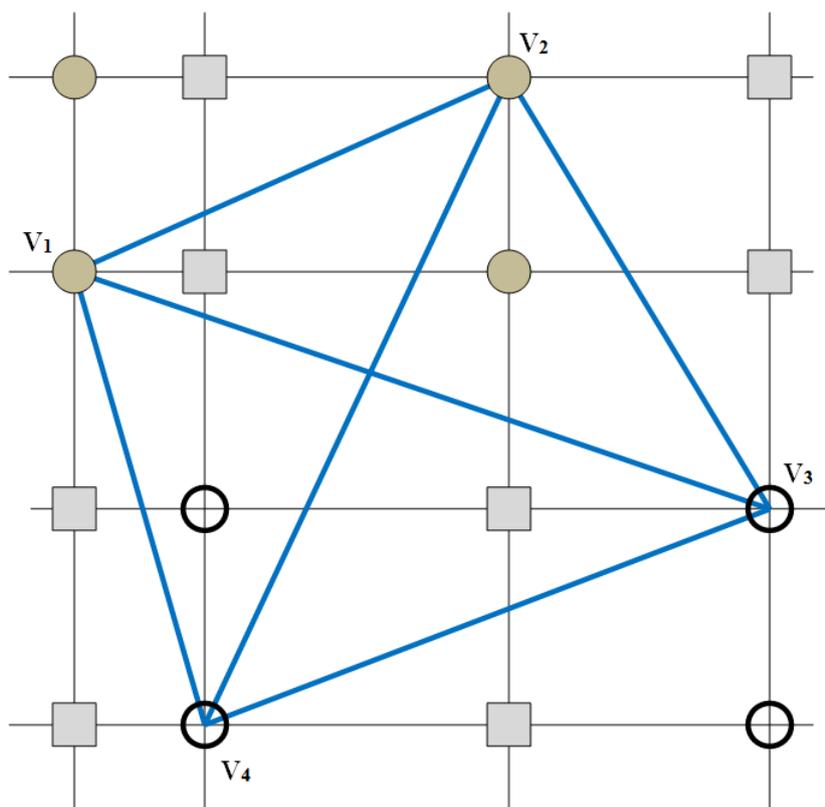
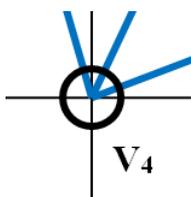


Figura 2.8: Densificación de la red planimétrica de cuatro vértices

se densifica con sus dos correlativos igualmente representados, con información probabilística, y, en su caso, con nuevos puntos definidos por arcos capaces, no representados.

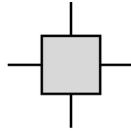
En la zona B , se determinan las elipses de sensibilidad, no probabilistas, de sus vértices $V3$ y $V4$, señalados con un círculo transparente de trazo grueso,



Se densifica la información con dos puntos más análogamente marcados y sus elipses de sensibilidad, utilizando según técnica conocida la abscisa de uno de los dos puntos y la ordenada del otro y viceversa.

Y con el fin de seguir acumulando información sobre la red, nada impide acudir a la solución pseudoinversa completa S^+ y obtener nuevas elipses, que llamaremos de

transición, referidas a puntos con abscisas procedentes de la zona A y ordenadas de la zona B y viceversa. No probabilística. Señalados en la figura con un rectángulo opaco de trazo fino,



Podría aplicarse la técnica de arcos capaces, pero con la densificación conseguida a través de todo lo que antecede y siempre contando con el imprescindible buen hacer del proyectista, creemos que la cuestión queda suficientemente enmarcada y ordenada en su aspecto conceptual. Procede ahora ocuparse de la deducción y establecimiento del algoritmo geométrico, algébrico y estadístico de aplicación práctica y normativa de interpretación.



Consideramos la hipercuádrlica de error más general en el espacio E^n , que para fijar ideas entendemos asociada a una red ligada, sin que ello suponga restricción alguna a su utilidad práctica, según se ha justificado en toda la exposición que antecede, resultando así un hiperelipsoide en general no canónico HE con centro en el origen de coordenadas. Del mismo modo supondremos la red planimétrica, siendo trivial su extensión a tres dimensiones. Así escribimos con la notación usual⁴.

$$HE = x_{n,1}^T \cdot \sigma_{xx_{n,n}}^{-1} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = C^2 \quad (57)$$

donde $C^2 = L \cdot \left(P(X) \cdot (2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n} \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2} \cdot n} \right)^{-2}$

referida al n-edro euclídeo n-rectangular

$$O(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_j, \dots, x_k, x_l, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

Que se expresa también como

⁴Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT., "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada...". Expresión (76). *Opus Cit.*

$$HE = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{s^2} \cdot x = C^2 \quad (58)$$

a priori, que acostumbra a aplicarse con $s = 1$ según

$$HE = x_{n,1}^T \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot S \cdot x = C^2 \quad (59)$$

y como

$$HE = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{\sigma_0^2} \cdot x = C^2 \quad (60)$$

a posteriori

obteniéndose sucesivamente las expresiones standard para $C = 1$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot \sigma_{xx,n}^{-1} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = 1 \quad (61)$$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{s^2} \cdot x = 1 \quad (62)$$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot S \cdot x = 1 \quad (63)$$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{\sigma_0^2} \cdot x = 1 \quad (64)$$

Y todos los hiperelipsoides no canónicos HE (22),(23),(24),(25), y HES (26),(27),(28),(29) respectivamente estarán inscritos según se demostró en el trabajo anteriormente citado en hiperparalelepípedos rectos rectángulos simétricos con respecto al origen de coordenadas, de aristas paralelas a los ejes de longitud

$$l_i = 2 \cdot k \cdot \sigma_{xi} \quad (65)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots n$$

donde l_i , longitud de la arista genérica paralela al eje Ox_i , y $C = k$, coeficiente de homotecia, siendo las desviaciones típicas σ_{xi} esencialmente variables para un mismo hiperelipsoide, dependiendo de la orientación de los ejes del n-edro de referencia escogido.

Del mismo modo, cada hiperelipsoide tendrá asociada una hiperpodaria HP y HPS con la expresión y significado geométrico anteriormente estudiados⁵. Y solo cuando las hipersuperficies descritas asuman expresiones canónicas, los ejes de hiperpodarias e hiperelipsoides coincidirán con los del n-edro de coordenadas y sus longitudes constantes $2 \cdot a_i$ serán iguales a las aristas l_i y valdrán el doble del producto del coeficiente de homotecia k por las desviaciones típicas σ_{xi} , en este caso y sólo en este caso también constantes, de las variables estocásticas componentes de x , vector de correcciones de las coordenadas de los vértices de la red representadas por las componentes del vector X . Se podrá escribir

$$l_i = 2 \cdot a_i = 2 \cdot k \cdot \sigma_{xi} \quad (66)$$

donde $a_i \equiv$ semieje de orden de hiperelipsoide e hiperpodaria. Habrá pues un solo hiperparalelepípedo como el definido que generará un solo conjunto de desviaciones típicas σ_{xi} . En cualquier caso, la red se representará y estudiará como el afijo del vector X en el espacio E^n .

Y particularizando cuanto antecede para $n \in 2, 3$ se obtendrán los supuestos bi y tridimensionales con realidad física y aplicación usual⁶. Así, en planimetría, la elipse genérica de error de un vértice (X_i, X_j) se obtendrá seccionando HE o en su caso HES por el hiperplano coordenado bidimensional $Ox_i x_j$, coincidente con el del levantamiento porque ambos ejes Ox_i, Ox_j , están sobre él. La extensión a tres dimensiones es trivial.

Y considerando una red planimétrica genérica, según antes se indicó, refirámonos seguidamente a la figura 2.9, que es la figura 2.5 con alguna adición ahora necesaria.

⁵Ibidem. Pg. 6 y sig.

⁶Ibidem. Pg. 69 y sig.

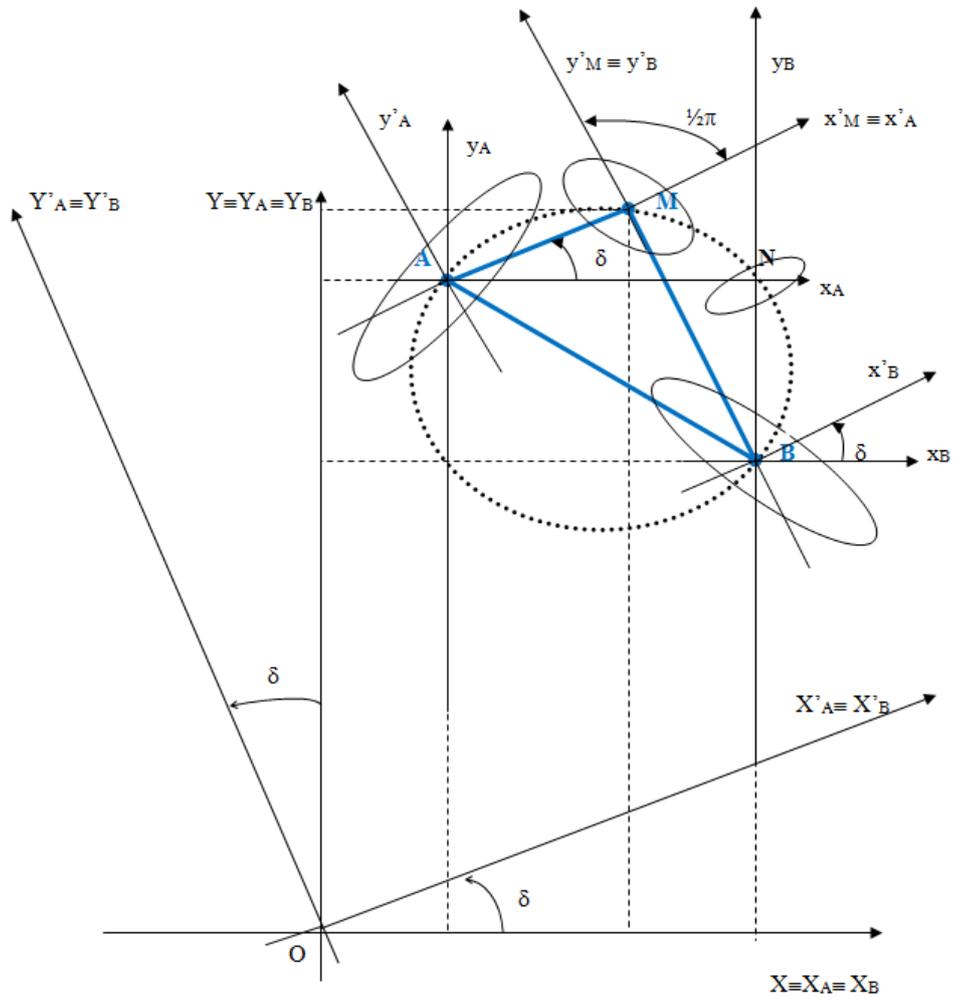


Figura 2.9: Red planimétrica genérica

Suponemos que en la red planimétrica de que se trata (x_i, x_j) y (x_k, x_l) representan las variables correspondientes a las correcciones respectivas de las coordenadas de dos vértices libres arbitrarios de ella, prefiriéndose la notación adoptada a la más restrictiva $(i, i + 1 = j)$ y $(k, k + 1 = l)$ y sean estos los $A (X_i, X_j) \equiv (X_A, Y_A)$ y $B (X_k, X_l) \equiv (X_B, Y_B)$ representados sobre el plano del levantamiento y referidos a los ejes cartesianos rectangulares OXY .

Aceptamos así mismo la asociación de hiperplanos bidimensionales secciones de los HE y HES y el del levantamiento, según el criterio establecido para obtener las elipses de error de vértice. Se representan sobre el plano las elipses genéricas de vértice asociadas a A y B , referidas a sus ejes específicos Ax_Ay_A, Bx_By_B . En principio, de acuerdo con la teoría expuesta y según sea la expresión de HE, HES , utilizada, se tratará de figuras de error a priori o a posteriori. Se trata de definir geoméricamente y deducir la expresión del recinto de error de un punto del espacio sobre el que se ha observado y medido la red, cuyo lugar geométrico es el arco capaz de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ sobre AB . Es decir, la circunferencia de dicho diámetro. Sea dicho punto $M (X_M, Y_M)$, de coordenadas supuestas conocidas a priori.

Sea

$$m = tg (\delta) = \frac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A} \quad (67)$$

conocida.

M resulta ser la intersección de los ejes $Ax'_A \equiv Mx'_M \equiv x'_A \equiv x'_M$ y $By'_B \equiv My'_M \equiv y'_B \equiv y'_M$, resultado de rotar los Ax_A y By_B el argumento δ , conocido (67). Ello es evidente de la igualdad de diversos ángulos en la figura. Así, el ángulo $\angle x_B B x'_B$ con vértice en B tiene los lados paralelos al $\angle x_A A x'_A$ con vértice en A . Ambos son iguales y valen δ . Como consecuencia, la rotación sinistrorsum de argumento δ de los sistemas cartesianos ortogonales Ax_Ay_A, Bx_By_B alrededor de sus orígenes A, B , describe y resuelve la cuestión.

La figura de error (elipse) de M ($x'_M \equiv x'_A$, $y'_M \equiv y'_B$) resulta así ser la definida en dicho punto como nudo de la malla rectangular generada por (59) para fijar ideas (igualmente se podría haber tomado (58), más general), tras afectar al sistema Ax_Ay_A de la transformación geométrica indicada, de expresión analítica

$$x'_A = x_A \cdot \cos \delta + y_A \cdot \sen \delta \quad (68)$$

$$y'_A = -x_A \cdot \sen \delta + y_A \cdot \cos \delta \quad (69)$$

y al Bx_By_B de la análoga

$$x'_B = x_B \cdot \cos \delta + y_B \cdot \sen \delta \quad (70)$$

$$y'_B = -x_B \cdot \sen \delta + y_B \cdot \cos \delta \quad (71)$$

rotaciones ambas sinistrorsum de argumento δ .

Y se accede con todo rigor a la interpretación geométrica y expresión algébrica del recinto de error del punto M (x'_M , y'_M), que no es vértice de la red ni ha sido físicamente levantado desde ella, practicando en primer lugar al hiperelipsoide HE o en su caso al HES , la transformación definida por las expresiones (68), (69), (70), (71), representativa de dos giros sinistrorsum de argumento δ , simultáneos e independientes, en los planos coordenados Ox_Ay_A y Ox_By_B . Posteriormente y en forma análoga a lo establecido para los vértices de la red, la figura (elipse) de error deseada se obtendrá seccionando al hiperelipsoide HE' o en su caso al HES' así transformado por el plano coordenado $Ox'_M y'$.

Los cuadros de doble entrada que representan las rotaciones directa e inversa consideradas son los que siguen.

	x_A	y_A	
x'_A	$\cos \delta$	$\text{sen } \delta$	
y'_A	$-\text{sen } \delta$	$\cos \delta$	
	x_B	y_B	
x'_B	$\cos \delta$	$\text{sen } \delta$	
y'_B	$-\text{sen } \delta$	$\cos \delta$	

(72)

Desarrollemos a continuación la expresión (59) correspondiente a HE a priori con $s^2 = 1$ según

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i \cdot x_j & \dots & \dots & x_k \cdot x_l & \dots & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ x_j \\ \dots \\ x_k \\ x_l \\ \dots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = C^2$$

(73)

y es claro que se puede expresar la transformada HE' de HE después de las dos rotaciones descritas, siendo x_m un eje (o variable) cualquiera antes de la transformación y x'_m el mismo después de la transformación, escribiendo:

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_i = x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta$$

$$x_j = x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \text{cos } \delta \quad (74)$$

$$x_k = x'_k \cdot \text{cos } \delta - x'_l \cdot \text{sen } \delta$$

$$x_l = -x'_k \cdot \text{sen } \delta + x'_l \cdot \text{cos } \delta$$

Y teniendo en cuenta que la transformada deducida, aplicada a la figura 2.9 se escribirá

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_A = x'_A \cdot \text{cos } \delta - y'_A \cdot \text{sen } \delta$$

$$x_A = x'_A \cdot \text{sen } \delta + y'_A \cdot \text{cos } \delta \quad (75)$$

$$x_B = x'_B \cdot \text{cos } \delta - y'_B \cdot \text{sen } \delta$$

$$y_B = x'_B \cdot \text{sen } \delta + y'_B \cdot \text{cos } \delta$$

particularizando i, j, k, l en las coordenadas (correcciones) planas de A, B

Y así la transformada HE' de HE en (73), utilizando las inversas (74) deducidas de (72) será la expresión (76).

Y aceptando la asociación ejes (variables) en el espacio E^n y ejes (variables) en el plano del levantamiento E^2 , el recinto de error de M , considerado como punto correlativo definido por la intersección de los ejes $x'_i \equiv x'_A$ y $x'_l \equiv y'_B$ en la nueva malla rectangular generada, se obtendrá en forma de elipse según doctrina conocida cortando por el hiperplano bidimensional

$$\begin{aligned}
 & (x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta \quad x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta \quad \dots \quad x'_k \cdot \cos \delta - x'_l \cdot \text{sen } \delta \quad x'_k \cdot \text{sen } \delta + x'_l \cdot \cos \delta \quad \dots \quad x'_{n-1} \quad x'_n) \cdot \\
 & \left(\begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta \\ x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta \\ \dots \\ x'_k \cdot \cos \delta - x'_l \cdot \text{sen } \delta \\ x'_k \cdot \text{sen } \delta + x'_l \cdot \cos \delta \\ \dots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{array} \right) = C^2 \quad (76) \\
 & \cdot S.
 \end{aligned}$$

$$x'_m = 0$$

$$\forall m \neq i, l \quad (77)$$

es decir

$$(0 \ 0 \ \dots \ x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ \dots \ -x'_l \cdot \sen \delta \ x'_l \cdot \cos \delta \ \dots \ 0 \ 0) \cdot$$

$$\cdot S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ \dots \\ -x'_l \cdot \sen \delta \\ x'_l \cdot \cos \delta \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C^2 \quad (78)$$

y sobre el plano del levantamiento se tendrá en definitiva la elipse de incertidumbre a priori de M , obtenida a partir del hiperelipsoide HE' con el poder de afirmación que corresponda a C , del que después nos ocuparemos, y expresada según

$$(x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ -x'_l \cdot \sen \delta \ x'_l \cdot \cos \delta) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ -x'_l \cdot \sen \delta \\ x'_l \cdot \cos \delta \end{pmatrix} =$$

$$= C^2 \quad (79)$$

siendo $s_{rs} = s_{sr}$ los elementos de orden rs y sr en la matriz simétrica de diseño S .

Y en forma simplificada se escribirá:

$$x'^T_{i\delta} \cdot S_{ijkl} \cdot x'_{i\delta} - C^2 = 0 \quad (80)$$

o bien, particularizando para M en la figura 2.9

$$(x'_M \cdot \cos \delta \quad x'_M \cdot \text{sen } \delta \quad -y'_M \cdot \text{sen } \delta \quad y'_M \cdot \cos \delta) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x'_M \cdot \cos \delta \\ x'_M \cdot \text{sen } \delta \\ -y'_M \cdot \text{sen } \delta \\ y'_M \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2$$

$$(81)$$

elipse de error a priori referida a los ejes cartesianos ortogonales $M x'_M y'_M$ con el poder de afirmación asociado a C . Standard para $C = 1$, según se ha reiterado.

y en forma simplificada

$$x'^T_{M\delta} \cdot S_{AB} \cdot x'_{M\delta} - C^2 = 0 \quad (82)$$

que resuelve la cuestión completamente. El cálculo y dibujo de los elementos de la elipse es ya inmediato.

La elipse a posteriori en virtud de la expresión (60) tendrá las expresiones análogas

$$(x'_M \cdot \cos \delta \quad x'_M \cdot \text{sen } \delta \quad -y'_M \cdot \text{sen } \delta \quad y'_M \cdot \cos \delta) \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x'_M \cdot \cos \delta \\ x'_M \cdot \sen \delta \\ -y'_M \cdot \sen \delta \\ y'_M \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (83)$$

$$x'^T_{M\delta} \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot S_{AB} \cdot x'_{M\delta} - C^2 = 0 \quad (84)$$

con $C = 1$, expresiones standard.

En su momento entraremos en la discusión y aplicación práctica de las expresiones que anteceden. No obstante, de antemano puede entenderse su importancia como instrumentos de elevada utilidad en diseño, proyecto, previsión e interpretación de resultados en Redes Locales y Microgeodesia. Entre otras prestaciones, permiten densificar la red en presencia con nuevos puntos a cuyas precisiones se tiene acceso con el mismo rigor que en los vértices, sin adición de trabajo de levantamiento de campo alguno. Es importante señalar que, por propia definición, el estimador σ_o^2 no se conoce a priori. Sin embargo, se presupone la red correctamente observada y cumplimentado ampliamente el F-Test. Así, siempre podrá establecerse como correcta hipótesis de cálculo la expresión $s^2 \cong \sigma_o^2 = 1$. En su defecto, $s^2 \cong \sigma_o^2$, más general.

Una aplicación importante es la correspondiente a $\delta = 0$.

Así, las elipses de error a priori y a posteriori asociadas al punto N ($x_N \equiv x_A$, $y_N \equiv y_B$) serán en la figura 2.9, particularizando en (81) y (83)

$$(x_N \ 0 \ 0 \ y_N) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ 0 \\ 0 \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (85)$$

elipse a priori

$$(x_N \ 0 \ 0 \ y_N) \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ 0 \\ 0 \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (86)$$

elipse a posteriori.

Pero operando en (85) y (86) fácilmente se obtiene las expresiones más simplificadas

$$(x_N \ y_N) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (87)$$

elipse a priori

$$(x_N \ y_N) \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (88)$$

elipse a posteriori

A los puntos como el N , nudos de la malla rectangular de la figura 2.9 generada por el conjunto de los ejes cartesianos rectangulares con orígenes en los vértices de la red, ejes de abscisas y ordenadas respectivamente paralelos entre sí, y coplanarios sobre el plano del levantamiento, se les conoce como vértices o puntos correlativos. Sus elipses de error serán “elipses correlativas”⁷.

La densificación de la red así generada es importante. En efecto, y en el caso planimétrico, se pasa de disponer de

$$\frac{1}{2} \cdot n = N = \text{número de vértices ajustados} = \text{número de “elipses de vértice”}$$

según el método que ya podemos llamar clásico, a

$$C_{2 \cdot N}^2 - 2 \cdot C_N^2 = \frac{(2 \cdot N)!}{(2 \cdot N - 2)! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{N!}{(N - 2)! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot N \cdot (2 \cdot N - 1)}{2} - 2 \cdot \frac{N \cdot (N - 1)}{2} = N^2$$

⁷ Cfr. M. CHUECA, ET ALT, “Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes”, pg. 91 y sig., Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.

N^2 elipses de vértice y correlativas donde $2 \cdot C_N^2$ corresponden a parejas de ejes de ordenadas o abscisas, paralelos, que generan “elipses impropias o de infinito” de las que no nos ocuparemos aquí.

El número de elipses correlativas será

$$N^2 \text{ elipses total} - N \text{ elipses de vértice} = N \cdot (N - 1) = \text{elipses correlativas}$$

En definitiva, se pasa de N elipses de vértice a N^2 elipses totales, con notable densificación de la red de puntos, de estación o correlativos, cuyo recinto de error es conocido.

La generalización a tres dimensiones es muy simple. En efecto, hemos visto que el caso planimétrico se genera a partir de una malla rectangular plana de lados paralelos a los ejes de coordenadas cuyos nudos son los vértices de la red y correlativos, cifrados como antecede. Es claro que el caso tridimensional se genera a partir de una malla paralelepípedica de aristas paralelas a los ejes de coordenadas cuyos nudos son también los vértices de la red y correlativos.

Y si se verifica ahora que

$$\frac{1}{3} \cdot n = N = \text{número de vértices} = \text{número de “elipses de vértice”}$$

podemos dividir la malla tridimensional total en N secciones planas paralelas a cada uno de los tres ejes pasando por un vértice de la red.

En dicha sección se definirá 1 vértice de la red y $N \cdot (N - 1)$ vértices correlativos.

En las N secciones se definirán N vértices de la red y $N^2 \cdot (N - 1)$ vértices correlativos.

Y en definitiva se contará con los N elipsoides de vértice iniciales, más $N^2 \cdot (N - 1)$ elipsoides correlativos, con lo que se alcanza una cifra de N^3 elipsoides en total, con notable densificación de la red de puntos, de estación o correlativos, cuyo recinto de error es conocido.

En otro orden de ideas, y volviendo al caso planimétrico, sabemos que la elipse de error de un vértice aislado (X_i, X_j) de una red local ajustada por Gauss-Marcov

puede expresarse en función de sus variables, correcciones o parámetros, sinónimos usuales de la misma realidad física, (x_i, x_j) , cuya matriz varianza covarianza σ_{xixj} se supone conocida, en la forma

$$(x_i \ y_j) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xixi}^2 & \sigma_{xixj} \\ \sigma_{xixj} & \sigma_{xjxj}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} = C^2 \quad (89)$$

o bien

$$x_{ij}^T \cdot \sigma_{xixj}^{-1} \cdot x_{ij} - C^2 = 0 \quad (90)$$

siendo su expresión desarrollada

$$\sigma_{xj}^2 \cdot x_i^2 - 2 \cdot \sigma_{xixj} \cdot x_i \cdot x_j + \sigma_{xi}^2 \cdot x_j^2 - C^2 \cdot (\sigma_{xi}^2 \cdot \sigma_{xj}^2 - \sigma_{xixj}^2) = 0 \quad (91)$$

Y será preciso estudiar y establecer la relación entre las expresiones (87) y (88) con las (89), (90) y (91), si es que existe.

En principio, es claro que se trata de dos formas distintas de expresar el recinto de error de un punto perteneciente a una red. Formando parte de la red o considerándolo aislado. En principio, su realidad física y por consiguiente, su interpretación, deben ser distintas.

Pero si se puede expresar la matriz varianza covarianza de toda la red σ_{xx} en forma de banda según

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x3}^2 & \sigma_{x3x4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x3x4} & \sigma_{x4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1)}^2 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n} & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_0^2 \cdot S^{-1} \quad (92)$$

pudiendo escribirse lo que sigue

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_3x_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_{ixj}} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot S^{-1} \quad (93)$$

y del mismo modo se tendrá

$$\sigma_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_3x_4}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_{ixj}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n}^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \quad (94)$$

siendo

$$\sigma_{x_{ixj}}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_{ixj}} \\ \sigma_{x_{ixj}} & \sigma_{x_j}^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{x_i}^2 \cdot \sigma_{x_j}^2 - \sigma_{x_{ixj}}^2} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{x_j}^2 & -\sigma_{x_{ixj}} \\ -\sigma_{x_{ixj}} & \sigma_{x_i}^2 \end{pmatrix} \quad (95)$$

pudiendo despejarse S que adopta la expresión

$$S = \sigma_0^2 \cdot \sigma_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x_1x_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x_3x_4}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x_{ixj}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{(n-1)\cdot n} \end{bmatrix} \quad (96)$$

y (87) y (88) podrán expresarse en la forma

$$(x_N \quad y_N) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = x_N^T \cdot S_{il} \cdot x_N = C^2 \quad (97)$$

elipse a priori,

$$(x_N \quad y_N) \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = x_N^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{il} \cdot x_N = x_N^T \cdot \sigma_{x_N y_N}^{-1} \cdot x_N = C^2 \quad (98)$$

elipse a posteriori que será de la forma (91), clásica y bien conocida, es decir

$$\sigma_{y_N}^2 \cdot x_N^2 - 2\sigma_{x_N y_N} \cdot x_N \cdot y_N + \sigma_{x_N}^2 \cdot y_N^2 - C^2 \cdot (\sigma_{x_N}^2 \sigma_{y_N}^2 - \sigma_{x_N x_N}) = 0 \quad (99)$$

que será standard para $C = 1$, como siempre.

Lograr la matriz (92) no es inasequible. Se trata de una aplicación del Problema de Diseño de Orden Dos (PD2) que ya hemos tratado ampliamente. *Siempre y por supuesto, estamos hablando de una red de alta calidad.* Pero en general es más aconsejable, y así se viene practicando en aplicaciones anteriores, alcanzar, o acercarse lo más posible a la matriz de criterio diagonal

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^{-1} = \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \text{diag } \sigma_{x_i}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x2}^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x-n}^2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots n$$

caso particular de (92)⁸ con covarianzas nulas que hemos tratado con detalle y permite aplicar con rigor y sencillez el Análisis Multivariante, fundamental en la predicción e interpretación de resultados. De nuevo el objetivo es lograr que los hiperelipsoides de error sean canónicos. En el límite, que sean hiperesferas. Y de cualquier forma, es inútil pretender, a lo menos en el estado actual de la ciencia y la tecnología, fórmulas y métodos de aplicación automática que transformen en pura rutina el Proyecto, Diseño, Ajuste e Interpretación de Resultados de una Red Local de Alta Precisión. Sigue (y creemos que seguirá) siendo una función de Ingeniería Superior con mucho de arte y de toma de decisiones lógicas y diferentes en cada caso.

Teoría y Praxis siguen avanzando y ahora de acuerdo con lo expuesto, la simple inspección de la figura 2.10, utilizada en anteriores publicaciones, si se refiriera a un caso real, revela una configuración de elipses de error heterogéneas, de alta excentricidad y ejes muy separados respecto a los de la malla de coordenadas locales, muy poco satisfactoria y que indefectiblemente ocasionará problemas.

Del mismo modo negativo podemos juzgar la figura 2.10, también procedente de trabajos anteriores⁹. Es intuitivo que debe perseguirse una estructura a lo menos con el aspecto de la figura 2.11, trazada a partir de la figura 2.9. Es claro que supuesta corregida de escala, enormemente aumentada en las figuras de error respecto a la del levantamiento.

⁸ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas”. Pg 55, expresión (146) y sig. *Opus cit.*

⁹ Cfr. M. CHUECA, ET ALT, “Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes”, Pg. 91. *Opus Cit.*

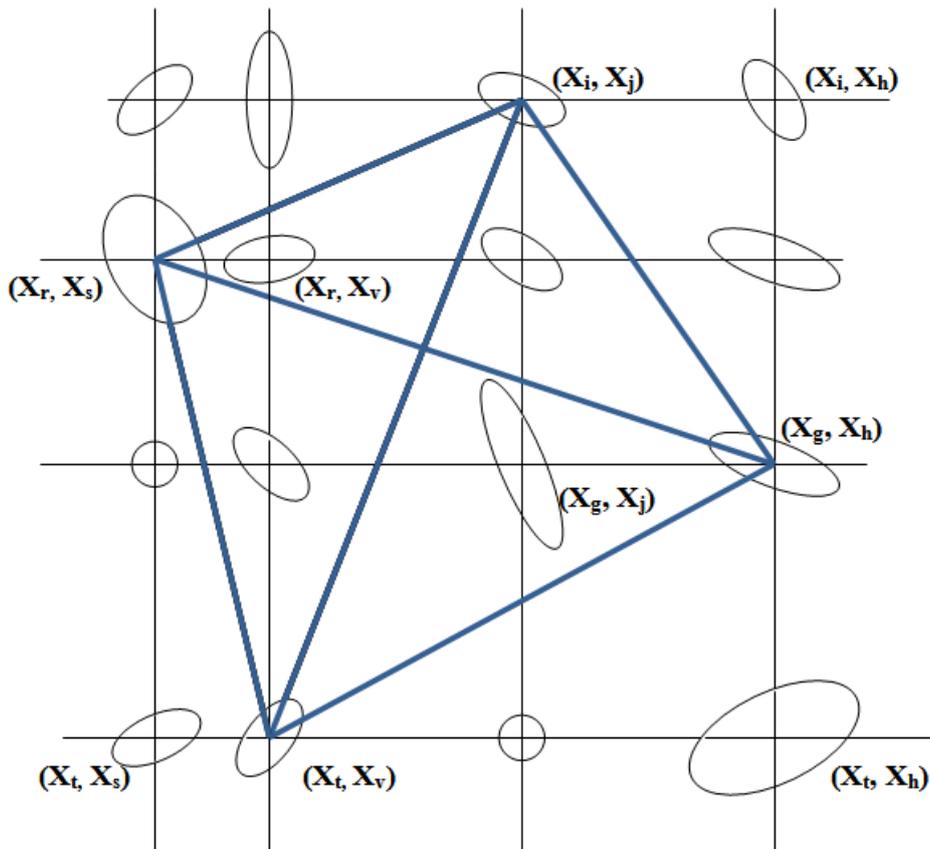


Figura 2.10: Red principal y vértices correlativos

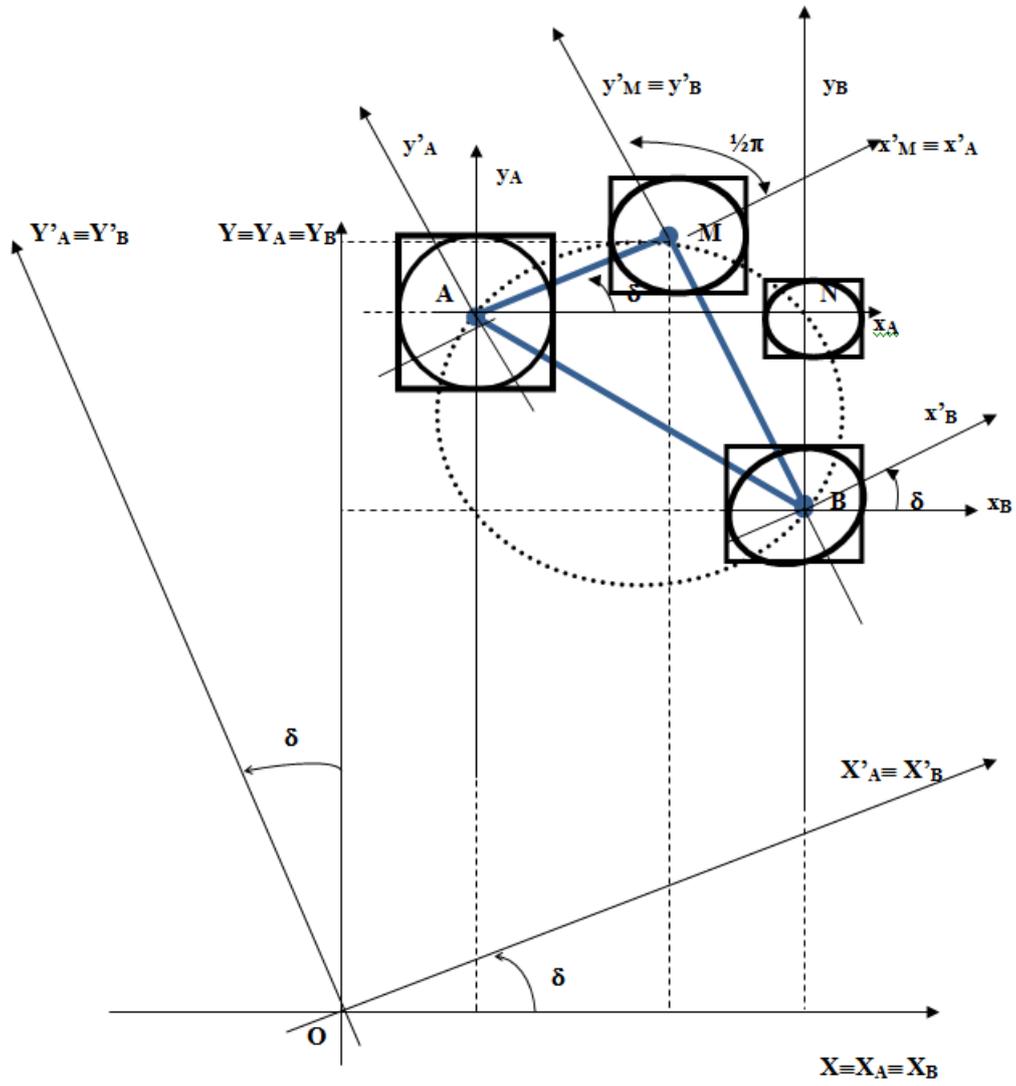


Figura 2.11: Red principal y vértice M perteneciente al arco capaz $\frac{\pi}{2}$

En ella las elipses son de muy escasa excentricidad y sus ejes aproximadamente paralelos a los de la malla de referencia. Sus rectángulos circunscritos sugieren una geometría pseudocanónica y puede aventurarse que sus lados son de longitudes muy aproximadas a las de los ejes de las elipses e iguales así mismo a un múltiplo arbitrario, según poder de afirmación deseado, de las desviaciones típicas de las coordenadas de los vértices, de acuerdo con teoría conocida¹⁰. Con todo ello es posible aplicar con buen éxito el Análisis Multivariante, objetivo esencial de este trabajo. En definitiva, y siempre volviendo a lo mismo, es inútil confiar en el gabinete para subsanar errores de campo y solamente una observación de alta calidad permitirá la obtención y, sobre todo, la interpretación de resultados con el rigor y nivel de afirmación deseables.

En las figuras 2.9 y 2.11 la malla de trama rectangular inicial se ve modificada evidentemente por cada vértice correlativo que se adicione con submallas, también rectangulares, pero formando ángulos genéricos δ con respecto a la básica. Es claro que ello no contradice sino corrobora el modelo geométrico establecido de correspondencia entre ejes de las hiperfiguras y ejes locales de los vértices. Una pareja de ejes girados δ en su hiperplano bidimensional coordinado en el hiperelipsoide deben representarse en el plano del levantamiento como girados también con respecto a la malla rectangular inicial básica.

Pero en figura 2.11 los rectángulos de error se han trazado paralelos a la malla rectangular básica. Ello es necesario para los cálculos ulteriores de interpretación y aplicación de las integrales definidas múltiples del algoritmo de análisis e interpretación bien conocido. En consecuencia, será preciso referir todas y cada una de las elipses correlativas establecidas a las orientaciones básicas mediante una rotación final de argumento genérico $-\delta$. Con la notación empleada su expresión será:

$$x''_M = x'_M \cdot \cos \delta - y'_M \cdot \sen \delta \quad (101)$$

¹⁰ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS...". Pg. 69 y sig. *Opus cit.*

$$y''_M = x'_M \cdot \text{sen } \delta + y'_M \cdot \text{cos } \delta \quad (102)$$

El cuadro de doble entrada que representa las rotaciones directa e inversa consideradas es el que sigue.

	x'_M	y'_M	
x''_M	$\text{cos } \delta$	$-\text{sen } \delta$	(103)
y''_M	$\text{sen } \delta$	$\text{cos } \delta$	

Y bastará con sustituir en (81) y (82)

$$x'_M = x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta \quad (104)$$

$$y'_M = -x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \text{cos } \delta \quad (105)$$

obteniéndose las expresiones finales de las elipses correlativas de error a priori y a posteriori mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} & [(x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{cos } \delta \quad (x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ & (x''_M \cdot \text{sen } \delta - y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (-x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{cos } \delta]. \end{aligned}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{cos } \delta \\ (x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (x''_M \cdot \text{sen } \delta - y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (-x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{cos } \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (106)$$

elipse correlativa a priori del punto M referida a los ejes $Ox''y''$, que son paralelos y forman parte de la malla rectangular inicial Oxy . Puede (y debe) perfectamente suprimirse el superíndice y escribir

$$\begin{aligned}
 & [(x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \quad (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\
 & (x_M \cdot \text{sen } \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (-x_M \cdot \text{sen } \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \\ (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (x_M \cdot \text{sen } \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (-x_M \cdot \text{sen } \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (107)
 \end{aligned}$$

y del mismo modo se escribirá

$$\begin{aligned}
 & [(x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \quad (x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\
 & (x''_M \cdot \text{sen } \delta - y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (-x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \\ (x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (x''_M \cdot \text{sen } \delta - y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (-x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [(x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \quad (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\
 & (x_M \cdot \text{sen } \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (-x_M \cdot \text{sen } \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \\ (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (x_M \cdot \text{sen } \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (-x_M \cdot \text{sen } \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (109)
 \end{aligned}$$

expresiones de la elipse correlativa a posteriori del punto M . Con la misma connotación anterior respecto a los ejes. Y es trivial que, por tratarse de las mismas elipses giradas en su plano, tanto (81), (106) y (107) como (83), (108)

y (109), tres a tres, tienen los mismos ejes. Debe tenerse en cuenta al aplicar Análisis Multivariante para evitar cálculos innecesarios.

En cualquier caso y para $C = 1$, elipses standard. Y es inmediato comprobar que para $\delta = 0$ se obtienen las expresiones (87),(88),(97),(98), como debía suceder.

Es conveniente subrayar que, como puede inferirse de la figura 2.6, aún cuando se trate de una red de pocos vértices, es normalmente suficiente la densificación de puntos correlativos que permite el método de los arcos capaces de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ expuesto para obtener la información necesaria en trabajos usuales, incluso de alta precisión, con la no pequeña ventaja de utilizar siempre coordenadas cartesianas rectangulares y poder replantear en su caso cualquier punto desde los extremos fijos de una base arbitraria AB (fig. 2.9).

Se trata de una práctica asequible con alta precisión de visuales ortogonales y paralelas a los ejes AN y BN , de azimutes π y $2 \cdot \pi$ (determinación de puntos correlativos propiamente dichos como el N) o bien del caso más amplio de visuales de azimutes ortogonales $\frac{1}{2} \cdot \pi \pm \delta$ y $2 \cdot \pi \pm \delta$. (Extensión de puntos correlativos como el M). En la figura 2.9.

$$\text{Azimut de } AN = \theta_{AN} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Azimut de } BN = \theta_{BN} = 2 \cdot \pi$$

$$\text{Azimut de } AM = \theta_{AM} = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\text{Azimut de } BM = \theta_{BM} = 2 \cdot \pi - \delta \quad (110)$$

El caso más general, con utilización de ejes oblicuos, que permite acceder a cualquier punto del espacio concernido por la red, es mucho más prolijo en cálculo, observación y replanteo en su caso. Por tanto debe reservarse para situaciones en las que realmente no sea bastante con la primera alternativa, *siendo en la práctica fundamental disponer de un software de suficiente calidad que resuelva el problema,*

con transformación automática de coordenadas cualquiera que sea el supuesto. Más adelante facilitaremos y aclararemos la cuestión.

La interpretación y valoración estadística y probabilística de los resultados obtenidos requiere, según ya se adelantó, una red que pueda calificarse como de alta calidad. No insistiremos más sobre ello, pero establecido sea que una matriz de varianzas de criterio banda lo más aproximada posible a la diagonal (100) es definitivamente deseable y, en todo caso, unos autovalores μ_i de la matriz S comprendidos entre valores extremos muy cercanos.

En dicho supuesto¹¹, serán tanto más fiables los resultados cuanto mejor se cumpla que los semiejes del hiperelipsoide HE (60) a posteriori

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu^{-1}} = \sigma_0 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1^{-1}} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_i^{-1}} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_n^{-1}} \end{pmatrix} = \sigma_{xi} \quad (111)$$

se aproximan a los valores de las correspondientes desviaciones típicas σ_{xi} de las correcciones x_i sobre los ejes de la misma denominación $O x_i$, y en consecuencia, pueda aceptarse la expresión canónica

$$HESC \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{x_i^2}{a_i^2} \right] = 1 \quad (112)$$

que expresamos en su forma standard, siendo la consideración a priori y la aplicación del coeficiente de homotecia k adecuado, que entenderemos implícitamente formuladas con carácter sistemático de ahora en adelante, si no se considera necesario hacerlo expresamente.

Así, dando por supuesta la calidad de la red, consecuencia de un trabajo cuidadoso y de alto nivel técnico en cualquier aspecto que se considere, y habiendo utilizado

¹¹En lo que sigue damos por conocidos los tres artículos hasta ahora publicados, en especial, el tercero.

debidamente los recursos técnicos referentes a pesos, covarianzas, ajustes por incrementos de coordenadas con o sin subredes, algoritmos del problema de diseño de orden dos PD2, etc...en definitiva se podrá establecer la integral

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi} &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(X) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 \dots dX_n = \\
 &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(X) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_n \quad (113)
 \end{aligned}$$

tanto más aproximadamente cuanto mejor sea la calidad del trabajo y según

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi} &= P(x)_{\Phi} = \\
 &= \iiint \dots \int_{n, \Phi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \left(\frac{x_i}{\sigma_{xi}}\right)^2} \cdot dx \cdot dx \dots \cdot dx_n \quad (114)
 \end{aligned}$$

Integral de variables separadas, con n variables y n filas en σ_{xx} .

La expresión anterior puede adoptar la forma más general

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi_q} &= \iiint \dots \int_{\Phi, q} P(X) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 \dots dX_q = \\
 &= \iiint \dots \int_{\Phi, q} P(X) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_q \quad (115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi_q} &= P(x)_{\Phi_q} = \\
 &= \iiint \dots \int_{q, \Phi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|_q^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \left(\frac{x_i}{\sigma_{xi}}\right)^2} \cdot dx \cdot dx \dots \cdot dx_q \quad (116)
 \end{aligned}$$

importante y versátil expresión de aplicación a zonas específicas de la red. Donde $1 \leq q \leq n$, y el determinante $|\sigma_{xx}|_q$ es el de la matriz cuadrada menor de orden q , σ_{xxq} formada escogiendo los elementos de cruce de las q filas y q columnas elegidas en la matriz varianza covarianza cuadrada de orden n inicial σ_{xx} correspondiente a la red completa.

Pudiendo aplicarse desde una sola coordenada x_i ($n = 1$), un solo punto planimétrico, (x_i, x_j) , con ($n = 2$), o tridimensional (x_i, x_j, x_k) , con ($n = 3$), hasta a toda la red pasando por una parte arbitraria de ella con ($n = q$), establecido que sea en cada caso el orden de variables adecuado.

El recinto de integración que también es de incertidumbre será en su caso más general el hiperparalelepípedo recto rectángulo canónico respecto al q - *edro* de coordenadas y circunscrito al hiperelipsoide HES_q de lados dobles de las desviaciones típicas definidas por las componentes del vector σ_{xq} , expresadas según $\sigma_{x_{iq}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_{iq}^{-1}}$, siendo $i \in (1, 2, \dots, q)$, semiejes de las figuras de error insistentemente mencionadas y μ_{iq} autovalor genérico de una cierta matriz S_q tal que

$$\sigma_{xxq} = \sigma_0^2 \cdot S_q^{-1} \quad (117)$$

cuya expresión es

$$\Phi_q = R_{\sigma_{xq}} = \left[| x_{x_{iq}} | \leq \sigma_{x_{iq}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_{iq}^{-1}} \right] \quad (118)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots, q)$$

cuya significación en planimetría es que todos y cada uno de los puntos exactos definidos por las q coordenadas que son variables de la integral (115) se encuentren dentro de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas particulares de cada punto, centro de simetría en el origen, y lados iguales al doble de las desviaciones típicas correspondientes a las coordenadas del punto. Son también los rectángulos circunscritos a las elipses standard de incertidumbre de cada punto y a sus podarias, ambas en posición canónica. La generalización a tres dimensiones es, como de costumbre, trivial.

Y si se tiene en cuenta toda la red, la expresión de (118) será

$$\Phi = R_{\sigma_x} = \left[| x_{xi} | \leq \sigma_{xi} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}} \right] \quad (119)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots, n)$$

Todo ello no es sino la teoría bien conocida. Pero la densificación de la red obliga a aplicar la doctrina anterior a nuevos puntos adicionales de la red, en consecuencia, es preciso considerar el supuesto de

$$q = n + p > n \quad (120)$$

en todo el desarrollo anterior.

Pero cualquier punto de densificación que se considere según la metodología y doctrina expuesta tiene la cualidad de virtual con respecto a todo el trabajo de levantamiento y ajuste efectivamente realizado.

Por consiguiente, entendemos es imposible que genere término cofactor con ninguna coordenada del levantamiento y/o influya en su desviación típica ni en figura de error alguna, sus variables (coordenadas) serán independientes, sus desviaciones típicas según hemos visto, conocidas e independientes, y podrán ser de aplicación las expresiones (114) y (116) adicionándolas simplemente al cálculo como nuevas variables separadas y manteniendo la condición de canonicidad de cuantos recintos de integración e incertidumbre, generales o parciales, se consideren.

Así pues, la adición de un número arbitrario “ p ” de coordenadas procedentes de una densificación cualquiera virtual practicada según se ha expuesto, conduce a las mismas expresiones (116) y (118).

Y en definitiva, y aceptadas que sean, según reiteramos una vez más, todas las condiciones previas de calidad establecidas, podrán generalizarse las expresiones de error deducidas en su momento.

Así, y como ejemplo, para la totalidad de la red densificada hasta $n+p$ coordenadas es lícito escribir hasta $n + p$ coordenadas (114) como

$$P_{\Phi_{n+p}} = P(x)_{\Phi_{n+p}} =$$

$$= \iiint \dots \int_{n+p, \Phi_{n+p}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot (n+p)}} \cdot |\sigma_{xx}|_{n+p}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^{n+p} \left(\frac{x_i}{\sigma_{xi}}\right)^2} \cdot dx \cdot dx \dots \cdot dx_{n+p} \quad (121)$$

Integral de variables separadas, con $n + p$ variables y $n + p$ filas y columnas en σ_{xx} extendida al recinto

$$\Phi_{n+p} = R_{\sigma_{x(n+p)}} = |x_{xi}| \leq \sigma_{xi} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}} = \quad (122)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots, n + p)$$

y la probabilidad de que todos y cada uno de los vértices de la red densificada se encuentren simultáneamente en sus respectivos recintos rectangulares de error así definidos será

$$\begin{aligned} P_{RK_{n+p}} &= P_{RK\sigma_{x(n+p)}} = |diag \sigma_o^2 \mu^{-1}|_{n+p}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{n+p} \cdot \prod_1^p \sigma_{xi} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} = \\ &= |\sigma_{xi}^2|_{n+p}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{n+p} \cdot \prod_1^{n+p} \sigma_{xi} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} = \\ &= \sigma_{x_1}^{-1} \cdot \sigma_{x_2}^{-1} \cdot \sigma_{x_3}^{-1} \dots \cdot \sigma_{x_{n+p}}^{-1} \cdot \sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2} \cdot \sigma_{x_3} \dots \cdot \sigma_{x_{n+p}} \cdot 2^{n+p} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} = \\ &= 2^{n+p} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} \quad (123) \end{aligned}$$

y en definitiva

$$P_{\Phi K_{n+p}} = P_{RK\sigma_{x(n+p)}} = 2^{n+p} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} \quad (124)$$

aplicable directamente con el coeficiente de homotecia K que sea requerido por el condicionado del trabajo.

Nótese que las expresiones (86), (87), (88) y (89) tienen, como siempre, un poder de afirmación tanto mayor cuanto mejor sea el trabajo de campo realizado. Y en especial, si se ha conseguido, directamente o aplicando los recursos que hemos estudiado con anterioridad, en especial los concernientes al problema de diseño de

orden dos PD2, que la matriz varianza covarianza de las variables a posteriori se aproxime lo más posible a una matriz diagonal de expresión (100).

En el límite, es elemental que si se verifica

$$\sigma_{xx} = \text{diag } \sigma_{xi}^2 = \text{diag } a_i^2 \quad (125)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots n)$$

el hiperelipsoide standard será canónico, de “ n ” ejes, y la expresión (61) se escribirá también como (112)

$$HESC = \sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \quad (126)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots n)$$

y practicada la densificación de la red, para un cierto grupo de puntos virtuales arbitrario definido por “ p ” coordenadas adicionales, y siendo así que no puede aparecer covarianza alguna, cualquiera que sean los valores de las varianzas o semiejes obtenidos

$$\sigma_{xi} = a_i \quad (127)$$

$$i \in (n + 1, n + 2, n + 3, \dots n + p)$$

se generará la matriz

$$\sigma_{xx} = \text{diag } \sigma_{xi}^2 = \text{diag } a_i^2 \quad (128)$$

$$i \in 1, 2, 3, \dots n + p$$

y siempre existirá el hiperelipsoide standard, canónico y de “ $n + p$ ” ejes

$$HESC = \sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \quad (129)$$

$$i \in 1, 2, 3, \dots, n + p$$

que resuelve la cuestión en toda su generalidad.

Si se trata de un grupo de puntos concernidos en su conjunto por “ q ” coordenadas, la probabilidad simultanea correspondiente será

$$P_{\Phi K_q} = P_{RK\sigma xq} = 2^q \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^q \quad (130)$$

Con $q = n$, coordenadas de la red inicial no densificada, la probabilidad simultanea correspondiente se acostumbra a escribir

$$P_{\Phi K} = P_{RK\sigma x} = 2^n \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^n \quad (131)$$

y para cada vértice por separado podemos escribir en planimetría

$$P_{\Phi K2} = P_{RK\sigma x2} = 2^2 \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^2 \quad (132)$$

ampliable a tres dimensiones según

$$P_{\Phi K3} = P_{RK\sigma x3} = 2^3 \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^3 \quad (133)$$

En definitiva, determinados que sean los recintos rectangulares de error de la totalidad de los vértices de la red densificada incluyendo correlativos, se calcularán las probabilidades de inclusión de los vértices exactos, desconocidos, en los recintos descritos, cualquiera que sea la agrupación o desglose que se requiera, con sencillez y a través de las expresiones que anteceden.

Es resaltable que para $K = 4$

$$N(0, 1)_0^4 \approx 0, 5000$$

$$P_{\Phi 4_q} = P_{R4\sigma xq} = 2^q \cdot \left[(N(0, 1))_0^4 \right]^q = (2 \cdot 0, 5000)^q \implies 1 \quad (134)$$

prácticamente la certeza, independientemente del número de vértices concernidos. Así, las técnicas de densificación permiten manejar e interpretar con rigor conjuntos de vértices de magnitud prohibitiva para cualquier otro procedimiento, con importante aplicación en barridos de láser, zonas de distinta significación y, evolución de redes en el tiempo y control de deformaciones.

2.2. CASO GENERAL CON UTILIZACIÓN DE EJES OBLICUOS

Conviene reiterar que es en general suficiente la densificación propiciada por los puntos que hemos llamado correlativos obtenidos por el método de los arcos capaces de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ para lograr la información necesaria en trabajos usuales, incluso de alta exigencia, con la no pequeña ventaja de utilizar siempre coordenadas cartesianas rectangulares. El caso general, con utilización de ejes oblicuos, debe reservarse para situaciones en las que realmente no sea posible la primera alternativa, generalmente por tratarse de puntos muy específicos que dejan al proyectista con escaso o nulo margen de elección, por ejemplo, el seguimiento de una grieta aparecida en un paramento u obra de fábrica que se desea controlar. Es ahora momento de estudiarlo.

El caso general, con utilización de ejes oblicuos corresponde a la determinación del recinto de error de un punto arbitrario M del espacio concernido por la red (cuyo lugar geométrico, no representado, siempre será el arco capaz sobre AB de un ángulo AMB cualquiera). En la figura 2.12 se representa con todo rigor a través de una rotación de argumento δ del sistema Ax_Ay_A y otra de argumento γ del sistema Bx_By_B . Por consiguiente, M queda determinado por dos rotaciones arbitrarias de argumentos δ y γ que cubren cualquier supuesto en todo el plano del levantamiento.

La repetición del método da lugar en principio a la inevitable superposición de subtramas de paralelogramos a la malla de trama rectangular inicial. Luego veremos como puede abordarse dicha cuestión. Sin embargo y en principio *resulta preceptivo tener en cuenta que si en el caso primeramente estudiado de malla y trama rectangulares era muy aconsejable, en el presente es imprescindible contar con un trabajo de campo de alta calidad, que genere matrices varianza covarianza a posteriori de las variables diagonales o cuasi-diagonales y figuras de error elipsoídicas canónicas y de pequeña excentricidad, con óptimo en circunferencias.*

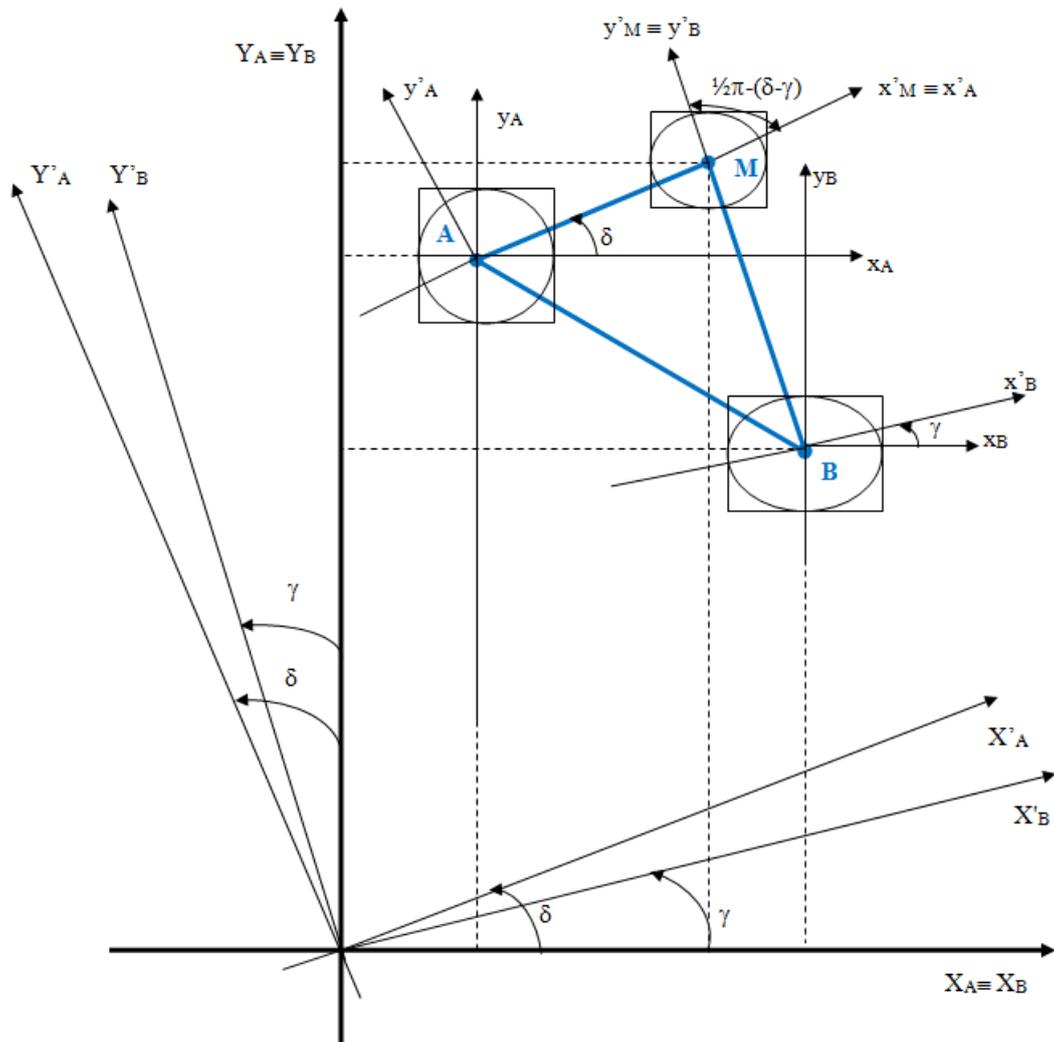


Figura 2.12: Determinación del punto M por ejes oblicuos

Así se representa en la fig. 2.12, obviamente con escala específica muy aumentada.

Es claro que, igual que δ , γ también es conocido para A, B, M, dados según la expresión análoga a (67)

$$m_B = \operatorname{tg} \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{Y_M - Y_B}{X_M - X_B} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \quad (135)$$

y todo se reduce a expresar la transformada de HE o HES a partir de (73) y aplicando dos rotaciones sinistrorsum δ , γ que se escriben sucesivamente como en (68), (69), (70), (71), (72)

$$x'_A = x_A \cdot \cos \delta + y_A \cdot \sen \delta \quad (136)$$

$$y'_A = -x_A \cdot \sen \delta + y_A \cdot \cos \delta \quad (137)$$

$$x'_B = x_B \cdot \cos \gamma + y_B \cdot \sen \gamma \quad (138)$$

$$y'_B = -x_B \cdot \sen \gamma + y_B \cdot \cos \gamma \quad (139)$$

	x_A	y_A
x'_A	$\cos \delta$	$\sen \delta$
y'_A	$-\sen \delta$	$\cos \delta$
	x_B	y_B
x'_B	$\cos \gamma$	$\sen \gamma$
y'_B	$-\sen \gamma$	$\cos \gamma$

(140)

Y siguiendo el razonamiento conocido, las rotaciones inversas serán como en (74) y (75)

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_i = x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \sen \delta$$

$$x_j = x'_i \cdot \sen \delta + x'_j \cdot \cos \delta \quad (141)$$

$$x_k = x'_k \cdot \cos \gamma - x'_l \cdot \sen \gamma$$

$$x_l = x'_k \cdot \sen \gamma + x'_l \cdot \cos \gamma$$

Y la transformada deducida, aplicada a la figura 2.12 se escribirá

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_A = x'_A \cdot \cos \delta - y'_A \cdot \text{sen } \delta$$

$$y_A = x'_A \cdot \text{sen } \delta + y'_A \cdot \cos \delta \quad (142)$$

$$x_B = x'_B \cdot \cos \gamma - y'_B \cdot \text{sen } \gamma$$

$$y_B = x'_B \cdot \text{sen } \gamma + y'_B \cdot \cos \gamma$$

particularizando i, j, k, l en las variables (correcciones) planas de A, B .

Sucesivamente se tendrá

$$\begin{array}{cccccccc}
 [x'_1 & x'_2 & \dots & x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta & x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta & \dots & \cdot \\
 \dots & x'_k \cdot \cos \gamma - x'_l \cdot \text{sen } \gamma & x'_k \cdot \text{sen } \gamma + x'_l \cdot \cos \gamma & \dots & x'_{n-1} & x'_n] \cdot \\
 \cdot S \cdot & \left(\begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta \\ x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta \\ \dots \\ x'_k \cdot \cos \gamma - x'_l \cdot \text{sen } \gamma \\ x'_k \cdot \text{sen } \gamma + x'_l \cdot \cos \gamma \\ \dots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{array} \right) & = C^2 & (143)
 \end{array}$$

Hipercuádrica HE , HES para $C = 1$, referida a los nuevos ejes, y la sección por el hiperplano

$$\begin{aligned} x'_m &= 0 \\ \forall m &\neq i, l \end{aligned} \quad (144)$$

resulta

$$(0 \ 0 \ \dots \ x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \gamma \ \dots \ -x'_l \cdot \sen \gamma \ x'_l \cdot \cos \gamma \ \dots \ 0 \ 0) \cdot$$

$$\cdot S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ \dots \\ -x'_l \cdot \sen \gamma \\ x'_l \cdot \cos \gamma \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C^2 \quad (145)$$

y sobre el plano del levantamiento se tendrá en definitiva la elipse de incertidumbre de M más general, obtenida a partir de la hipercuádrica HES

$$(x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ -x'_l \cdot \sen \gamma \ x'_l \cdot \cos \gamma) \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ -x'_l \cdot \sen \gamma \\ x'_l \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= C^2 \quad (146) \end{aligned}$$

Siendo $s_{rs} = s_{sr}$ los elementos de orden rs y sr en la matriz simétrica de diseño S .

Y en forma simplificada se escribirá:

$$x'^T_{i\delta\gamma} \cdot S_{ijkl} \cdot x'_{i\delta\gamma} - C^2 = 0 \quad (147)$$

o bien, particularizando para M en la figura 2.12

$$(x'_M \cdot \cos \delta \quad x'_M \cdot \sen \delta \quad -y'_M \cdot \sen \gamma \quad y'_M \cdot \cos \gamma) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x'_M \cdot \cos \delta \\ x'_M \cdot \sen \delta \\ -y'_M \cdot \sen \gamma \\ y'_M \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (148)$$

elipse referida a los ejes cartesianos **oblicuos** $M x'_M y'_M$

y en forma simplificada

$$x'^T_{M\delta\gamma} \cdot S_{AB} \cdot x'_{M\delta\gamma} - C^2 = 0 \quad (149)$$

que resuelve la cuestión completamente.

El dibujo y determinación de los elementos de la elipse deben tener en cuenta los nuevos ejes oblicuos de referencia, formando un ángulo de $\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi - (\delta - \gamma)$, según se deduce de la figura 2.12. El punto M será un punto correlativo generalizado y el caso estudiado anteriormente, de ejes rectangulares, corresponde a la particularización $\delta = \gamma$, c.d.s.

En el caso más general de aplicación reiterada de la doctrina expuesta, la malla compleja resultante estará formada por una malla inicial básica de trama rectangular y tantas submallas de tramas paralelogramicas y orientaciones distintas como nuevos puntos correlativos generalizados se hayan determinado, es decir como pares de rotaciones δ , γ , planas, hayan sido aplicadas a la hipercuádrica HE recinto general de incertidumbre de la red.

Se hace preciso avanzar en la doctrina y esforzarse en dotarla de la suficiente practicidad.

Veremos a su debido tiempo que es posible sintetizar la praxis en una aplicación del Análisis Multivariante sobre un mismo sistema de ejes rectangulares y a este efecto desarrollamos el algoritmo que sigue.

Se trata de definir rigurosa y completamente el recinto de error. Así pues, escribiremos la expresión conocida de la ecuación de la elipse de incertidumbre $E_{\theta C}$ de un punto cualquiera M , según la figura 2.13, con centro en el origen de coordenadas, ejes cualesquiera formando un ángulo θ , y procedente de un hiperelipsoide HE de parámetro C , en la forma

$$\begin{aligned} E_{\theta C} &= x^T \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot xy + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} = 0 \quad (150) \end{aligned}$$

y sea la ecuación canónica de la misma elipse

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2}\pi C} &= x^T \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= a'_{11} \cdot x^2 + a'_{22} \cdot y^2 + a'_{33} = 0 \quad (151) \end{aligned}$$

Sean $E_{\theta C}$ y $E_{\frac{1}{2}\pi C}$ las ecuaciones, de la misma cónica expresada en dos sistemas de referencia distintos. La expresión matricial de la cónica $E_{\theta C}$ va a tener en común con la expresión matricial $E_{\frac{1}{2}\pi C}$ los llamados invariantes métricos.

La igualdad de invariantes entre ambas cónicas se sigue como

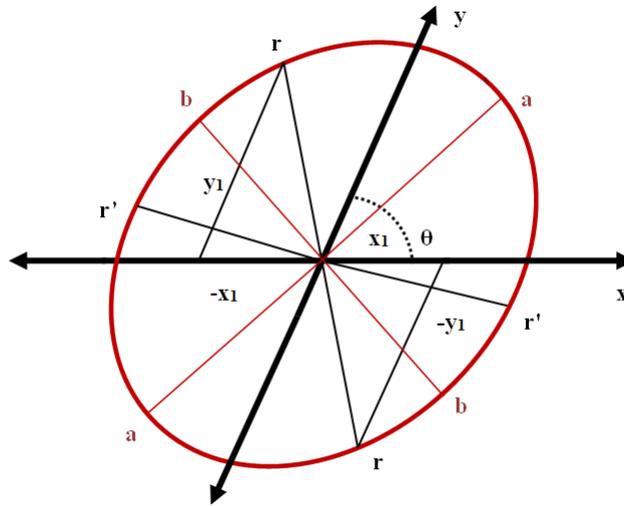


Figura 2.13: Elipse de incertidumbre de un punto cualquiera M

$$a'_{11} + a'_{22} = \frac{I}{\text{sen}^2\theta} = \frac{a_{11}+a_{22}}{\text{sen}^2\theta} = \text{conocido} \quad (152)$$

$$a'_{11} \cdot a'_{22} = \frac{A_{33}}{\text{sen}^2\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\text{sen}^2\theta} = \text{conocido} \quad (153)$$

$$a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} = \frac{A}{\text{sen}^2\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\text{sen}^2\theta} = \text{conocido} \quad (154)$$

luego a'_{11} y a'_{22} son las raíces de la ecuación de segundo grado conocida:

$$\rho^2 - \frac{I}{\text{sen}^2\theta} \cdot \rho + \frac{A_{33}}{\text{sen}^2\theta} = 0 \quad (155)$$

que expresamos sucesivamente como

$$\rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta - I \cdot \rho + A_{33} = 0 \quad (156)$$

$$\rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta - (a_{11} + a_{22}) \cdot \rho + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (157)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} - \rho \cdot \cos\theta \\ a_{12} - \rho \cdot \cos\theta & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (158)$$

de raíces ρ_1 y ρ_2 , cuya expresión es

$$\rho = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \theta} \cdot \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2)} \right] \quad (159)$$

cumpléndose que

$$\rho_1 = a'_1 \quad (160)$$

$$\rho_2 = a'_2 \quad (161)$$

es trivial como comprobación inmediata considerar que particularizando en (124) para ejes rectangulares con $\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi$ y $a_{12} = 0$, que equivale a partir de ecuación canónica en (150), resulta c.d.s.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(a_{11} + a_{22}) \pm (a_{11} - a_{22})] \quad (162) \end{aligned}$$

$$\rho_1 = a'_1 = a_1 = b^2 \quad (163)$$

$$\rho_2 = a'_2 = a_2 = a^2 \quad (164)$$

con a, b , semiejes de la elipse, siendo indiferente en cualquier caso para el resultado final asignar a'_1, a'_2 a cualquiera de las dos raíces.

La ecuación canónica de la elipse será pues

$$\rho_1 \cdot x^2 + \rho_2 \cdot y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \quad (165)$$

o bien

$$\frac{A_{33}}{A} \cdot \rho_1 \cdot x^2 + \frac{A_{33}}{A} \cdot \rho_2 \cdot y^2 + 1 = 0 \quad (166)$$

con lo que se deducen los semiejes de la elipse en su caso más general, que serán

$$a = \sqrt{-\frac{A}{A_{33} \cdot \rho_1}} \quad (167)$$

$$b = \sqrt{-\frac{A}{A_{33} \cdot \rho_2}} \quad (168)$$

y aún puede simplificarse el proceso, teniendo en cuenta que, en (153) y (154)

$$A = a_{33} \cdot A_{33} = a_{33} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \quad (169)$$

$$A_{33} = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \quad (170)$$

y particularizando en (166), (167), (168) se obtiene

$$\frac{\rho_1}{a_{33}} \cdot x^2 + \frac{\rho_2}{a_{33}} \cdot y^2 + 1 = 0 \quad (171)$$

$$a = \sqrt{-\frac{a_{33}}{\rho_1}} \quad (172)$$

$$b = \sqrt{-\frac{a_{33}}{\rho_2}} \quad (173)$$

ecuación generatriz y semiejes de la elipse

Es preceptivo terminar el proceso accediendo a la representación rigurosa de la elipse con respecto a los ejes oblicuos iniciales.

A dicho efecto consideremos en la figura 2.13 una pareja de semidiámetros en la elipse de igual dimensión que designamos con $r = r'$. Ambos serán simétricos respecto a los semiejes a y b .

Escribamos la expresión de la elipse (150) $E_{\theta C}$ y la aplicación del teorema del coseno a un semidiámetro cualquiera. Se tendrá:

$$E_{\theta C} = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} = 0 \quad (174)$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\theta + y^2 - r^2 = 0 \quad (175)$$

(175) generaliza para cualquier cuadrante la expresión del teorema del coseno, al tener en cuenta los signos de x , y .

Resolviendo el sistema (174), (175) se obtendrán las coordenadas de los cuatro puntos extremos de los diámetros r y $r' = r$ considerados. Es claro que la ecuación resolvente en x ó en y será de cuarto grado.

Un procedimiento adecuado para resolver el sistema estriba en la aplicación del algoritmo y eliminante de Sylvester, estudiado en Álgebra Superior. Así, si representamos (175) en la forma análoga a la (174)

$$b_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot b_{12} \cdot x \cdot y + b_{22} \cdot y^2 + b_{33} = 0 \quad (176)$$

la ecuación de cuarto grado en y , eliminante de x , que resuelve el sistema propuesto se demuestra que es de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ b_{11} & 2 \cdot b_{12} \cdot y & b_{22} \cdot y^2 + b_{33} & 0 \\ 0 & b_{11} & 2 \cdot b_{12} \cdot y & b_{22} \cdot y^2 + b_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (177)$$

y particularizando para el caso estudiado se tendrá

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (178)$$

la ecuación es conocida en todos sus términos y sus raíces son las ordenadas de los cuatro extremos de los semidiámetros considerados. Conocidas que sean, la obtención de las correspondientes abscisas es ya trivial.

El caso general de ecuación de cuarto grado no tiene solución en formulación algébrica exacta y es preciso acudir a métodos aproximados (Newton, Newton-cuerda,...etc). Sin embargo, en el caso que nos ocupa las ordenadas solución serán, según se desprende de la figura 2.13, de la forma y_1 , y_2 , $-y_1$, $-y_2$.

Por consiguiente (178) se podrá escribir como

$$K \cdot (y - y_1) \cdot (y + y_1) \cdot (y - y_2) \cdot (y + y_2) = 0 \quad (179)$$

$$K \cdot (y^2 - y_1^2) \cdot (y^2 - y_2^2) = 0 \quad (180)$$

$K = cte.$, coeficiente de y^4 que puede tomarse como la unidad, y en definitiva se tendrá

$$y^4 - y^2 \cdot (y_1^2 + y_2^2) + y_1^2 \cdot y_2^2 = 0 \quad (181)$$

con lo que se demuestra que (178) es una ecuación bicuadrada de solución exacta conocida e inmediata.

Pero de la figura 2.13 se deduce que, si se toma

$$r = r' = a \quad (182)$$

cumplirá que

$$y_1 = y_2 \quad (183)$$

y en (179), (180), (181) se sigue

$$K \cdot (y - y_1)^2 \cdot (y + y_1)^2 = 0 \quad (184)$$

$$K \cdot (y^2 - y_1^2)^2 = 0 \quad (185)$$

$$y^4 - y^2 \cdot (2 \cdot y_1^2) + (y_1^2)^2 = 0 \quad (186)$$

Ecuación bicuadrada con dos raíces dobles, “ $+y_1$ ” y “ $-y_1$ ”.

y finalmente, siendo a , b , semiejes de la elipse, conocidos en virtud de (172) y (173), las coordenadas de los vértices de la elipse referidas al sistema de ejes oblicuos iniciales de ángulo θ , vendrán dadas por las cuatro ecuaciones bicuadradas con dos raíces dobles cada una correspondientes a los vértices de los ejes $2 \cdot a$, $2 \cdot b$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (187)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - br \end{vmatrix} = 0 \quad (188)$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11} \cdot x^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (189)$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11} \cdot x^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & x^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (190)$$

que permiten conocer y representar la elipse con todo rigor, en posición y dimensiones.

Merece la pena, aunque el cálculo resulte un tanto prolijo, desarrollar las expresiones anteriores. En (178) desarrollando por menores adjuntos se tiene sucesivamente

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22}y^2 + a_{33} \\ 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 & 0 \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot y^2 + a_{33}) \cdot \begin{vmatrix} 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta \end{vmatrix} + a_{11} \cdot (y^2 - r^2) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y \\ 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} + \quad (191)$$

$$+ 2 \cdot a_{12} \cdot y \cdot \begin{vmatrix} 2 \cdot a_{12} \cdot y & (a_{22}y^2 + a_{33}) \\ 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} - (a_{22} \cdot y^2 + a_{33}) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & (a_{22}y^2 + a_{33}) \\ 1 & y^2 - r^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}y^2 + a_{33}) \cdot [4 \cdot y^2 \cdot \cos^2\theta - (y^2 - r^2)] + a_{11} \cdot (y^2 - r^2) \cdot [a_{11} \cdot (y^2 - r^2) - 4 \cdot a_{12} \cdot y^2 \cdot \cos\theta^2] +$$

$$+ 2 \cdot a_{12} \cdot y \cdot [2 \cdot a_{12} \cdot y \cdot (y^2 - r^2) - 2 \cdot y \cdot \cos\theta \cdot (a_{22}y^2 + a_{33})] - (a_{22} \cdot y^2 + a_{33}) \cdot [a_{11} \cdot (y^2 - r^2) \cdot$$

$$- (a_{22}y^2 + a_{33})] = \quad (192)$$

$$= [(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos\theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2] \cdot y^4 +$$

$$+ [4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{11} \cdot a_{33} \cdot \cos\theta + a_{11} \cdot a_{12} \cdot r^2 - a_{12} \cdot a_{33}) - 2 \cdot a_{11} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot r^2 -$$

$$- 2 \cdot a_{11}^2 \cdot r^2 - 4 \cdot a_{12}^2 \cdot r^2 + 2 \cdot a_{22} \cdot a_{33}] \cdot y^2 + (a_{11} \cdot r^2 + a_{33})^2 = 0 \quad (193)$$

ecuación bicuadrada de las ordenadas de los cuatro extremos de los semidiámetros de longitud “r” , como debía ser, y del mismo modo la ecuación de las abscisas se obtendrá de (178) cambiando “y” por “x” y a_{11} por a_{22} y recíprocamente. En definitiva

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (194)$$

y desarrollando

$$= [(a_{22} - a_{11})^2 + 4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos\theta - a_{12} \cdot a_{11} - a_{22} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2] \cdot x^4 +$$

$$\begin{aligned}
 & +[4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cos\theta + a_{22} \cdot a_{12} \cdot r^2 - a_{12} \cdot a_{33}) - 2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot r^2 - \\
 & -2 \cdot a_{22}^2 \cdot r^2 - 4 \cdot a_{12}^2 \cdot r^2 + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{33}] \cdot x^2 + (a_{22} \cdot r^2 + a_{33})^2 = 0 \quad (195)
 \end{aligned}$$

que resuelve la cuestión, siendo las raíces de la ecuación bicuadrada deducida las cuatro abscisas buscadas.

Las coordenadas de los vértices se obtendrán fácilmente sustituyendo en (193) y (195) el semidiámetro genérico “ r ” por los semiejes “ a ” y “ b ”, es decir, teniendo en cuenta (159) y (172) y (173) se obtiene en primer lugar:

$$r^2 = -\frac{a_{33}}{\rho} = \frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2\theta}{[(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2\theta}]} \quad (196)$$

resultando $a^2 = a^2$, $r^2 = b^2$ según se tome uno u otro signo en el discriminante de las raíces ρ , es decir

$$r^2 = \frac{a_{33}}{\rho_1} = a^2 = -\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2\theta}{[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2\theta}]} \quad (197)$$

$$r^2 = \frac{a_{33}}{\rho_2} = b^2 = -\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2\theta}{[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2\theta}]} \quad (198)$$

es inmediato comprobarlo en el caso trivial canónico $a_{12} = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \pi$

Pero según se vio en (182), (183), (184), (185), (186) el caso en presencia se resuelve con una bicuadrada con dos raíces dobles. Por consiguiente, la sustitución de r^2 por los valores deducidos en (193) y (194) dan a dichas ecuaciones la forma (185) o (186), que podemos escribir

$$K \cdot (y^2 - y_1^2)^2 = (K^2 \cdot y^2 - K^2 \cdot y_1^2)^2 = (P \cdot y^2 - Q)^2 = 0 \quad (199)$$

P, Q , coeficientes conocidos. Y despejando y^2

$$y^2 = \frac{Q}{P} \quad (200)$$

y en definitiva, particularizando en (193)

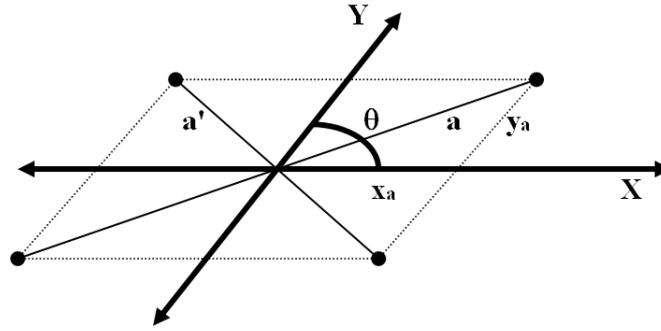


Figura 2.14: Ejes oblicuos

$$y^2 = -\frac{a_{11}r^2 + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 - 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{22}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (201)$$

y con $r^2 = a^2$ según (197)

$$y_a^2 = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (202)$$

y particularizando en (195) y teniendo en cuenta también (197) se obtiene

$$x_a^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (203)$$

(202) y (203) son la expresión de las coordenadas de los vértices del eje 2 · a de la elipse referidos a los ejes oblicuos de ángulo θ. Es fundamental comprobar el signo de las coordenadas que debe establecerse verificando la cumplimentación de (174) para el valor de “a” conocido por (172). En figura 2.14 se aprecia que en ejes oblicuos una pareja de valores-componentes (±x_a, ±y_a) dan lugar a dos posibilidades de vectores de módulo distinto según sea la combinación de signos adoptada.

Es ya inmediato definir las coordenadas de los vértices del eje 2 · b. Sustituyendo en (193) y (195) el semidiámetro genérico “r” por el semieje “b”, es decir, teniendo en cuenta (159) , (173) y (198) se obtiene:

$$y_b^2 = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 - 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (204)$$

$$x_b^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 - 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (205)$$

(204) y (205) son la expresión de las coordenadas de los vértices del eje $2 \cdot b$ de la elipse referidos a los ejes oblicuos de ángulo θ , con las mismas observaciones del caso anterior con respecto a signos de aquellas. Es obvio también que se rechazarán como soluciones extrañas las imaginarias generadas por valores negativos de (202), (203), (204) y (205).

Como ya hemos hecho anteriormente, podemos comprobar las expresiones deducidas con el caso trivial de ejes rectangulares con $\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi$ y $a_{12} = 0$, que equivale a partir de la ecuación canónica

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 - a_{33} \equiv b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$$

en (150). En dicho supuesto se obtiene

$$\begin{aligned} y_a^2 &= \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22})}} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2}} = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \\ &= \frac{-a_{33} + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = 0 \quad (206) \end{aligned}$$

$$x_a^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{-a_{22} \cdot \frac{a_{33}}{a_{11}} + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \pm \frac{a_{33}}{a_{11}} = \pm \frac{-a^2 \cdot b^2}{b^2} = a^2 \quad (207)$$

$$\begin{aligned} y_b^2 &= \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22})}} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2}} = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{11}-a_{22})} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \\ &= \frac{a_{11} \cdot \left(-\frac{a_{33}}{a_{11}} \right) + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{a_{33} \cdot (a_{22} - a_{11})}{\pm a_{22} \cdot (a_{11} - a_{22})} = \pm \frac{a_{33}}{a_{22}} = \pm \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2} = b^2 \quad (208) \end{aligned}$$

$$x_b^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22})}} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{a_{22} \cdot \left(-\frac{a_{33}}{a_{22}} \right) + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{-a_{33} + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = 0 \quad (209)$$

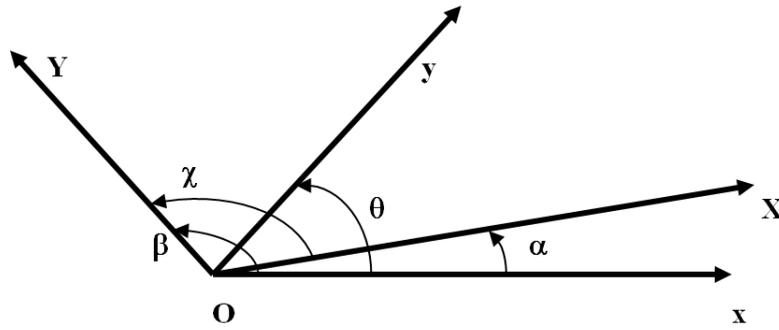


Figura 2.15: Ángulos de definición de los ejes oblicuos

resultando las coordenadas de los vértices, despreciando soluciones imaginarias, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$ c.d.s.

A costa de ejecutar un nuevo cambio de ejes puede reducirse el caso de ejes oblicuos al de rectangulares.

Efectivamente, la expresión general en el plano del cambio de ejes oblicuos (x, y) formando un ángulo θ a los (X, Y) formando un ángulo χ conservando el origen O es

$$x = \frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{\text{sen} \theta} \cdot X + \frac{\text{sen}(\theta - \beta)}{\text{sen} \theta} \cdot Y \quad (210)$$

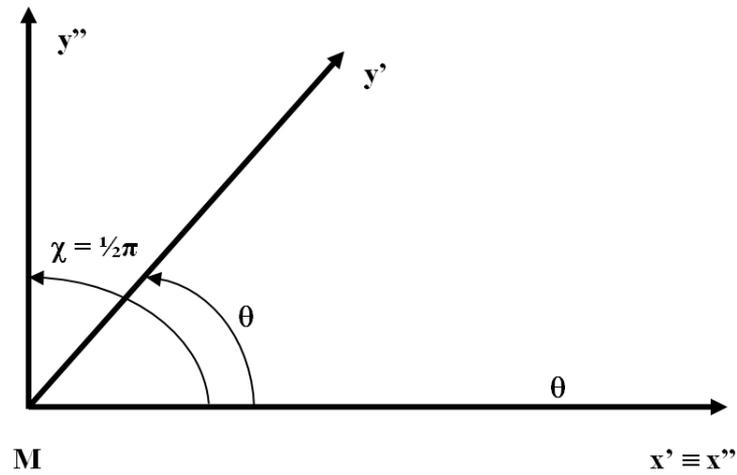
$$y = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta} \cdot X + \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen} \theta} \cdot Y \quad (211)$$

donde

$$\alpha = \text{ángulo ejes } (x, X)$$

$$\beta = \text{ángulo ejes } (x, Y)$$

con sentido de ejes sinistrorsum como en figura 2.15

Figura 2.16: Cambio de ejes de $Mx'_M y'_M$ a $Mx''_M y''_M$

Y teniendo en cuenta la expresión (148) y la figura 2.12, apliquemos lo expuesto al cambio de ejes de $Mx'_M y'_M$ ($Mx'y'$ en general) a $Mx''_M y''_M$ ($Mx''y''$ en general) representado en figura 2.16 y donde

$$\alpha = \text{ángulo ejes } (x', x'') = 0$$

$$\chi = \text{ángulo ejes } (x', y'') = \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$\theta = \text{ángulo ejes } (x', y')$$

$$\text{eje } x' \equiv \text{eje } x''$$

se sigue

$$x' = x'' + \frac{\text{sen}(\theta - \frac{1}{2}\pi)}{\text{sen } \theta} \cdot y'' = x'' - y'' \cdot \text{ctg } \theta \quad (212)$$

$$y = y'' \cdot \text{cosec } \theta \quad (213)$$

y sustituyendo en (148) se escribe

$$\begin{aligned}
 & ((x''_M - y''_M \cdot \operatorname{ctg} \theta) \cdot \cos \delta \quad (x''_M - y''_M \cdot \operatorname{ctg} \theta) \cdot \operatorname{sen} \delta \quad -y''_M \cdot \operatorname{cosec} \theta \cdot \operatorname{sen} \gamma \quad y''_M \cdot \operatorname{cosec} \theta \cdot \cos \gamma) \cdot \\
 & \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x''_M - y''_M \cdot \operatorname{ctg} \theta) \cdot \cos \delta \\ (x''_M - y''_M \cdot \operatorname{ctg} \theta) \cdot \operatorname{sen} \delta \\ -y''_M \cdot \operatorname{cosec} \theta \cdot \operatorname{sen} \gamma \\ y''_M \cdot \operatorname{cosec} \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (214)
 \end{aligned}$$

referida a los ejes cartesianos **ortogonales** $M x'' y''$, que se definen y representan con toda sencillez a partir de la identidad de los ejes x' y x'' . En forma simplificada será

$$x''^T_{M\delta\gamma} \cdot S_{Mkl} \cdot x''_{M\delta\gamma} - C^2 = 0 \quad (215)$$

Con la exposición y desarrollo que antecede queda ultimada el estudio y definición de figuras de error en Redes Locales y Microgeodesia, hasta su densificación por vértices correlativos en su caso más general.

Sin embargo, aun resulta incompleto la interpretación y cifrado rigurosos del poder de afirmación de aquellas, tanto para el conjunto de todos los vértices de la red, como para un grupo o grupos de ella simultáneamente, cualquiera que sea su magnitud, hasta llegar a un solo punto arbitrario individualizado.

A dicho efecto entendemos como mejor solución establecer el condicionado necesario para aplicar rigurosamente Análisis Multivariante mediante la integral múltiple bien conocida de variables separadas estudiada y desarrollada en trabajos anteriores¹². Y para ello y en primer lugar, es preciso un giro más que referencia

¹² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". *Opus cit.*

la elipse correlativa generalizada tipo estudiada a ejes ortogonales x'' paralelos a los de malla rectangular inicial x .

Es decir, en el presente caso y para todos y cada uno de los puntos de densificación que den lugar a elipses correlativas en principio referidas a ejes oblicuos, habiendo resultado coincidentes los ejes x' y x'' será preceptivo afectar a estos últimos de una rotación plana final de argumento $-\gamma$, según se aprecia en fig. 2.12. análogamente a como se operó en el caso de malla rectangular¹³.

Con la notación usual su expresión será:

$$x'''_M = x''_M \cdot \cos \gamma - y''_M \cdot \sen \gamma \quad (216)$$

$$y'''_M = x''_M \cdot \sen \gamma + y''_M \cdot \cos \gamma \quad (217)$$

	x''_M	y''_M	
x'''_M	$\cos \delta$	$-\sen \delta$	(218)
y'''_M	$\sen \delta$	$\cos \delta$	

expresándose

$$x''_M = x'''_M \cdot \cos \gamma + y'''_M \cdot \sen \gamma \quad (219)$$

$$y''_M = -x'''_M \cdot \sen \gamma + y'''_M \cdot \cos \gamma \quad (220)$$

que escribimos previamente suprimiendo períndices¹⁴ en el segundo miembro y sin mengua de rigor ni generalidad, en una primera notación simplificada

$$x''_M = x_M \cdot \cos \gamma + y_M \cdot \sen \gamma = \Delta \quad (221)$$

$$y''_M = -x_M \cdot \sen \gamma + y_M \cdot \cos \gamma = \Gamma \quad (222)$$

¹³Ver epígrafe 2.1 “Caso malla rectangular” de esta publicación.

¹⁴*Ibidem*. Se operó de la misma forma.

Así y sustituyendo en (214) se obtiene la expresión final más general de la elipse correlativa de error a priori referida a ejes ortogonales pertenecientes a la malla de trama rectangular básica y asociada a un punto correlativo arbitrario. *Que es lo mismo que decir un punto cualquiera arbitrario del área de levantamiento, interno o externo al recinto abarcado por los vértices de estación de la red, siendo trivial extender el resultado al supuesto a posteriori.*

En definitiva, se tendrá

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma)) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (223)$$

elipse correlativa generalizada a priori

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma)) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (224)$$

Elipse correlativa generalizada a posteriori.

Así, (223) y (224) resuelven totalmente la cuestión respecto al punto arbitrario M y su figura de error referida a los ejes $Ox''y''$, cuyos períndices pueden suprimirse por ser dichos ejes paralelos a los de la malla rectangular inicial Oxy y por tanto formar parte de ella.

En forma simplificada se escribirán las expresiones (223) y (224) más generales de elipses a priori y posteriori, de interpretación inmediata

$$x^T_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} \cdot S_{AB} \cdot x_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} - C^2 = 0$$

$$x^T_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{AB} \cdot x_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} - C^2 = 0 \quad (225)$$

En cualquier caso y para $C = 1$, elipses standard. Y es inmediato comprobar que para $\delta = \gamma$ se obtiene el caso de malla rectangular y para $\delta = \gamma = 0$ se obtienen las N^2 elipses correlativas básicas, como debía suceder¹⁵.

En cuanto a la aplicación ulterior de Análisis Multivariante que completa el trabajo, estamos de nuevo en el caso estudiado en Malla Rectangular y a él nos referimos¹⁶. Será posible o no, y tanto más fiable, cuanto mejor sea la calidad de la red. Y entendemos por calidad, aparte de las características que ya podemos llamar clásicas y no repetiremos aquí, la condición indispensable de lograr matrices varianza covarianza a posteriori diagonales o casi-diagonales y elipses de error de poca excentricidad, tan cercanas a circunferencias como se sea capaz mediante un excelente trabajo de campo, imprescindible e irremplazable por tarea alguna de gabinete.

La extensión a tres dimensiones manteniendo vertical el eje de cotas, caso topográfico y microgeodésico, requiere manejar transformaciones espaciales tridimensionales con ejes oblicuos, que complican teoría y praxis de forma notable. Es mucho más aconsejable, en su caso, tratar separadamente planimetría y altimetría.

Otra cuestión es que la realidad física imponga que ninguno de los tres ejes tenga una dirección predeterminada. Con ello, las inevitables transformaciones espaciales mencionadas se complican más todavía. Sin embargo dicho supuesto se plantea frecuentemente en cálculo de deformaciones y es ineludible abordarlo. Así lo haremos en su momento al ocuparnos de dicha materia. Con ello la aplicación topográfica, si además y en su caso procediere, se reducirá a una particularización.

Finalmente y en otro orden de ideas, es necesario cuidar de la correcta representación, señalización e incluso monumentación de los puntos correlativos

¹⁵*Ibidem.*

¹⁶*Ibidem.*

densificados. Es claro que la cuestión planteada entra de lleno en el ámbito del replanteo topográfico, que no es objeto de este trabajo.

2.3. NOTA ACERCA DE LA DENSIFICACIÓN DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”, O VÉRTICES OBTENIDOS CON SOLUCIÓN PSEUDOINVERSA

Si se trata de una red libre

$$R(S) = (n - d) \implies \text{rango incompleto} \quad (226)$$

d = defecto de rango

y escribiremos sucesivamente, según sabemos

$$x = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot K$$

$$Q_{xx} = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q_K \cdot (S^- \cdot A^T \cdot P)^T = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q \cdot P \cdot A \cdot S^- = S^- \cdot S \cdot S^- \quad (227)$$

$$Q_{xx} = S^-$$

siendo $S^- \implies$ matriz inversa generalizada recíproca arbitraria.

Y por consiguiente

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^- \quad (228)$$

existiendo infinitas soluciones. Entre ellas, la solución con matriz pseudoinversa única S^+

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^+ \quad (229)$$

generalización de (46), pero siempre con defecto de rango = d

$$R(S) = R(S^-) = R(S^+) = R(\sigma_{xx}) = n - d \quad (230)$$

resultando nulo el determinante de la matriz varianza covarianza a posteriori σ_{xx}

$$\Gamma \cdot \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & & & & & \\ & \mu_2^{-1} & & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & \mu_{n-d}^{-1} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \quad (233)$$

$n - d$ autovalores positivos

d autovalores nulos

La comprobación es sencilla. En efecto, sustituyendo (232) y (233) en las cuatro condiciones de Moore-Penrose¹⁹.

$$\begin{aligned} S \cdot S^+ \cdot S &= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \\ &= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \\ &= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S \end{aligned}$$

puesto que

$$\Gamma^T \cdot \Gamma = \Gamma \cdot \Gamma^T = I$$

$$\Gamma^T = \Gamma^{-1}$$

por ser Γ, Γ^T matrices ortogonales

y seguidamente

¹⁹*Ibidem.* "Avances...". pg 24, (67).

$$S^+ \cdot S \cdot S^+ = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T =$$

$$= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T =$$

$$= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S^+$$

$$S \cdot S^+ = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T$$

$$(S \cdot S^+)^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S \cdot S^+$$

$$S^+ \cdot S = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T$$

$$(S^+ \cdot S)^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S^+ \cdot S$$

como debía ser. Y fácilmente se deduce

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^+ = \sigma_0^2 \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T$$

$$\sigma_{xx}^+ = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \quad (234)$$

generalización de (46), con defecto de rango = d

Puede por tanto escribirse directamente, con la notación usual

$$x^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x = k^2$$

$$x^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \cdot x = k^2 \quad (235)$$

$$x^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S \cdot x = k^2$$

siendo s = varianza del observable de peso unidad a priori.

k = coeficiente de homotecia, adimensional. *Nada que ver con C en (44).*

Formas cuadráticas representativas de hipercuádricas degeneradas, tipo hipercilindros rectos, con directriz hiperelipsoídica de $(n - d)$ ejes y generatrices definidas por d direcciones. No son recintos de error con información probabilística evidentemente como (44), pero sí pueden ser útiles para el proyectista como figuras representativas del vector de correcciones x , especialmente en comparación con el de valor mínimo x_p , solución pseudoinversa.

Así, para $k = 1$, generalización de las figuras que hemos llamado standard, se tendrá:

$$x^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x = 1$$

$$x^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \cdot x = 1 \quad (236)$$

hipercilindro de correcciones en el espacio E_n , de directriz hiperelipsoídica en general no canónica de $(n - d)$ semiejes a_i tales que

$$a_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$$

$$\mu_i \implies \text{autovalor de } S \text{ positivo de orden } i \quad (237)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots (n - d)$$

en la dirección de sus $(n - d)$ autovalores correspondientes.

Y con d direcciones generatrices definidas por los autovectores de los restantes d autovalores nulos de S .

Que puede estimarse a priori por el hipercilindro correlativo

$$x^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S \cdot x = 1 \quad (238)$$

de semiejes

$$a_i = s \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$$

$$\mu_i \implies \text{autovalor de } S \text{ positivo de orden } i \quad (239)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots (n - d)$$

en la dirección de sus $(n - d)$ autovectores correspondientes, que son los anteriormente definidos.

Y con las d direcciones generatrices, también antes definidas. El resultado es de importante aplicación a lo largo de todo el Proyecto, Ejecución e Interpretación de la red concernida, a priori y a posteriori. Y especialmente en su densificación.

Efectivamente, cualquier hiperplano bidimensional sección de cualquiera de los dos hipercilindros formulados (236) y (238) generado por dos ejes de coordenadas (Ox_j, Ox_l) es según sabemos superponible sobre el plano del levantamiento, tiene significado real y es de aplicación obvia en el estudio de la sensibilidad de la red en presencia.

Y también sabemos calcular la ecuación de la curva sección, elipse que puede representarse en el plano del levantamiento con centro y origen de coordenadas en el punto (x_j, x_l) , perteneciente a la red observada o correlativo, referida a sus ejes específicos (Ox_j, Ox_l) , y cuya ecuación, refiriéndonos a (236), es

$$x^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x = 1$$

$$x_i = 0$$

$$i \neq j, l \quad (240)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots (n - d)$$

que se desarrolla según

$$(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_l \ \dots \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ x \\ \dots \\ x_l \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (241)$$

siendo su ecuación en el plano del levantamiento y referida a (Ox_j, Ox_l)

$$x_j \ x_l \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{jj}^+ & \sigma_{jl}^+ \\ \sigma_{jl}^+ & \sigma_{ll}^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j \\ x_l \end{pmatrix} = 1 \quad (242)$$

$\sigma_{gh}^+ \implies$ elemento de orden gh en la pseudoinversa σ_{xx}^+

en notación simplificada

$$x_{jl}^T \cdot \sigma_{jl}^+ \cdot x_{jl} = 1 \quad (243)$$

expresión a posteriori. Siendo banal la aplicación a priori en (238) y la ampliación o reducción por homotecia de razón k , lo que es infrecuente al no existir significación probabilística. Solo se persiguen criterios de calidad a partir de relaciones de comparación entre la magnitud de las figuras resultantes, según establezca el proyectista en función de las características del trabajo en presencia.

Sin embargo, en ocasiones puede ser ilustrativo trabajar con el hipercilindro que contenga la solución pseudoinversa de que se trate. Este será de la forma

$$x_p^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x_p = k_p^2 = \text{conocido} \quad (244)$$

siendo

$$x_p = S^+ \cdot A^T \cdot P \cdot K = \text{solución pseudoinversa conocida} \quad (245)$$

y las elipses sección serán de la forma

$$x_j \quad x_l \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{jj}^+ & \sigma_{jl}^+ \\ \sigma_{jl}^+ & \sigma_{ll}^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j \\ x_l \end{pmatrix} = k_p^2 \quad (246)$$

Es banal que puede generalizarse aún más estableciendo para cualquier solución inversa generalizada el hipercilindro

$$x_g^T \cdot \sigma_{xx}^- \cdot x_g = k_g^2 = \text{conocido} \quad (247)$$

$$x_g = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot K = \text{solución pseudoinversa conocida} \quad (248)$$

y las elipses sección

$$x_j \quad x_l \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{jj}^- & \sigma_{jl}^- \\ \sigma_{jl}^- & \sigma_{ll}^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j \\ x_l \end{pmatrix} = k_g^2 \quad (249)$$

Entendemos que existe no obstante un problema de interpretación no suficientemente investigado. Efectivamente, siendo el hipercilindro en general no canónico,

su sección por cualquier hiperplano coordenado generado por la pareja de ejes (Ox_j, Ox_l) será una elipse.

Pero se da la paradoja de que, contrariamente lo que sucede en los supuestos probabilísticos estudiados, es desfavorable que el hipercilindro presente la expresión canónica, pues $d = n - R(S)$ ejes serán paralelos a las direcciones generatrices y los planos secantes de que formen parte darán lugar a elipses degeneradas en pares de rectas paralelas²⁰ al tender a infinito uno de sus ejes. En situaciones próximas a la expuesta, la configuración de las elipses, de gran excentricidad, será muy desfavorable.

En cualquier caso, la utilidad de lo que antecede se pone de manifiesto especialmente si se trabaja con las dos zonas de distinta significación que anteriormente hemos definido como A y B, siendo A la correspondiente a los vértices a determinar y B los puntos de apoyo. *Y todo conduce a preferir el método de ajuste por Incrementos de Coordenadas con dos subredes, cuya geometría es perfectamente conocida y presenta un defecto de rango mínimo, $d = 1$, en cada una de ellas.*

La sensibilidad de la red puede estudiarse, obviamente, aplicando el algoritmo que antecede a la zona B, que se resuelve por una pseudoinversa. Las expresiones (243) tienen el significado de elipses de sensibilidad de la red.

En la red de la figura 2.8 del epígrafe 2.1, como explica el texto adjunto a esa figura, son inmediatas las elipses de sensibilidad de los vértices $V3$ y $V4$ correspondientes a la zona B, y la información no probabilística de cuatro puntos más a los cuatro que habíamos obtenido hasta ahora generados en la zona A es decir, $V1$ y $V2$. Y también las nuevas elipses, que llamaremos de transición, referidas a puntos

²⁰Su expresión será

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

la elipse degenera en las dos rectas paralelas $x = \pm a$

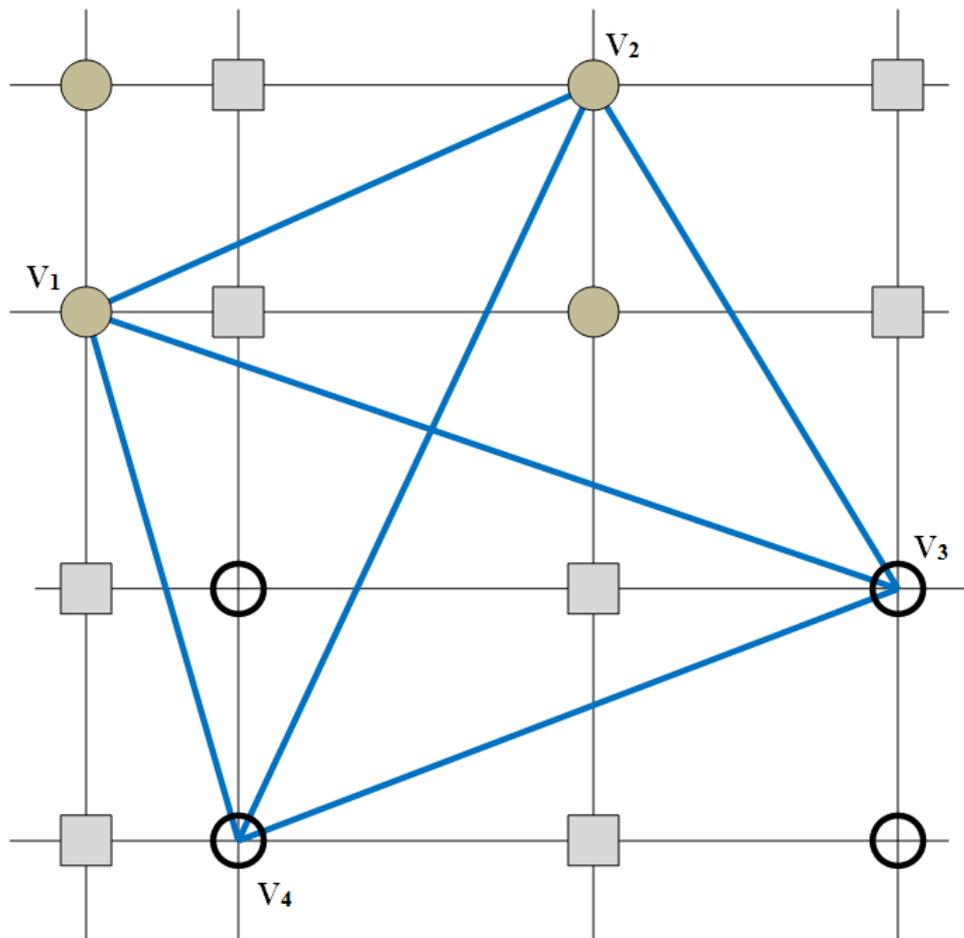


Figura 2.17: Densificación del plano del levantamiento

con abscisas procedentes de la zona A y ordenadas de la zona B y viceversa. No probabilística.

De tal manera que solo utilizando la primera técnica de densificación, de malla rectangular, sin rotación de ejes, se ha pasado de las 4 figuras básicas generadas por los dos vértices libres, agregando dos vértices correlativos, a 16 figuras de información y control de otros tantos puntos de la red.

Y un primer criterio en el esencial aspecto del poder de afirmación en la interpretación de sus resultados, parciales y finales es obvio. Las elipses de sensibilidad (zona B) deben ser de dimensiones y superficie inferior a las de error (zona A). Las de transición, intermedias. La calidad de la red será tanto mejor cuanto más homogéneos sean los tres grupos de elipses considerados por separado y cuanto menor sean las diferencias existentes entre cada uno de ellos y los otros dos.

Finalmente, utilizando técnicas de arco capaz puede llegar a obtenerse, sin mayor dificultad, doble y hasta triple información conceptualmente diferenciada sobre cualquier punto de la red o relacionable geoméricamente con ella según la metodología establecida.

En cuanto al resto, repetimos una vez más que como sucede en cualquier obra de Ingeniería de alto nivel, todo depende del buen hacer del proyectista y su mejor criterio. Y como ya dijimos, imposible de sustituir por un programa informático.

Capítulo 3

APLICACIÓN SOBRE LA RED DE LA UPV

3.1. Vértices iniciales

A continuación aplicaremos la teoría expuesta utilizando como ejemplo práctico una pequeña red de cuatro vértices, como lo hemos venido haciendo desde el principio de la presente disciplina, compensada por inversa recíproca generalizada por zonas de distinta significación. Consideraremos todos los casos posibles de densificación: vértices correlativos, pertenecientes al arco capaz y obtenidos por ejes oblicuos.

Partimos de la red calculada en el artículo “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”¹. Croquis de la red y coordenadas compensadas en cuadro y figura 3.1.

¹Publicado en la revista digital de la Real Academia de Cultura Valenciana: www.racv.es/racv-digital. Valencia, 2012.

Vértice	Coordenadas compensadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{V3}	167,5210 m
Y_{V3}	88,0114 m
X_{V4}	99,9999 m
Y_{V4}	99,9993 m

Cuadro 3.1: Coordenadas compensadas de la red

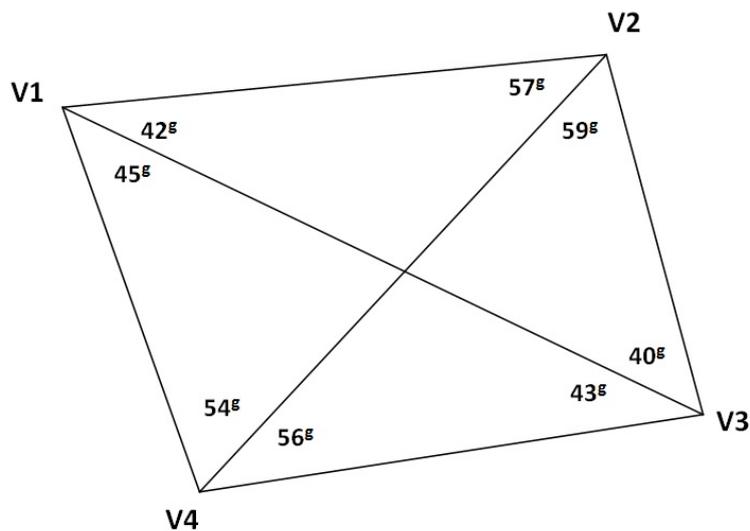


Figura 3.1: Croquis de la red

3.2. RECINTOS DE ERROR DE LOS VÉRTICES INICIALES

La red en estudio se ha calculado con solución inversa generalizada recíproca con zonas de distinta significación. Siempre existen dos zonas de muy distinta significación en cualquier red, a saber:

- La zona que llamaremos “A”, concernida por vértices libres V_1 y V_2 , de coordenadas a determinar .
- La zona “B”, de vértices o puntos de apoyo V_3 y V_4 , que se consideran fijos, cuyas coordenadas se entienden en principio invariables y conocidas a priori.

Según el artículo citado, recopilamos a continuación parámetros y matrices necesarios para obtener los recintos de error de los vértices de una y otra zona.

3.2.1. LA ZONA “A”

3.2.1.1. COORDENADAS DE LA ZONA “A”

Las coordenadas de la zona “A” son:

Vértice	Coordenadas
X_{V_1}	100,0004 <i>m</i>
Y_{V_1}	166,5963 <i>m</i>
X_{V_2}	163,0152 <i>m</i>
Y_{V_2}	154,2495 <i>m</i>

3.2.1.2. VARIANZA A PRIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD

El estimador de la varianza a priori de la subred 1 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas X es:

$$\sigma^2 = 2,5827 \cdot 10^{-7}$$

la desviación típica: $\sigma = 4,0927 \cdot 10^{-4} = 0,00041 \text{ m}$

El estimador de la varianza a priori de la subred 2 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas Y es:

$$\sigma^2 = 8,1904 \cdot 10^{-7}$$

la desviación típica: $\sigma = 0,0009 \text{ m}$

3.2.1.3. VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD

El estimador de la varianza a posteriori de la subred 1 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas X es:

$$\sigma_0^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m_1 + m_2 - n} = 1,6974 \cdot 10^{-7} = 1,7 \cdot 10^{-7}$$

la desviación típica: $\sigma = 4,1231 \cdot 10^{-4} = 0,00041 \text{ m}$

El estimador de la varianza a posteriori de la subred 2 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas Y es:

$$\sigma_0^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m_1 + m_2 - n} = 1,868 \cdot 10^{-6}$$

la desviación típica: $\sigma = 0,0014 \text{ m}$

3.2.1.4. MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”

Conocidas las matrices M de la subred 1 y de la subred 2: M_{11} , M_{12} , M_{21} y M_{22} calculadas en el epígrafe 2.4 del artículo de referencia², podemos obtener las matrices cofactor de los vértices de la zona “A” a partir de la conocida expresión:

$$Q_{x_a x_a} = M_{11}^{-1}$$

$$Q_{x_a x_a} = M_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2931 & 0,1439 \\ 0,1439 & 0,4591 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 1}$$

$$Q_{y_a y_a} = M_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4684 & 0,0395 \\ 0,0395 & 0,0699 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 2}$$

3.2.1.5. MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”

En la subred 1 la matriz varianza covarianza es:

² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre...”. Epígrafe 2.4. *Opus Cit.*

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_a x_a} = \begin{pmatrix} 0,497454042398561 & 0,244315435251555 \\ 0,244315435251555 & 0,779209385343674 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

En la subred 2 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_a y_a} = \begin{pmatrix} 0,875049760666387 & 0,073709532985295 \\ 0,073709532985295 & 0,130635982125522 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} m^2$$

3.2.1.6. SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “A”

Con el fin de conocer la probabilidad de que el vértice $V1$ compensado se encuentre dentro de su recinto de error y, a su vez el $V2$ se encuentre dentro del suyo simultáneamente³ es necesario conocer el hiperparalelepípedo como hipervolumen de error, en posición no canónica, constituido por los ejes σ_{xv1} , σ_{xv2} , σ_{yv1} y σ_{yv2} , en el sistema de referencia que situamos plano a plano y por parejas de ejes de coordenadas en el plano del levantamiento⁴. En nuestro ajuste será un hipervolumen de error de 4 dimensiones porque tenemos 4 variables libres, que recordamos son las correcciones: dx_{V1} , dy_{V1} , dx_{V2} , dy_{V2} , pertenecientes a la zona que hemos llamado “A”.

A partir de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{xx} y σ_{yy} , se sigue:

$$\sigma_{xv1} = \sqrt{0,4922 \cdot 10^{-7}} = 2,2186 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{xv2} = \sqrt{0,7709 \cdot 10^{-7}} = 2,7765 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv1} = \sqrt{0,8750 \cdot 10^{-6}} = 9,3541 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv2} = \sqrt{0,1306 \cdot 10^{-6}} = 3,6139 \cdot 10^{-4} m$$

Que constituyen los semilados de los rectángulos canónicos de error a partir de las elipses no canónicas.

³ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas”. Epígrafe 2.7.1. *Opus cit.*

⁴ Recordamos que el hiperparalelepípedo no tiene realidad física. Pero sus secciones por los planos coordenados de su espacio “ x ”, sí.

3.2.1.7. AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”

Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza σ_{xx} y σ_{yy} , se encuentran en cuadros sucesivos ⁵:

-0,8659	0,5002
0,5002	0,8659

Cuadro 3.2: Matriz de autovectores Γ_1 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{xx} de la subred 1

0,0976	-0,9952
-0,9952	0,0976

Cuadro 3.3: Matriz de autovectores Γ_2 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{yy} de la subred 2

$\mu_{\sigma^2_{xv1}} = 0,3525 \cdot 10^{-7}$	0
0	$\mu_{\sigma^2_{xv2}} = 0,9106 \cdot 10^{-7}$

Cuadro 3.4: Matriz $V_1 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{xx} de la subred 1

$\mu_{\sigma^2_{yv1}} = 0,8823 \cdot 10^{-6}$	0
0	$\mu_{\sigma^2_{yv2}} = 0,1234 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.5: Matriz $V_2 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{yy} de la subred 2

⁵ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas”. Epígrafe 2.7.1. *Opus cit.*

3.2.1.8. SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES

Aplicar una rotación a los semiejes no canónicos (obtenidos a partir de σ_{xx} y σ_{yy} , como hemos visto) hasta su posición canónica⁶ según la expresión:

$$\sigma_{zz} = \Gamma^T \cdot \sigma_{xx} \cdot \Gamma$$

siendo

Γ = matriz de autovectores columna de σ_{xx} y σ_{yy}

$\sigma_{zz} = V$ = matriz diagonal de autovalores de σ_{xx} y σ_{yy}

nos permite conocer los semiejes del hiperelipsoide de error inscrito en el hiperparalelepípedo en el sistema canónico σ_{zz} . Así, a partir de las matrices V de autovalores obtenemos:

$$\sigma_{x'v1} = a_{v4} = \sqrt{0,3525 \cdot 10^{-7}} = 1,8775 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{x'v2} = b_{v4} = \sqrt{0,9106 \cdot 10^{-7}} = 3,0176 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{y'v1} = a_{v1} = \sqrt{0,8823 \cdot 10^{-6}} = 9,3931 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{y'v2} = b_{v1} = \sqrt{0,1234 \cdot 10^{-6}} = 3,5128 \cdot 10^{-4} m$$

Si comparamos estos semiejes con los semilados del epígrafe 3.2.1.6, la diferencia entre la posición canónica con la no canónica, es de 1 y 2 décimas de milímetro.

Es la posición canónica la que nos permite calcular la fiabilidad conjunta con varios vértices libres, pero en el caso presente, para estudiar los recintos de error es aconsejable estudiar la matriz de autovectores conjunta Γ de σ_{xx} , y σ_{yy} , cfr. cuadro 3.6,

⁶Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". Epígrafe 2.7.1. *Opus cit.*

-0,8659	0,5002	0	0
0,5002	0,8659	0	0
0	0	0,0976	-0,9952
0	0	-0,9952	0,0976

Cuadro 3.6: Matriz de autovectores Γ de la matriz varianza covarianza total de las variables

donde comprobamos que dos autovectores con todos sus componentes nulos menos dos indica que sus autovalores correspondientes están sobre un mismo hiperplano coordenado, también los semiejes del hiperelipsoide que correspondan, y por lo tanto, la elipse que definen. Comprobamos que la rotación de los ejes del hipervolumen de error hasta su posición canónica mantiene las figuras de error dentro del plano del levantamiento, y no las proyecta fuera de él. En este caso es inmediato deducir una figura de error, en general no canónica y con realidad física (en concreto el rectángulo) asociada a cada punto de la zona “A”. Es lícito girar elipses y rectángulos hasta posición canónica y aplicar Análisis Multivariante con variables separadas.

3.2.1.9. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

El Análisis Multivariante se puede aplicar directamente, sin transformación alguna a los parámetros de error no canónicos porque sus dimensiones son muy próximas a las de los parámetros canónicos. Lo importante es que la relación entre ejes canónicos y mal llamados no canónicos (en realidad, desviaciones típicas, según teoría) es aceptable, resultando próxima a 1 en todos los casos (cfr. (3) en el cuadro 3.7). Por otra parte, todas las figuras de error resultantes son bidimensionales, y pueden situarse sobre el plano del levantamiento.

	Semieje/ semilado	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$
(1)	Semieje elipse ^a	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$
(2)	Semilado ^b	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
(3)	(2)/(1)	$\frac{2,2186}{1,8775} = 1,18$	$\frac{9,3541}{9,3931} = 0,9958$	$\frac{2,7765}{3,0176} = 0,9201$	$\frac{3,6139}{3,5128} = 1,029$
(4)	Semilado corregido	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
(5)	Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$
(6)	$K = 3, n = 4, P = 98,96\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$
(7)	$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$

Cuadro 3.7: Recintos de error de los vértices V1 y V2

^aEquivale a la raíz del autovalor.

^bCoordenadas en valor absoluto de las intersecciones con los ejes Oxy de las tangentes a la elipse no canónica paralelos a ellos.

Recordamos⁷ que para evitar que el área/volumen de la podaria/hiperpodaria supere al del rectángulo/hiperparalelepípedo y siendo las longitudes de los semiejes arbitrarios a y b de elipse/hiperelipsoide:

$$a = b \cdot \operatorname{tg} 71,25^\circ = b \cdot 2,06$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} 28,75^\circ = b \cdot 0,48$$

deberá cumplirse

$$0,48 = \operatorname{tg} 28,75^\circ < \frac{a}{b} < \operatorname{tg} 71,25^\circ = 2,06$$

con óptimo en $\frac{a}{b} = 1 = \operatorname{tg} 50^\circ$, caso círculo \equiv elipse.

La relación entre los semilados $a = x_i = \sigma x_{vi}$ y $b = y_i = \sigma y_{vi}$ (cfr. (4) en el cuadro 3.7) del recinto rectangular de error de cada vértice se cumple, con la excepción del semilado del semieje x_1 , lo sustituimos por el valor del semilado y_1 dividido por 2, lo que equivale a ampliar el recinto de error, resultando:

$$\frac{9,3541 \cdot 10^{-4}}{2} = 4,6771 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Multiplicamos por dos cada semilado (cfr. (5) en el cuadro 3.7) para obtener el lado del rectángulo de error. Siendo la relación entre ejes canónicos y lados próxima a 1, preferimos elegir los lados porque siempre están sobre el plano del levantamiento, con evidente realidad física (además, en este caso los no canónicos también están en el plano del levantamiento).

A partir de la expresión⁸:

$$P_{RK\sigma zn} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K]^n$$

calculamos el porcentaje de fiabilidad multivariante $P_{nRK\sigma z}$ de los dos vértices libres de la red.

En nuestro caso $n = 4$, tenemos 4 variables:

⁷Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". Epígrafe 1.3.3.2. *Opus cit.*

⁸Conocida por la teoría expuesta en M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". Epígrafe 1.2.2, ecuación (97). *Opus cit.*

$$\sigma_{x_{v1}}, \sigma_{y_{v1}}, \sigma_{x_{v2}} \text{ y } \sigma_{y_{v2}}$$

La probabilidad asociada a los rectángulos de error de los vértices $V1$ y $V2$, para $n = 4$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ es:

$$P_{RK\sigma_{zn}} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K)]^n = (2 \cdot 0,4987)^4 = 0,9974^4 = 0,9896 = 98,96\%$$

98,96% es la probabilidad simultánea de que los vértices exactos y desconocidos $V1$ y $V2$ se encuentren en sus rectángulos de error, cuyos centros son las coordenadas compensadas de sus vértices respectivos tras el ajuste de las subredes, (cfr. (6) en el cuadro 3.7).

Es evidente que la selección de los elementos de cruce de las q filas y q columnas elegidas en la matriz varianza covarianza cuadrada de orden n inicial σ_{xx} y σ_{yy} modifica la superficie de error de los vértices de que se trate, debido a la influencia de otros vértices. Al estudiar la probabilidad de ubicación del vértice exacto $V1$ en solitario en su recinto de error es diferente a la de ese mismo vértice considerando los vértices $V1$ y $V2$ simultáneamente, resultando que:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 2^q \cdot [(N(0, 1)_0^K)]^q$$

siendo $n = 2$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 0,9974^2 = 0,9948 = 99,48\% \quad (\text{cfr. (7) en el cuadro 3.7}).$$

Con la pretensión de comparar los recintos de error canónicos y no canónicos de los vértices $V1$ y $V2$, hacemos los cálculos que siguen.

Unimos las dos matrices varianza covarianza σ_{xx} , obtenidas a partir de los ajustes independientes de las subredes, tenemos:

$\sigma_{x_{v1}}^2 = 0,4922 \cdot 10^{-7}$	$\sigma_{x_{v1}\sigma_{x_{v2}}} = 0,2417 \cdot 10^{-7}$	0	0
$\sigma_{x_{v1}\sigma_{x_{v2}}} = 0,2417 \cdot 10^{-7}$	$\sigma_{x_{v2}}^2 = 0,7709 \cdot 10^{-7}$	0	0
0	0	$\sigma_{y_{v1}}^2 = 0,8750 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{y_{v1}\sigma_{y_{v2}}} = 0,0737 \cdot 10^{-6}$
0	0	$\sigma_{y_{v1}\sigma_{y_{v2}}} = 0,0737 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{y_{v2}}^2 = 0,1306 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.8: Matriz varianza covarianza total de las variables σ_{xx}

Y la matriz de los autovalores σ_{zz} de la matriz varianza covarianza total σ_{xx} será:

$\mu_{\sigma^2 x'v1} = 0,3525 \cdot 10^{-7}$	0	0	0
0	$\mu_{\sigma^2 x'v2} = 0,9106 \cdot 10^{-7}$	0	0
0	0	$\mu_{\sigma^2 y'v1} = 0,8823 \cdot 10^{-6}$	0
0	0	0	$\mu_{\sigma^2 y'v2} = 0,1234 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.9: Matriz σ_{zz} de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{xx}

Siguiendo la figura 2.3, del epígrafe 2.1, la elipse no canónica está inscrita en un rectángulo de lados $2 \cdot \sigma_x$ y $2 \cdot \sigma_y$, y la elipse canónica inscrita en un rectángulo de lados $2 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'vi}}$ y $2 \cdot b = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'vi}}$.

En nuestro caso tenemos dos elipses no canónicas, para los vértices $V1$ y $V2$, y sus rectángulos son:

- Rectángulo circunscrito a elipse no canónica R_{V1} de lados:

$$l_{1-V1} = 2 \cdot \sigma_{xv1} = 2 \cdot 4,6771 \cdot 10^{-4} = 9,3541 \cdot 10^{-4} m$$

$$l_{2-V1} = 2 \cdot \sigma_{yv1} = 2 \cdot 9,3541 \cdot 10^{-4} m = 0,001870 m$$

- Rectángulo circunscrito a elipse no canónica R_{V2} de lados:

$$l_{1-V2} = 2 \cdot \sigma_{xv4} = 2 \cdot 2,7765 \cdot 10^{-4} m = 5,5530 \cdot 10^{-4} m$$

$$l_{2-V2} = 2 \cdot \sigma_{yv4} = 2 \cdot 3,6139 \cdot 10^{-4} m = 7,2278 \cdot 10^{-4} m$$

Y también dos elipses canónicas, para los vértices $V1$ y $V2$, y sus rectángulos son:

- Rectángulo circunscrito a elipse canónica R'_{V1} de lados:

$$l'_{1-V1} = 2 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v1}} = 2 \cdot 4,6771 \cdot 10^{-4} = 9,3541 \cdot 10^{-4} m$$

(siendo $4,6771 \cdot 10^{-4}$ el semilado corregido, según páginas anteriores)

$$l'_{2-V1} = 2 \cdot b = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v1}} = 2 \cdot 9,3931 \cdot 10^{-4} = 0,001879 \text{ m}$$

- Rectángulo circunscrito a elipse canónica R'_{V2} de lados:

$$l'_{1-V2} = 2 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v2}} = 2 \cdot 3,0176 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 6,0352 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$l'_{2-V2} = 2 \cdot b = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v2}} = 2 \cdot 3,5128 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 7,0256 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Si comparamos ambos rectángulos de error (con elipses canónicas y no canónicas) podemos ver que las diferencias son muy pequeñas. Y aplicando análisis multivariante, las fiabilidades asociadas a los lados del rectángulo R'_{V1} del vértice libre $V1$, y del rectángulo R'_{V2} del vértice libre $V2$, secciones del hiperparalelepípedo circunscrito al hiperelipsoide canónico de error, son:

- siendo $K = 3$, $n = 4 \implies$

$$\implies P_{RK\sigma zn} = 2^4 \cdot [(N(0,1)_0^3]^4 = (2 \cdot 0,4987)^4 = 0,9974^4 = 98,96 \%$$

$$l'_{1-V1} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v1}} \cdot K = 0,0028 \text{ m}$$

$$l'_{2-V1} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v1}} \cdot K = 0,0056 \text{ m}$$

$$l'_{1-V4} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v2}} \cdot K = 0,0018 \text{ m}$$

$$l'_{2-V4} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v2}} \cdot K = 0,0021 \text{ m}$$

Que podemos comparar con lados de los rectángulos secciones del hiperparalelepípedo circunscrito al hiperelipsoide no canónico de error, con la misma fiabilidad, calculados en el cuadro 3.7:

- siendo $K = 3$, $n = 4$

$$\implies P_{RK\sigma zn} = 2^4 \cdot [(N(0,1)_0^3]^4 = (2 \cdot 0,4987)^4 = 0,9974^4 = 98,96 \%$$

$$l_{1-V1} = 0,0028 \text{ m}$$

$$l_{2-V1} = 0,0057 \text{ m}$$

$$l_{1-V4} = 0,0017 \text{ m}$$

$$l_{2-V4} = 0,0022 \text{ m}$$

3.2.2. LA ZONA “B”

3.2.2.1. COORDENADAS DE LA ZONA “B”

Las coordenadas de la zona “B” son:

Vértice	Coordenadas
X_{V3}	167,5210 m
Y_{V3}	88,0114 m
X_{V4}	99,9999 m
Y_{V4}	99,9993 m

3.2.2.2. MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”

Conocidas las matrices M de la subred 1 y de la subred 2: M_{11} , M_{12} , M_{21} y M_{22} calculadas en el epígrafe 2.4 del artículo de referencia⁹, podemos obtener las matrices cofactor de los vértices de la zona “B” a partir de la conocida expresión:

$$Q_{x_b x_b} = (M_{22} - M_{21} \cdot M_{11}^{-1} \cdot M_{12})^+ = S_b^+$$

$$Q_{x_b x_b} = \begin{pmatrix} 0,0875 & -0,0875 \\ -0,0875 & 0,0875 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 1}$$

$$Q_{y_b y_b} = \begin{pmatrix} 0,0451 & -0,0451 \\ -0,0451 & 0,0451 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 2}$$

3.2.2.3. MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”

En la subred 1 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_b x_b} = \begin{pmatrix} 0,1470 & -0,1470 \\ -0,1470 & 0,1470 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

⁹ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre...”. Epígrafe 2.4. *Opus Cit.*

En la subred 2 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_b y_b} = \begin{pmatrix} 0,8419 & -0,8419 \\ -0,8419 & 0,8419 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

3.2.2.4. SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “B”

A partir de la matriz varianza covarianza de las variables de la zona “B” σ_{xx} y σ_{yy} , se sigue:

$$\sigma_{xv3} = \sqrt{0,1470 \cdot 10^{-7}} = 2,90155 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{xv4} = \sqrt{0,1470 \cdot 10^{-7}} = 2,90155 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv3} = \sqrt{0,8419 \cdot 10^{-7}} = 1,2124 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv4} = \sqrt{0,8419 \cdot 10^{-7}} = 1,2124 \cdot 10^{-4} m$$

Que constituyen los semilados de los rectángulos canónicos de error a partir de las elipses no canónicas.

3.2.2.5. AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”

Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza σ_{xx} y σ_{yy} , se encuentran en cuadros sucesivos:

-0,7071	-0,7071
-0,7071	0,7071

Cuadro 3.10: Matriz de autovectores Γ_1 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{xx} de la subred 1

-0,7071	-0,7071
-0,7071	0,7071

Cuadro 3.11: Matriz de autovectores Γ_2 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{yy} de la subred 2

$\mu_{\sigma^2 xv3} = 0$	0
0	$\mu_{\sigma^2 xv4} = 0,2940 \cdot 10^{-7}$

Cuadro 3.12: Matriz $V_1 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{xx} de la subred 1

$\mu_{\sigma^2 yv3} = 0$	0
0	$\mu_{\sigma^2 yv4} = 0,1684 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.13: Matriz $V_2 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{yy} de la subred 2

3.2.2.6. SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES

Los semiejes del hiperelipsoide de error inscrito en el hiperparalelepípedo en el sistema canónico σ_{zz} . Así, a partir de las matrices V de autovalores obtenemos:

$$\sigma_{x'v3} = a_{v4} = \sqrt{0} = 0 \text{ m}$$

$$\sigma_{x'v4} = b_{v4} = \sqrt{0,2940 \cdot 10^{-7}} = 1,7146 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_{y'v3} = a_{v1} = \sqrt{0} = 0 \text{ m}$$

$$\sigma_{y'v4} = b_{v1} = \sqrt{0,1684 \cdot 10^{-6}} = 4,1037 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Como debía ser, el recinto de error definido por el hiperelipsoide canónico tiene dos semiejes nulos, que provienen de la solución pseudoinversa, degenerando así en un hipercilindro recto, según sabemos.

Ante esta situación, que se repetirá siempre que la solución sea la pseudoinversa, recurriremos en su momento a aplicar el epígrafe 2.3, que nos permitirá extraer conclusiones generales para la densificación a partir de los vértices de la zona "B".

Capítulo 4

DENSIFICACIÓN DE LA RED DE LA UPV

A partir de las coordenadas compensadas de la zona “A” de la red en estudio densificaremos con:

- los puntos correlativos,
- puntos pertenecientes al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$ sobre la alineación de los vértices $V1V2$,
- y cualquier punto que interese al proyectista.

A partir de las coordenadas compensadas de la zona “B” de la red en estudio densificaremos con:

- los puntos correlativos, sin información probabilística.

A partir de las coordenadas compensadas de la zona “A” y de la zona “B” conjuntamente densificaremos con:

- los puntos con abscisas procedentes de la zona “A” y ordenadas de la zona “B” y viceversa, sin información probabilística.

4.1. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “A”

Los puntos correlativos, según la teoría expuesta en el epígrafe 2.1 serán los vértices V_5 y V_6 de coordenadas:

Vértice	Coordenadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{V5}	100,0004 m
Y_{V5}	154,2495 m
X_{V6}	163,0152 m
Y_{V6}	166,5963 m

Cuadro 4.1: Vértices de la zona “A” V_1 y V_2 y vértices correlativos V_5 y V_6 .

4.1.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

En el cuadro 4.2 definimos los recintos de error de cada uno de los vértices en estudio¹.

La probabilidad asociada a los rectángulos de error de los vértices V_1 , V_2 , V_5 , y V_6 , para $n = 8$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ es:

$$P_{RK\sigma zn} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K]^n = (2 \cdot 0,4987)^8 = 0,9974^8 = 0,9794 = 97,94\%$$

97,94% es la probabilidad simultánea de que los vértices exactos V_1 , V_2 , V_5 y V_6 se encuentren en sus rectángulos de error, cuyos centros son las coordenadas compensadas de sus vértices respectivos.

¹Según los datos del ejemplo del epígrafe 2.4.2.8 de M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET AL., “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”, *Opus cit.*

Es evidente que la selección de los elementos de cruce de las q filas y q columnas elegidas en la matriz varianza covarianza cuadrada de orden n inicial σ_{xx} y σ_{yy} modifica la superficie de error de los vértices de que se trate, debido a la influencia de otros vértices. Al estudiar la probabilidad de ubicación del vértice exacto $V1$ en solitario en su recinto de error es diferente a la de ese mismo vértice considerando los vértices $V1$, $V2$, $V5$, y $V6$ simultáneamente, resultando que:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 2^q \cdot \left[(N(0,1))_0^K \right]^q$$

siendo $n = 2$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 0,9974^2 = 0,9948 = 99,48\%$$

4.2. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS PERTENECIENTES AL ARCO CAPAZ DE $\frac{\pi}{2}$ SOBRE LA BASE DEFINIDA POR LOS VÉRTICES $V1 V2$

Un punto perteneciente al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$ sobre la base definida por los vértices $V1$ y $V2$, según la teoría expuesta en el epígrafe 2.1 puede ser el vértices VM , de azimutes:

$$\text{Azimut de } V1 M = \theta_{V1M} = \frac{\pi}{2} - \delta = 100^g - 50^g = 50^g$$

$$\text{Azimut de } V2 M = \theta_{V2M} = 2 \cdot \pi - \delta = 400^g - 50^g = 350^g$$

por intersección directa virtual desde la base $V1V2$ de coordenadas conocidas, obtenemos el vértice V_M :

Semiejes/ semilados	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$	$x_5 = \sigma x_{v5}$	$y_5 = \sigma y_{v5}$	$x_6 = \sigma x_{v6}$	$y_6 = \sigma y_{v6}$
Semieje elipse	$1, 8775 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3931 \cdot 10^{-4} m$	$3, 0176 \cdot 10^{-4} m$	$3, 5128 \cdot 10^{-4} m$	$1, 8775 \cdot 10^{-4} m$	$3, 5128 \cdot 10^{-4} m$	$3, 0176 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3931 \cdot 10^{-4} m$
Semilados	$2, 2186 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3541 \cdot 10^{-4} m$	$2, 7765 \cdot 10^{-4} m$	$3, 6139 \cdot 10^{-4} m$	$2, 2186 \cdot 10^{-4} m$	$3, 6139 \cdot 10^{-4} m$	$2, 7765 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3541 \cdot 10^{-4} m$
Semilados corregidos	$4, 6771 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3541 \cdot 10^{-4} m$	$2, 7765 \cdot 10^{-4} m$	$3, 6139 \cdot 10^{-4} m$	$4, 6771 \cdot 10^{-4} m$	$3, 6139 \cdot 10^{-4} m$	$2, 7765 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3541 \cdot 10^{-4} m$
Lado del rectángulo	$9, 3541 \cdot 10^{-4} m$	$0, 0019 m$	$5, 5530 \cdot 10^{-4} m$	$7, 2278 \cdot 10^{-4} m$	$9, 3541 \cdot 10^{-4} m$	$7, 2278 \cdot 10^{-4} m$	$5, 5530 \cdot 10^{-4} m$	$0, 0019 m$
$K = 3, n = 8, P = 97, 94 \%$	$0, 0028 m$	$0, 0057 m$	$0, 0017 m$	$0, 0022 m$	$0, 0028 m$	$0, 0022 m$	$0, 0017 m$	$0, 0057 m$
$K = 3, n = 2, P = 99, 48 \%$	$0, 0028 m$	$0, 0057 m$	$0, 0017 m$	$0, 0022 m$	$0, 0028 m$	$0, 0022 m$	$0, 0017 m$	$0, 0057 m$

Cuadro 4.2: Recintos de error y fiabilidades asociadas de los vértices principales y correlativos, V1, V2, V5, y V6

Vértice	Coordenadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{VM}	125,33439 m
Y_{VM}	128,91550 m

Cuadro 4.3: Vértices de la zona "A" $V1$ y $V2$ y el vértice del arco capaz VM .

4.2.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

En la subred 1 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_a x_a} = \begin{pmatrix} 0,497454042398561 & 0,244315435251555 \\ 0,244315435251555 & 0,779209385343674 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

En la subred 2 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_a y_a} = \begin{pmatrix} 0,875049760666387 & 0,073709532985295 \\ 0,073709532985295 & 0,130635982125522 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} m^2$$

La matriz varianza covarianza total será:

$$\sigma_{xyxy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_{V1}y_{V1}x_{V2}y_{V2}} = \begin{pmatrix} 0,497 & 0 & 0,244 & 0 \\ 0 & 8,750 & 0 & 0,737 \\ 0,244 & 0 & 0,779 & 0 \\ 0 & 0,737 & 0 & 1,306 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

La inversa de la matriz varianza covarianza total será:

$$\sigma_{xyxy}^{-1} = \begin{pmatrix} 2,3761 & 0 & -0,7450 & 0 \\ 0 & 0,1200 & 0 & -0,0677 \\ -0,7450 & 0 & 1,5169 & 0 \\ 0 & -0,0677 & 0 & 0,8037 \end{pmatrix} \cdot 10^7 m^2$$

Aplicando la expresión (109):

$$\begin{aligned}
 & [(x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \operatorname{sen} \delta) \cdot \cos \delta \quad (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \operatorname{sen} \delta) \cdot \operatorname{sen} \delta \quad (x_M \cdot \\
 & \quad \cdot \operatorname{sen} \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \operatorname{sen} \delta \quad (-x_M \cdot \operatorname{sen} \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \operatorname{sen} \delta) \cdot \cos \delta \\ (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \operatorname{sen} \delta) \cdot \operatorname{sen} \delta \\ (x_M \cdot \operatorname{sen} \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \operatorname{sen} \delta \\ (-x_M \cdot \operatorname{sen} \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2
 \end{aligned}$$

Con $\cos \delta = \operatorname{sen} \delta$ se simplifica la expresión (109):

$$\begin{aligned}
 & [(x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \quad (x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \quad (x_M - y_M) \cdot \cos^2 \delta \quad (-x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta]. \\
 & \cdot \begin{pmatrix} 2,3761 & 0 & -0,7450 & 0 \\ 0 & 0,1200 & 0 & -0,0677 \\ -0,7450 & 0 & 1,5169 & 0 \\ 0 & -0,0677 & 0 & 0,8037 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{pmatrix} (x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \\ (x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \\ (x_M - y_M) \cdot \cos^2 \delta \\ (-x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \end{pmatrix} = \\
 & \quad = C^2
 \end{aligned}$$

Y operando se sigue

$$x_M^2 \cdot 0,86553 \cdot 10^7 + y_M^2 \cdot 1,35428 \cdot 10^7 - 2 \cdot x_M \cdot y_M \cdot \left(\frac{-0,043872}{2} \right) \cdot 10^7 = C^2$$

elipse con centro en el origen de coordenadas, como debía ser. Hemos comprobado que obtenemos la misma elipse aplicando la ecuación (224).

La ecuación de la elipse genérica es:

$$\frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \cdot (x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy}) = C^2$$

$$x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} - C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$$

Comparando la ecuación standard de la elipse

$$x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} - (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$$

con la del punto M , proveniente de la ecuación (109), obtenemos los valores de las varianzas σ_y^2 , σ_x^2 , y la covarianza σ_{xy} , siendo el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas el que sigue:

$$\frac{0,8646 \cdot 10^7}{\sigma_y^2} = \frac{0,3854 \cdot 10^7}{\sigma_x^2} = \frac{-0,1893 \cdot 10^7}{\sigma_{xy}} = \frac{C^2}{C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} = \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}$$

Cuya solución es:

$$\sigma_y^2 = 6,4909 \cdot 10^{-8} \implies \sigma_y = 2,5477 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_x^2 = 1,1570 \cdot 10^{-7} \implies \sigma_x = 3,4015 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_{xy} = -3,2901 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Valores que guardan una perfecta relación con los de las elipses de error de los vértices $V1$ y $V2$.

En el cuadro 4.4 definimos los recintos de error de cada uno de los vértices en estudio.

La probabilidad asociada a los rectángulos de error de los vértices $V1$, $V2$ y VM , para $n = 6$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ es:

$$P_{RK\sigma_{zn}} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K)]^n = (2 \cdot 0,4987)^6 = 0,9974^6 = 0,9845 = 98,45\%$$

99,45% es la probabilidad simultánea de que los vértices exactos $V1$, $V2$ y VM se encuentren en sus rectángulos de error, cuyos centros son las coordenadas compensadas de sus vértices respectivos.

La probabilidad de ubicación del vértice exacto $V1$ en solitario en su recinto de error es diferente a la de ese mismo vértice considerando los vértices $V1$, $V2$, y VM simultáneamente, resultando que:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 2^q \cdot [(N(0, 1)_0^K)]^q$$

siendo $n = 2$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ la probabilidad de un vértice en solitario es:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 0,9974^2 = 0,9948 = 99,48\%$$

$$\sigma_y^2 = 6,4909 \cdot 10^{-8} \implies \sigma_y = 2,5477 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_x^2 = 1,1570 \cdot 10^{-7} \implies \sigma_x = 3,4015 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{xy} = -3,2901 \cdot 10^{-9} m$$

4.3. DENSIFICACIÓN CON UN PUNTO CUALQUIERA EN REFERENCIA AL CASO TEÓRICO DE EJES OBLICUOS

Definimos un punto próximo a los vértices conocidos $V1$ y $V2$, podría ser el punto VL , de coordenadas conocidas:

Semiejes/ semilados	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$	$x_M = \sigma x_{vM}$	$y_M = \sigma y_{vM}$
Semieje elipse	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$		
Semilados	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$3,4015 \cdot 10^{-4} m$	$2,5477 \cdot 10^{-4} m$
Semilados corregidos	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$3,4015 \cdot 10^{-4} m$	$2,5477 \cdot 10^{-4} m$
Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$	$6,8030 \cdot 10^{-4} m$	$5,0954 \cdot 10^{-4} m$
$K = 3, n = 6, P = 98,45\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0020 m$	$0,0015 m$
$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0020 m$	$0,0015 m$

Cuadro 4.4: Recintos de error y fiabilidades asociadas de los vértices $V1$, $V2$ y del vértice VM perteneciente al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$

Vértice	Coordenadas
X_{VL}	125,33439 m
Y_{VL}	180 m

4.3.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

Siguiendo la metodología para el caso de densificación con ejes oblicuos, expuesto en el epígrafe 2.2, obtenemos los recintos de error y fiabilidades del vértice L , que se pueden encontrar en el cuadro 4.5. Asimismo podríamos conocer los recintos de error y fiabilidades de cualquier otro punto del plano del levantamiento.

Sean las coordenadas de los vértices $V1$, $V2$ y VL :

Vértice	Coordenadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{VL}	125,33439 m
Y_{VL}	180 m

A partir de las coordenadas anteriores calculamos los ángulos δ , γ , y θ :

$$m_{V1-VL} = tg(\delta) = \frac{Y_{VL}-Y_{V1}}{X_{VL}-X_{V1}} = \frac{180-166,5963}{125,33439-100,0004} = \frac{13,4037}{25,3340} = 0,4866$$

$$\delta = \mathbf{30,980443^g}$$

$$m_{V2-VL} = tg(\gamma + \frac{\pi}{2}) = \frac{Y_{VL}-Y_{V2}}{X_{VL}-X_{V2}} = \frac{180-154,2495}{125,33439-163,0152} = \frac{25,750499}{-37,68081} = -0,6834 = -\frac{1}{tg\gamma}$$

$$-0,6834 = -\frac{1}{tg\gamma}$$

$$tg(\gamma) = \frac{1}{0,6834} = 1,4633$$

$$\gamma = 61,835427^g$$

El ángulo entre los ejes oblicuos será:

$$\theta = 100^g + 30,980443^g - 61,835427^g = 69,145015^g$$

$$\theta = 69,145015^g$$

Aplicando la expresión (224) obtendremos los semilados del recinto de error del vértice L :

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2$$

Siendo para el vértice L :

$$\Delta = x_L'' = x_L \cdot \cos \gamma + y_L \cdot \sen \gamma$$

$$\Gamma = y_L'' = -x_L \cdot \sen \gamma + y_L \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3761 & 0 & -0,7450 & 0 \\ 0 & 0,1200 & 0 & -0,0677 \\ -0,7450 & 0 & 1,5169 & 0 \\ 0 & -0,0677 & 0 & 0,8037 \end{pmatrix} \cdot 10^7$$

Desarrollamos la expresión (224):

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma) \cdot$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2$$

Y después de un cálculo realmente prolijo, se obtiene

$$x_L^2 \cdot 1,8921 \cdot 10^7 + y_L^2 \cdot 5,1298 \cdot 10^7 + x_L \cdot y_L \cdot 1,2754 \cdot 10^7 - C^2 = 0$$

$$x_L^2 \cdot 1,8921 \cdot 10^7 + y_L^2 \cdot 5,1298 \cdot 10^7 - 2 \cdot x_L \cdot y_L \cdot (-0,63770 \cdot 10^7) - C^2 = 0$$

Que nos permite calcular el recinto de error del vértice VL , como hicimos en el epígrafe 4.2.1. Las varianzas y la covarianza son:

$$\sigma_y^2 = 7,3548 \cdot 10^{-8} \implies \sigma_y = 2,7120 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_x^2 = 5,1110 \cdot 10^{-8} \implies \sigma_x = 2,2608 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_{xy} = -1,0994 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

En la tabla 4.5 se recogen los recintos de error y sus fiabilidades, conjuntas y por separado.

4.4. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “B”

Los puntos correlativos $V7$ y el $V8$ carecen de información probabilística. Adjuntamos sus correcciones diferenciales y las raíces de sus varianzas, porque también pueden ser útiles en el proceso de densificación planimétrica.

Semiejes/ semilados	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$	$x_L = \sigma x_{vL}$	$y_L = \sigma y_{vL}$
Semieje elipse	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$		
Semilados	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$2,2608 \cdot 10^{-4} m$	$2,7120 \cdot 10^{-4} m$
Semilados corregidos	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$2,2608 \cdot 10^{-4} m$	$2,7120 \cdot 10^{-4} m$
Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$	$4,5216 \cdot 10^{-4} m$	$5,424 \cdot 10^{-4} m$
$K = 3, n = 6, P = 98,45\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0014 m$	$0,0016 m$
$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0014 m$	$0,0016 m$

Cuadro 4.5: Recintos de error y fiabilidades asociadas de los vértices V1, V2 y VL

Vértice	Coordenadas compensadas	Correcciones diferenciales dx	Semilados de los rectángulos de error
X_{V3}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V3}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V4}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V4}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V7}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V7}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V8}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V8}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$

Cuadro 4.6: Coordenadas de los vértices libres $V3$ y $V4$ y sus correlativos $V7$ y $V8$

4.5. DENSIFICACIÓN CON PUNTOS CON ABSCISAS PROCEDENTES DE LA ZONA “A” Y ORDENADAS DE LA ZONA “B” Y VICEVERSA

A partir de las coordenadas compensadas de los vértices de la zona “A”: $V1$ y $V2$ y de la zona “B”: $V3$ y $V4$, del cuadro 4.7:

Vértice	Coordenadas compensadas	Correcciones diferenciales dx	Semilados de los rectángulos de error
X_{V1}	100,0004 m	$0,2960 \cdot 10^{-3} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V1}	166,5963 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$
X_{V2}	163,0152 m	$0,4405 \cdot 10^{-3} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V2}	154,2495 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
X_{V3}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V3}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V4}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V4}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$

Cuadro 4.7: Coordenadas compensadas de la red

obtenemos las coordenadas de 8 vértices virtuales: $V9$, $V10$, $V11$, $V12$, $V13$, $V14$, $V15$, y $V16$. Nuevamente adjuntamos sus correcciones diferenciales y las raíces de sus varianzas para tener más información sobre ellos.

Vértice	Coordenadas compensadas	Correcciones diferenciales dx	Semilados de los rectángulos de error
X_{V9}	100,0004 m	$0,2960 \cdot 10^{-3} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V9}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V10}	100,0004 m	$0,2960 \cdot 10^{-3} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V10}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V11}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V11}	154,2495 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
X_{V12}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V12}	166,5963 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$
X_{V13}	163,0152 m	$0,4405 \cdot 10^{-3} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V13}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V14}	163,0152 m	$0,4405 \cdot 10^{-3} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V14}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V15}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V15}	154,2495 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
X_{V16}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V16}	166,5963 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$

Cuadro 4.8: Coordenadas de los puntos con abscisas procedentes de la zona “A” y ordenadas de la zona “B” y viceversa

Puede ser ilustrativo trabajar con el hipercilindro que contenga la solución pseudoinversa de que se trate. Este será de la forma, según expresión (244):

$$x_p^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x_p = k_p^2 = \text{conocido}$$

siendo (245):

$$x_p = S^+ \cdot A^T \cdot P \cdot K = \text{solución pseudoinversa conocida}$$

Y en la subred 1 la matriz varianza covarianza recordamos que es σ_{xx} , y en la subred 2 σ_{yy} :

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_b x_b} = \begin{pmatrix} 0,1470 & -0,1470 \\ -0,1470 & 0,1470 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_b y_b} = \begin{pmatrix} 0,8419 & -0,8419 \\ -0,8419 & 0,8419 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

Resultando dos valores de k_p :

$$\begin{aligned}
 x_{p1}^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x_{p1} &= k_{p1}^2 = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,1333 \cdot 10^{-3} \\ -0,1333 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1470 & -0,1470 \\ -0,1470 & 0,1470 \end{pmatrix}^+ \cdot 10^{-7} \cdot \\
 &\quad \begin{pmatrix} 0,1333 \cdot 10^{-3} & -0,1333 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \\
 &= 1,2088
 \end{aligned}$$

$$k_{p1} = 1,0994$$

$$\begin{aligned}
 x_{p2}^T \cdot \sigma_{yy}^+ \cdot x_{p2} &= k_{p2}^2 = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,65378 \cdot 10^{-3} \\ 0,65378 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8419 & -0,8419 \\ -0,8419 & 0,8419 \end{pmatrix}^+ \cdot 10^{-7} \cdot \\
 &\quad \begin{pmatrix} 0,65378 \cdot 10^{-3} & 0,65378 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \\
 &= 5,0770
 \end{aligned}$$

$$k_{p2} = 2,2532$$

Y finalmente, siendo la sensibilidad de la red inferior al milímetro², con las fiabilidades anteriormente expresadas podrán aceptarse como exactas las cifras de los resultados obtenidos hasta la de los milímetros, inclusive.

² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET AL., "Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas". Pg. 59. *Opus cit.*

Capítulo 5

CONCLUSIONES

El presente trabajo completa la fase medular de la línea de investigación emprendida hace cuatro años por el equipo de técnicos pertenecientes a la Universidad Politécnica de Valencia publicada en cinco entregas sucesivas, contando la presente, en la revista digital de la Real Academia de Cultura Valenciana. Con el antecedente de otras publicaciones en papel editadas fundamentalmente en la mencionada Universidad debidamente reseñadas y citadas¹.

Y como es secularmente preceptivo, siempre hasta el momento presente y en el estado actual de doctrina y tecnología.

Se trata del permanente objetivo de acceder con la precisión adecuada a la métrica del espacio físico concernido por una red local y, esencialmente, interpretar los resultados obtenidos con el más alto poder de afirmación posible.

Y debe de establecerse como condición de partida que nos referimos a trabajos que requieren avanzar más allá de las tareas repetitivas de rutina que, cubriendo sin reproche gran parte de la práctica profesional usual, son asequibles con importante coeficiente de seguridad a la excelente calidad de la instrumentación moderna y al

¹En especial M. CHUECA PAZOS, A. B. ANQUELA JULIÁN, S. BASELGA MORENO “Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 2007. De donde, previa autorización, hemos obtenido parte de la teoría que antecede.

automatismo ofrecido por aplicación reiterada del hardware y software actualmente disponibles.

Así pues, tratamos tan solo del grupo de proyectos que, por la razón o razones técnicas, económicas, de responsabilidad o de cualquier otro tipo, y consecuencias posibles que concurren en ellos, requieren además y necesariamente, directa y permanente vigilancia y decisoria intervención técnica humana altamente cualificada.

En síntesis, y en virtud de cuanto antecede concluimos que el método completo desarrollado en teoría y praxis ofrece esencialmente como avances que así mismo entendemos rigurosamente comprobados en la práctica:

- Un tratamiento novedoso del ajuste gaussiano que se ha denominado “por incrementos de coordenadas”. Con técnicas de homogeneización de observables, pesos, separación de tipos de coordenadas, eliminación de covarianzas, y en consecuencia, utilización rigurosa de observables GNSS.
- La metodología necesaria para la aplicación del Análisis Multivariante al vector de coordenadas compensadas, permitiendo la formulación de figuras de error simultaneas de alto poder de afirmación y cota de probabilidad arbitraria en cualquier grupo o grupos de vértices. Desde una sola coordenada hasta la totalidad de la red.
- Densificar la red de que se trate en cualquier caso y a cualquier punto o subespacio de puntos geoméricamente relacionable con vértices de la red por intersección directa virtual, con idéntico poder de afirmación que estos últimos y sin necesidad de trabajo de campo adicional. Hasta completar un Modelo Digital del Terreno de cobertura y densidad arbitraria.

Los dos primeros apartados son objeto de las cuatro publicaciones anteriores a la presente. Las páginas que anteceden se ocupan del tercer apartado.

A lo largo de todo el proceso se ha comprobado satisfactoriamente la doctrina con la praxis adecuada sobre la red monumentada en el Campus de Vera de

la Universidad Politécnica de Valencia. Creemos que por primera vez de forma completa y ordenada.

Y queda tan solo para la sexta y por el momento última parte de la línea de investigación programada, el estudio y praxis de la evolución en el tiempo de una red local y sus eventuales modificaciones o deformaciones. Actualmente en estado de elaboración muy avanzado.

Capítulo 6

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- [1] ANQUELA, A.B.; CHUECA, M.; BERNÉ, J.L., *Aportación al problema general de redes locales de alta precisión: condicionantes específicos de fijación de criterios teóricos y prácticos, de calificación de parámetros intermedios y resultados finales*, Tesis Doctoral, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2001.
- [2] ASHKENAZI, V., *Models for control in National and continental Network*, *Bulletin Geodesique*, Vol. 55, 1981.
- [3] ASHKENAZI, V., *Criterion for optimisation Boletino di Geodesia e Scienze Affine*.
- [4] BAARDA, W., *Measures for the accuracy of geodetic networks*, Hungría, Sopron, 1977.
- [5] BAARDA, W., *S-transformations and Criterion Matrices*, *Netherlands Geodetic Commission*, Vol. 5, núm. 1, 1973.
- [6] BAARDA, W., *Statistical concepts in Geodesia*, Delft, Holanda, *Rijkscommissie voor geodesie*.1967.
- [7] BAARDA, W., *Statistical Transformations and Criterion Matrices*, Delft, Holanda, *Rijkscommissie voor geodesie*.
- [8] BANNISTER, A.; RAYMOND, S., *Técnicas modernas en topografía*, R. S. Méjico, 1984.

- [9] BASELGA, S., *Aplicación informática para el diseño y compensación de redes locales, Proyecto Fin de Carrera de Ingeniería en Geodesia y Cartografía*, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2000.
- [10] BASELGA, S.; CHUECA, M.; BERNÉ, J.L., *Cálculo, compensación e interpretación de resultados en redes locales de alta precisión observadas por GPS y Topografía Clásica con aplicación de análisis estadístico multivariante y técnicas de estimación robusta*, Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [11] BELAYEV, V., *Optimal weiyhting in linear function estimation*, *Journal of Geodesy*, 1996.
- [12] BERNÉ, J. L.; HERRÁEZ, J., *Instrumentos modernos en Topografía*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [13] BERNÉ, J. L.; BASELGA, S.; ANQUELA, A. B., *RedTop. Aplicación Informática para el Diseño, Análisis y Compensación de Redes Topográficas*, Valencia, Editorial de la Universidad Politécnica, 2000.
- [14] BJERHAMMAR, A., *Theory of errors and generalized matrix inverses*, *Elsevier*, 1973.
- [15] BEZOARI, G.; MARTÍ, C.; SELVINI, A., *Topografía. Cartografía*, Milán, *Hoepli*, 1994.
- [16] BLACHUT, T. J. A., CHRZANOWSKI, A., SAASTAMOINEM J.H., *Cartografía y levantamientos Urbanos*, Méjico, Librería del Congreso, 1980.
- [17] BLACKIE AND SON LTD. Lauf. G. B., *The method of least Squares*. Londres, *Oxford University Press*, 1971.
- [18] BOMFORD, G., *Geodesy*, Londres, *Oxford University Press*, 1971.
- [19] BURNSIDE, C. D., *Electromagnetic Distance measurements*, *Crosby Lockwood*, 1971.

- [20] CAMACHO, A.; MARTÍN, M., *Constreñimientos internos en la compensación de estaciones*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1986.
- [21] CASPARY, W. F., *Concepts of network and deformation analysis*, School of Surveying, Australia, The University of New South Wales, Monograph XI, 1987.
- [22] CHEN, Y. Q., *Analysis of deformations. Surveys A. generalized Method*, Canadá, Dep. Sur. Eng. Fredericton. University of New Brunswick , 1983.
- [23] CHUECA, M., *Topografía*, Madrid, Dossat. S.A., 1982.
- [24] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Análisis de errores*, Valencia, Tomo I, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [25] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Nivelación*, Valencia, Tomo II, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [26] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Poligonación*, Valencia, Tomo III, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [27] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Triangulación*, Valencia, Tomo IV, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [28] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Redes topográficas y locales*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1994.
- [29] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Ampliación de redes topográficas y locales*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1995.
- [30] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia*, Madrid, Ed. Paraninfo, 1996.
- [31] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Métodos Topográficos*, Madrid, Ed. Paraninfo, 1996.

- [32] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L., *Ampliación de Redes Topográficas y locales. Cuestiones de Diseño*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [33] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Avances en la interpretación de resultados en Redes Locales*. Recintos de Error, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2001.
- [34] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [35] CHUECA, M.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los Problemas del Datum y Principal de Diseño*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2007.
- [36] DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F., *Topografía general y aplicada*, Madrid, Dossat, 1978.
- [37] ESPIGA GÓMEZ LOBO, *El tratamiento matricial del método de los mínimos cuadrados*, Madrid, Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [38] FERRER TORIO, B.; PINA, B., *Métodos topográficos*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1991.
- [39] FERRER TORIO, R.; PINA, B., *Introducción a la topografía*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1991.
- [40] FERRER TORIO, A., y otros, *Topografía aplicada a la Ingeniería Civil*, Cantabria, Universidad de Cantabria, 1992.
- [41] GRAFAREND, E. W., “*Optimisation of Geodetic Networks*”. Bollettino di Geodesia e Science Affini.
- [42] GROTEN. E.; STRAU, B., *GPS - Techniques Applied to Geodesy and Surveying*, Berlín, Springer Nerlag, 1988.

- [43] HEISKANEN y MORITZ, *Geodesia Física*, Madrid, IGN.
- [44] HIRVONEN, R. A., *Adjustment by least squares in Geodesy and Photogrammetry*, Ungar Pub, 1971.
- [45] HOFMAN-WELLWN HOF., *GPS. Theory and Practice*, New York, Lichtenegger and Collins, Springer-Verlay, 1994.
- [46] HOTINE, M., *Mathematical Geodesy*, Washington D.C., U. S. Department of Commerce, 1969.
- [47] ISAHÍ PRECISSION CO.LTC, “*Principios de la medición electrónica*”, Revista Topográfica y Cartográfica, núms. 28 y 29.
- [48] JIMÉNEZ MARTÍNEZ, M.J.; MARQUÉS MATEU, A.; PAREDES ASENCIO, J.M.; VILLAR CANO, M., “*Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local. Método de Triangulateración*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: www.racv.es/racv_digital, 2010.
- [49] JIMÉNEZ MARTÍNEZ, M.J.; QUESADA OLMO, N. ; VILLAR CANO, M.; PAREDES ASENCIO, J.M.; MARQUÉS MATEU, A., “*Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: www.racv.es/racv_digital, 2010.
- [50] JIMÉNEZ MARTÍNEZ M.J., GARCÍA GARCÍA, FR.; VILLAR CANO, M., “*Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con gnss y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: www.racv.es/racv_digital, 2011.
- [51] JIMÉNEZ MARTÍNEZ M.J., GARCÍA GARCÍA, FR.; VILLAR CANO, M., “*Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con gnss y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: www.racv.es/racv_digital, 2011.

- [52] JORDAN, W., *Tratado general de topografía*, Barcelona, Gustavo Gilí, 1974.
- [53] KENNIE and G. PETRIE, *Engineering Surveying Technology*. Taylor & Francis, Oxon, England, 1990.
- [54] KINCAID, D.; CHENEY, W., *Análisis Numérico: las Matemáticas del Cálculo Científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (U.S.A.), 1994.
- [55] LEICK, A., *GPS. Satellite Surveying*, New York, John Wiley and Sons, 1990.
- [56] LEICK, A., *GPS. Satellite Surveying*, New York, John Wiley and Sons, 2004.
- [57] LEVALLOIS, *Geodesie Générale*, París, Eyrolles, 1970.
- [58] LÓPEZ CUERVO, *Topografía*, Madrid, Mundi Prensa, 1994.
- [59] MAESTRO, I., BASELGA, S., CHUECA, M., *Contribución al estudio microgeodésico de deformaciones: diseño de redes mediante el cálculo y modelización de la incertidumbre*, Tesis Doctoral, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2005.
- [60] MARTÍN ASÍN, F., *Geodesia y Cartografía matemática*, Madrid, Paraninfo, 1989.
- [61] MARUSSI, A., *Intrinsic Geodesy*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1985.
- [62] MIKHAIL, E. M.; ACKERMAN, F., *Observations and least squares*, New York, IAP. Dun-Donneley Pub, 1976.
- [63] MIKHAIL and ACKERMANN, *Analysis and Adjustments of Survey Measurements*, Van Nostrand, New York, 1981.
- [64] MONTES DE OCA, M., *Topografía*, R. S. México, 1985.
- [65] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *Ajuste de redes geodésicas en un arco Tridimensional*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.

- [66] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *“Análisis de redes libres”*, Asamblea nacional de Geodesia y Geofísica, Madrid, 1987.
- [67] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *“Concepto de precisión y fiabilidad en redes Geodésicas”*. Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [68] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A. y VALBUENA DURAN, J. L., *Determinación de movimientos pequeños por procedimientos de trilateración. Aplicación a la auscultación de presas. Particularización a la presa del Atazar, Santander*, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [69] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., *Distanciometría electrónica de precisión. Distanciómetros submilimétricos*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [70] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., *Medida electrónica de los parámetros topográficos*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [71] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., VII *Curso de Geodesia Superior. Instrumentos, teoría y funcionamiento*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1991.
- [72] OJEDA RUIZ, J. L., *Métodos topográficos y oficina técnica*, Madrid, El Autor, 1984.
- [73] OLLIVIER, F., *Instruments Topographiques*, París, Eyrolles, 1995.
- [74] POPE, A. J., *The statistics of the residuals and the detection of outliers*, Grenoble, IUGG XVIII, General Assembly, 1975.
- [75] RICHARDUS, P.; ALIMAN, J., *Project Surveying*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1966.
- [76] RICHARDUS. P., *Project Surveying*, Netherlands, A. Balkema, 1977.

- [77] RÜEGER, J.M., *Electronic Distance Measurement*, Berlin Heiderberg, Alemania Edit. Springer-Verlag, 1996.
- [78] RÜEGER, J.M., "Precision of measurements and least squares", 37th Australian Surveyors Congress, Perth, Western Australia, 13-19 April 1996.
- [79] RUIZ MORALES. M., *Manual de Geodesia y Topografía*, Granada, Proyecto Sur, 1991.
- [80] RUSSELL, C; WOLF, P.R., *Elementary Surveying*, Harper and Row Publishers, Inc., 1984.
- [81] SEVILLA, M. J.; NÚÑEZ, A., *Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geoide*, Madrid, Física de la Tierra, U. Complutense, 1980.
- [82] SEVILLA, M. J., *Colocación mínimos cuadrados*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1987.
- [83] SEVILLA, M. J., *Curso de Geodesia Superior*, Madrid, U.C., 1987.
- [84] SEVILLA, M. J.; MUÑOZ, P.VELASCO, J.; ROMERO, P., "Calibración de un distanciómetro de infrarrojos en una base interferométrica". *Topografía y Cartografía*, Vol. III, 1987.
- [85] SEVILLA, M. J., *Compensación de redes de nivelación trigonométrica*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [86] SEVILLA, M. J., *Soluciones progresivas en el método mínimos cuadrados*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [87] SEVILLA, M. J., *Física de la Tierra II*, Madrid, Universidad Complutense, 1990.
- [88] SEVILLA, M. J., "Refracción atmosférica y su influencia en la medida electromagnética de distancias", Madrid, VII Curso de Geodesia Superior, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1991.

- [89] STRANG, G., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Madrid, Addison-Wesley, 1990.
- [90] TORGE WOLFGANG, *Geodesia física*, Madrid, Diana, 1983.
- [91] VALBUENA DURAN. J. L., “*Distanciometría electrónica, calibración y puesta a punto*”, Topografía y Cartografía, Vol. IV, 1989.
- [92] VANICEK, P., y KRAKWSKY, E., *Geodesy*, Amsterdam, North Holland, 1986.
- [93] WELLACH, W., *A review of the adjustment of the free network*. Survey Review, XXV, 194, 1979.
- [94] ZAKATOV, *Curso de Geodesia Superior*, Moscú, Mir, 1981.
- [95] ZUND, Joseph, *Foundations*.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	4
2. CUESTIONES CONCEPTUALES	20
2.1. CASO MALLA RECTANGULAR	20
2.2. CASO GENERAL CON UTILIZACIÓN DE EJES OBLICUOS	68
2.3. NOTA ACERCA DE LA DENSIFICACIÓN DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”, O VÉRTICES OBTENIDOS CON SOLUCIÓN PSEUDOINVERSA	91
3. APLICACIÓN SOBRE LA RED DE LA UPV	102
3.1. Vértices iniciales	102
3.2. RECINTOS DE ERROR DE LOS VÉRTICES INICIALES	103
3.2.1. LA ZONA “A”	104
3.2.1.1. COORDENADAS DE LA ZONA “A”	104
3.2.1.2. VARIANZA A PRIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD	104
3.2.1.3. VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD	105
3.2.1.4. MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”	105

3.2.1.5.	MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”	105
3.2.1.6.	SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “A”	106
3.2.1.7.	AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”	107
3.2.1.8.	SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES	108
3.2.1.9.	RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	109
3.2.2.	LA ZONA “B”	115
3.2.2.1.	COORDENADAS DE LA ZONA “B”	115
3.2.2.2.	MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”	115
3.2.2.3.	MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”	115
3.2.2.4.	SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “B”	116
3.2.2.5.	AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”	116
3.2.2.6.	SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES	117

4. DENSIFICACIÓN DE LA RED DE LA UPV	118
4.1. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “A”	119
4.1.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	119
4.2. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS PERTENECIENTES AL ARCO CA- PAZ DE $\frac{\pi}{2}$ SOBRE LA BASE DEFINIDA POR LOS VÉRTICES $V_1 V_2$	120
4.2.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	122
4.3. DENSIFICACIÓN CON UN PUNTO CUALQUIERA EN REFERENCIA AL CASO TEÓRICO DE EJES OBLICUOS	126
4.3.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS	126
4.4. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “B”	130
4.5. DENSIFICACIÓN CON PUNTOS CON ABCISAS PROCEDENTES DE LA ZONA “A” Y ORDENADAS DE LA ZONA “B” Y VICEVERSA . . .	132
5. CONCLUSIONES	135
6. BIBLIOGRAFÍA	138

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Es objeto del trabajo que sigue la interpretación en términos de error temible y probabilidad de comisión del resultado obtenido en el ajuste gaussiano de una Red Local, desde el caso más simple al más general, considerando simultáneamente todas las variables o coordenadas, o fraccionándolas en grupos arbitrarios y densificando la red sin trabajo de campo adicional e incorporando nuevas variables interpretadas con idéntico poder de afirmación.

Procederemos por inducción en sucesivas particularizaciones del caso más general posible, cuya solución multivariante formularemos. Del mismo modo se estudiará la progresiva complejidad del proceso y como tratarla.

El supuesto más sencillo a considerar en el ámbito de actuación demarcado es obviamente la interpretación individualizada de la abscisa, la ordenada o la cota de un vértice previamente calculada. Puede considerarse siempre como una variable X , representativa de una magnitud escalar, no siendo asequible el conocimiento de la cifra X_e de su valor exacto,

Sí y solo si puede escribirse que X es una variable normal, en la fig 1.1 de interpretación inmediata

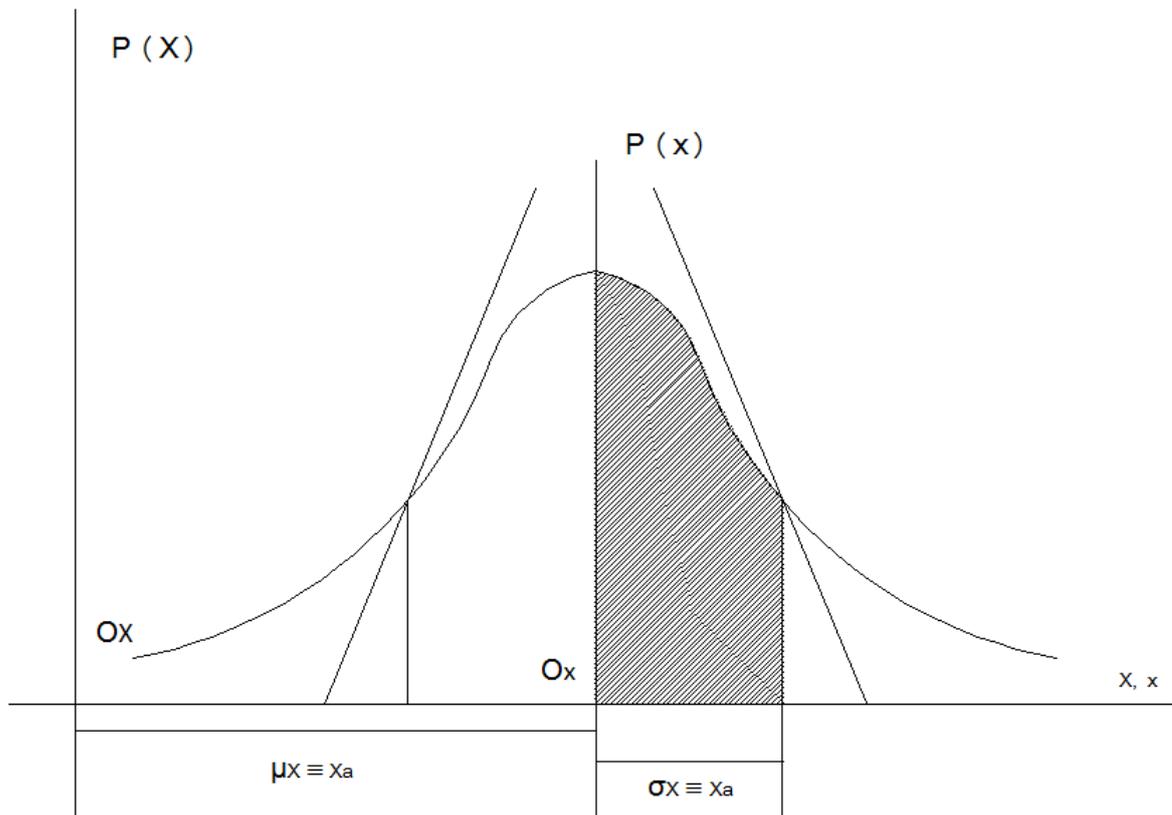


Figura 1.1: Curva de probabilidad normal de Gauss univariante

$$X \sim N(\mu_x = X_a, \sigma_x) \quad (1)$$

Se verificará según rutina

$$P(X) = P(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \quad (2)$$

semitipificando X según

$$X = \mu_x + x \quad (3)$$

$$\sigma_X = \sigma_x \quad (4)$$

pudiéndose escribir además

$$X = \sigma_x \cdot T + \mu_x \quad (5)$$

donde

$$T \sim N(0, 1) \quad (6)$$

Siendo T ¹, variable normal tipificada.

Y se podrá describir la realidad física aceptando el valor más probable

$$E(X) = M = \mu_x = X_a \quad (7)$$

al que se tendrá acceso *por el procedimiento que se entienda más adecuado* en cada supuesto. En el presente caso de una variable acostumbra a ser asequible y preferirse la media aritmética μ_x de los distintos valores obtenidos por medición directa o indirecta, siendo su probabilidad máxima.

$$P_{m\acute{a}x} = P(X = \mu_X) = P(x = 0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \quad (8)$$

expresándose para cualquier otro supuesto (incluyendo el anterior) como

$$P_{m\acute{a}x} = P(X = X_a) = P(x = 0) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \quad (9)$$

que generalizaremos al caso multivariante, según se verá.

Sin embargo y para obtener un resultado riguroso y de aplicación práctica, es preciso establecer la integral definida

$$\begin{aligned} P_{\Phi} &= \int_{X_a - k\sigma_X}^{X_a + k\sigma_X} P(X) \cdot dX = \int_{-k\sigma_X}^{+k\sigma_X} P(x) \cdot dx = \int_0^{+k\sigma_X} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT = 2 \cdot [N(0, 1)]_0^k \quad (10) \end{aligned}$$

donde el recinto de integración (intervalo en este caso) es

$$\Phi \equiv \left\langle \begin{array}{l} X_a - k \cdot \sigma_X \leq X \leq X_a + k \cdot \sigma_X \\ |x| \leq k \cdot \sigma_x \end{array} \right\rangle \quad (11)$$

¹Utilizamos la notación T en este caso, en lugar de Y , empleada anteriormente en Análisis Multivariante para prevenir ambigüedad con expresiones posteriores.

siendo k una constante arbitraria. P_{Φ} se representa por un área bidimensional. Para $k = 1$ valdrá el doble de la superficie rayada en la figura 1.1.

Y evidentemente, la exigencia y cifrado a priori de una fiabilidad suficiente permite establecer rigurosamente una k y consecuentemente un recinto de integración, o de incertidumbre, en cuyo interior se encontrará el valor exacto X_e desconocido.

Por ejemplo, para $k = 1$, caso representado en la figura 1.1, la integral definida (10) resulta igual a 0,68 y con $k = 4$ resulta igual a la unidad con error despreciable en la inmensa mayoría de los casos, sea cual fuere la exigencia a priori establecida. Quiere decir que *con certeza* puede aceptarse que el valor adoptado X_a se aproximará al exacto X_e en menos de $4\sigma_x$.

Desconocemos el punto sobre el eje de abscisas X/x de la figura 1.1 donde se halla X_e , pero se cumplirá que

$$X_a - 4\sigma_x \leq X_e \leq X_a + 4\sigma_x \quad (12)$$

y si el error o aproximación $e_X = \pm 4\sigma_x$ es aceptable, X_a resuelve irreprochablemente y con todo rigor el problema.

Resumiendo:

- $E(X) = M = \mu_x = X_a$ es el valor más probable, solución adoptada. Coincide en el presente caso el valor más probable a priori y a posteriori.
- La función de probabilidad de X es

$$P = P(X) = P(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_X}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{X-M}{\sigma_X}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2}$$

- Se cumple que $X = \sigma_x \cdot T + \mu_x = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}} \cdot T + \mu_x = B \cdot T + M$, donde $T \sim N(0, 1)$.
- El lugar geométrico de los puntos X/x equiprobables con una probabilidad arbitraria $P = P(X) = P(x)$ se reduce a dos valores aislados de X/x tales que $X = \mu_x \pm x = M \pm x$, donde suele medirse $x = \pm k \cdot \sigma_x$ en desviaciones típicas sobre el valor más probable.

- La probabilidad $P_{\Phi} = P(|x| \leq k\sigma_x)$, concierne a los puntos X/x cuyo lugar geométrico es el segmento de recta sobre el eje de abscisas que une los valores anteriores y se expresa como $|x| \leq k\sigma_x$. Su valor viene dado por la integral definida simple de la función normal de Gauss

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi} &= \int_{M-k\sigma_x}^{M+k\sigma_x} P(X) \cdot dX = \int_{-k\sigma_x}^{+k\sigma_x} P(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+k\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \cdot dx = \\
 &= 2 \cdot \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot T^2} \cdot dT = 2 \cdot [N(0, 1)]_0^k
 \end{aligned}$$

extendida al segmento de recta anteriormente citado considerado como recinto de integración.

Geométricamente está representada por el área bidimensional plana encerrada por la curva $P = P(X)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm k \cdot \sigma_x$. Doble de la superficie rayada en figura 1.1, representativa del caso $k = 1$.

Consideremos a continuación el caso más complejo de dos variables normales representativas para fijar ideas de las coordenadas de un vértice A en planimetría y sea su expresión

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \quad (13)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y) \quad (14)$$

$A(M_X, M_Y)$, coordenadas valores más probables ajustadas. Con menor rigor pueden entenderse también a priori.

A posteriori serían los valores compensados que, salvo decisión específica y justificada en contra, se supondrán obtenidos por aplicación del Método de Ajuste Gaussiano de Incrementos de Coordenadas, desarrollado en trabajos anteriores².

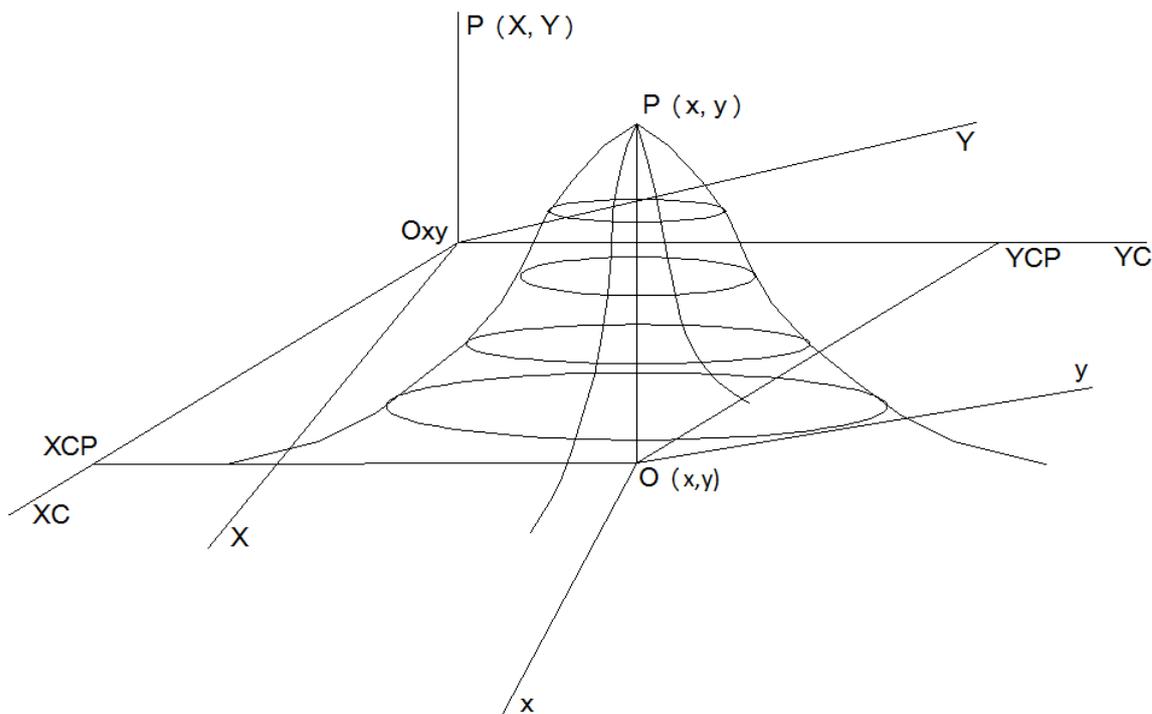


Figura 1.2: Recinto de probabilidad normal en el caso de dos variables

Así en la figura 1.2 ampliamos a dos variables el caso de una anteriormente estudiado.

Directamente podemos escribir³

$$\begin{aligned}
 P(X, Y) = P(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X-M)^T \cdot \sigma_{XX}^{-1} \cdot (X-M)} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \quad (15)
 \end{aligned}$$

con notación bien conocida, siendo

$$X = M + x \quad (16)$$

² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, N. QUESADA OLMO, M. VILLAR CANO, J.M. PAREDES ASENCIO, A. MARQUÉS MATEU, "Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas". Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital). Valencia, 2011.

³ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, FR. GARCÍA GARCÍA, M. VILLAR CANO. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por Incrementos de Coordenadas". Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital). Valencia, 2012. Pg 159 y sig.

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} \quad (17)$$

verificándose además

$$X = B \cdot T + M \quad (18)$$

Vector normal multivariante de coordenadas compensadas, donde

$$B = (\sigma_{XX})^{\frac{1}{2}} = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$M = E(X) \quad (20)$$

$$T \sim N(0, 1) \quad (21)$$

siendo X , M , x , T , vectores columna de dos componentes.

Las expresiones (15) se representan en la figura referidas a unos ejes arbitrarios

O_{XY} y su trasladado de vector M , O_{xy} , resultando la probabilidad máxima:

$$\begin{aligned} P(X, Y)_{m\acute{a}x} &= P(x, y)_{m\acute{a}x} = P(X = M) = P(x = 0) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \quad (22) \end{aligned}$$

por otra parte en (15) tomando neperianos

$$\begin{aligned} L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= C^2 = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = \\ &= (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \quad (23) \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \cdot (x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy}) = \\ &= x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} = C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) \end{aligned}$$

haz de elipses con centro en el vértice compensado A_C y ejes paralelos , siendo

$$L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot \left| \sigma_{xx} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} = C^2 = \text{Constante para una } P \text{ determinada}$$

Así en la figura 1.2 se representa el haz de elipses de probabilidades constantes Φ_P secciones planas y paralelas de (15) por planos $P = \text{Constante}$.

Para la probabilidad correspondiente a $C = 1$ se obtiene la elipse standard de A_C

$$ES \equiv x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} - \sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 + \sigma_{xy}^2 = 0$$

$$ES \equiv x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x - 1 = 0 \quad (24)$$

y del mismo modo que en (10), la probabilidad de que el vértice exacto A_e se encuentre dentro del recinto de incertidumbre o error definido por la elipse Φ_P valdrá en este caso la integral doble

$$P_\Phi = \iint_{\Phi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left| \sigma_{xx} \right|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \cdot dx \cdot dy \quad (25)$$

donde en el exponente de la función subintegral aparecen los términos cuadráticos de la elipse standard ES . La integral se extiende en principio al recinto

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \Phi_P \equiv x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} = \\ &= L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot \left| \sigma_{xx} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} \cdot \left(\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

elipse homotética de ES y razón C , arbitraria.

El resultado es un volumen como el de la figura 1.3, formado por dos secciones acoladas: un cilindro recto con base en el plano del levantamiento Oxy y centro en el origen O , base la proyección ortogonal de la elipse Φ_P sobre dicho plano, generatrices verticales hasta cortar a la superficie de probabilidad $P = P(x, y)$,

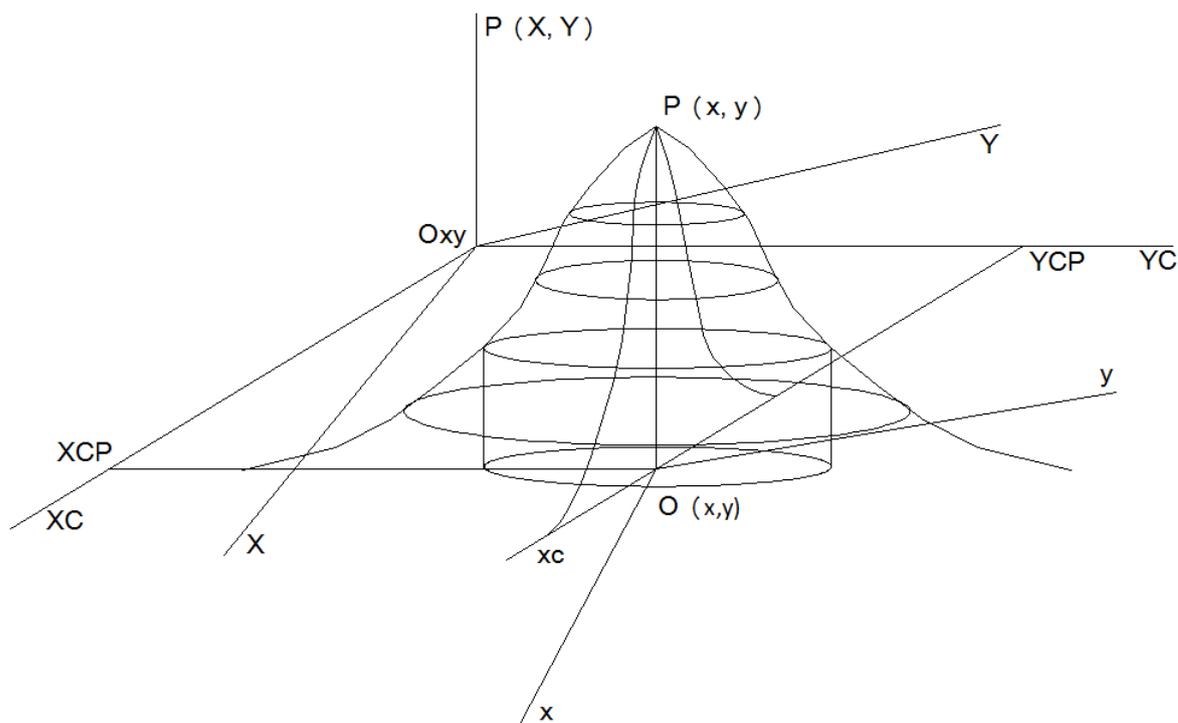


Figura 1.3: Volumen formado por un cilindro recto que corta a la superficie de probabilidad $P = P(x, y)$

que evidentemente lo hará en Φ_P , cubierto por el resto de la superficie citada, hasta su vértice en P_{max} .

El cálculo directo de (25) puede abordarse practicando una rotación de los ejes OXY , Oxy un mismo ángulo hasta situarlos en la dirección de los ejes de las elipses Φ_P , en O_{XCYC} y O_{xcyc} respectivamente (fig. 1.3).

El cambio de variable por rotación bien conocido

$$z = \Gamma^T \cdot x \quad (27)$$

con $\Gamma =$ matriz de autovectores columna de σ_{xx} resuelve la cuestión, transformando las elipses Φ_P a su expresión canónica desapareciendo las covarianzas, cuyo significado físico resulta a lo menos dudoso, al depender su existencia de un operador geométrico.

$$z = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \Gamma^T \cdot x = \Gamma^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \Gamma \cdot z = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \quad (28)$$

y practicándolo en (25) se obtiene

$$\begin{aligned} P_\Phi &= \iint_{\Phi} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_c^2}{\sigma_{x_c}^2} + \frac{y_c^2}{\sigma_{y_c}^2} \right)} \cdot dx_c \cdot dy_c \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \iint_{\Phi} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_c^2}{\sigma_{x_c}^2}} \cdot dx_c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{y_c^2}{\sigma_{y_c}^2}} \cdot dy_c \end{aligned} \quad (29)$$

integral de variables separadas.

Sin embargo, establecer los límites de integración con el recinto elíptico considerado no es fácil. Y por otra parte y a efectos prácticos, el recinto de integración puede y debe modificarse si con ello se facilita el cálculo o se obtiene mayor información en el resultado.

Así, sabemos por teoría conocida que la proyección de cualquier elipse Φ_P , sobre sus ejes coordenados, en su caso más general, vale $2 \cdot \sigma_x$ y $2 \cdot \sigma_y$ ⁴. En nuestro caso canónico se proyectará según los ejes y se tendrá

$$\sigma_{x_c} = a \quad (30)$$

$$\sigma_{y_c} = b \quad (31)$$

Y en definitiva, puede resolverse el problema cambiando el recinto de integración, que también es de incertidumbre por el mucho más cómodo

$$\Psi = \left\langle \begin{array}{l} |x_c| \leq C \cdot a = C \cdot \sigma_{x_c} \\ |y_c| \leq C \cdot b = C \cdot \sigma_{y_c} \end{array} \right\rangle \quad (32)$$

En su caso más general, con $C =$ constante arbitraria, rectángulo con centro en el vértice compensado $A(X_{CP}, Y_{CP})$, que es también el origen Oxy , circunscrito a la elipse elegida Φ_P , tangente en sus vértices y de lados sus ejes $2 \cdot C \cdot a$ y $2 \cdot C \cdot b$. Mas coherente con el caso anterior, de segmento de recta.

Definitivamente

⁴*Ibidem.* Pg 70 y sig.

$$\begin{aligned}
P_{\Psi} &= \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-b=-C \cdot \sigma_{yc}}^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{y_c^2}{\sigma_{yc}^2}} \cdot dy_c \cdot \int_{-a=-C \cdot \sigma_{xc}}^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_c^2}{\sigma_{xc}^2}} \cdot dx_c \quad (33)
\end{aligned}$$

probabilidad de que el vértice exacto A_e se encuentre dentro del recinto Ψ . Adicionalmente, la utilización de la constante C permite calcular en (23) la probabilidad P asociada a los puntos de la elipse Φ_P inscrita en Ψ .

Es inmediato tipificar (33) mediante el cambio de variables

$$T = \frac{x_c}{\sigma_{xc}} = \frac{y_c}{\sigma_{yc}}$$

$$dx_c = \sigma_{xc} \cdot dT = dy_c = \sigma_{yc} \cdot dT \quad (34)$$

siguiéndose

$$\begin{aligned}
P_{\Psi} &= \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sigma_{xc} \cdot \sigma_{yc}} \cdot \int_{-b=-C \cdot \sigma_{yc}}^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{yc} \cdot dT \cdot \int_{-a=-C \cdot \sigma_{xc}}^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{xc} \cdot dT = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT = \\
&= 2 \cdot N(0, 1)_0^C \cdot = 2^2 \cdot [N(0, 1)_0^C]^2 = [2 \cdot N(0, 1)_0^C]^2 \quad (35)
\end{aligned}$$

resultando evidente la relación con (10) en el caso anterior, que se obtiene particularizando el presente para una sola variable.

Así y completando el análisis, (35) representa la probabilidad anteriormente mencionada de que el vértice exacto A_e se encuentre dentro del recinto Ψ , y de que sus coordenadas X_{Ae} , Y_{Ae} disten de las compensadas X_{CP} , Y_{CP} a lo más $\pm C \cdot a$ y $\pm C \cdot b$ respectiva y simultáneamente, *siendo en nuestra opinión esta última característica fundamental para nuestro trabajo profesional.*

La generalización para tres dimensiones es trivial y de nuevo se obtiene en la práctica la certeza para $C = 4$.

Resumiendo:

- $E(X) = M$ es el valor más probable, solución adoptada. En rigor debe utilizarse el valor ajustado gaussiano a posteriori.
- La función de probabilidad de X es

$$\begin{aligned} P(X, Y) = P(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X-M)^T \cdot \sigma_{XX}^{-1} \cdot (X-M)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \end{aligned}$$

- Se cumple que $X = B \cdot T + M$, vector de coordenadas compensadas más probables, donde $B = (\sigma_{XX})^{\frac{1}{2}} = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}}$, $T \sim N(0, 1)$ y $M = E(X)$.
- El lugar de los puntos X/x equiprobables con una probabilidad arbitraria $P = P(X) = P(x)$ es una de las elipses con centro en el vértice compensado A_C y ejes paralelos

$$\begin{aligned} L \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot P \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= C^2 = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = \\ &= (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \cdot (x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy}) = \\ &= x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} = C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) \end{aligned}$$

siendo $C^2 = \text{Constante}$ para una P prefijada.

- La probabilidad conjunta P_Ψ , donde $\Psi = \left\langle \begin{array}{l} |x_c| \leq C \cdot a = C \cdot \sigma_{xc} \\ |y_c| \leq C \cdot b = C \cdot \sigma_{yc} \end{array} \right\rangle$, concierne a los puntos X/x cuyo lugar geométrico es el rectángulo definido por las rectas $\left\langle \begin{array}{l} |x_c| = C \cdot a = C \cdot \sigma_{xc} \\ |y_c| = C \cdot b = C \cdot \sigma_{yc} \end{array} \right\rangle$.

Su valor, previas las transformaciones por rotación antes descritas, es el de la integral doble de variables separadas de la función normal bivalente de Gauss

$$\begin{aligned}
 P_{\Psi} &= \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sigma_{xc} \cdot \sigma_{yc}} \cdot \int_{-b=-C \cdot \sigma_{yc}}^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{yc} \cdot dT \cdot \int_{-a=-C \cdot \sigma_{xc}}^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot \sigma_{xc} \cdot dT = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+b=+C \cdot \sigma_{yc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+a=+C \cdot \sigma_{xc}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT = \\
 &= 2 \cdot N(0, 1)_0^C \cdot 2 \cdot N(0, 1)_0^C = 2^2 \cdot [N(0, 1)_0^C]^2 = [2 \cdot N(0, 1)_0^C]^2
 \end{aligned}$$

extendida al rectángulo antes definido considerado como recinto de integración.

Geoméricamente y supuesto $C = 1$, figura 1.3, corresponde al volumen formado por dos secciones acoladas, a saber: un prisma recto (no representado) con base rectangular en el plano del levantamiento, centro en el vértice compensado $A(X_{CP}, Y_{CP})$, que es también el origen Oxy , circunscrita a la elipse elegida Φ_P , tangente en sus vértices y de lados sus ejes $2 \cdot a$ y $2 \cdot b$, aristas verticales hasta cortar a la superficie de probabilidad $P = P(xy)$, según dicho rectángulo, cubierto por el resto de la superficie citada, hasta su vértice en P_{max} .

Es claro que el caso de una variable se deduce como una particularización del presente de dos variables. Del mismo modo, la extensión a tres variables (un vértice en el espacio tridimensional) es inmediata según lo expuesto, debiendo señalarse que los cálculos resultan más prolijos y la interpretación geométrica de la integral triple de probabilidad resultante es un hipervolumen tetradimensional, sin realidad física.

Finalmente, el caso más general corresponde al ajuste , compensación gaussiana e interpretación de resultados de una red local, bi o tridimensional, formada por un número cualquiera de vértices.

Así el vector de variables X asociado a la red tendrá un número par de componentes si se refiere a una red planimétrica o bidimensional y un número impar y múltiplo de tres si tridimensional. Y como de nuevo esta última es una extensión de la primera, con alguna complicación adicional de cálculo, nos referiremos a continuación monográficamente al caso planimétrico más general, con un número de vértices igual o mayor que dos, y de coordenadas $n \geq 4$.

La red propiamente dicha se representa por el afijo de X referido a un sistema de ejes cartesianos n-dimensional.

El desarrollo inicial es en principio generalización puntual del anteriormente expuesto.

Resumiendo:

- $E(X) = M$ es el valor más probable, solución adoptada. En rigor debe utilizarse el valor ajustado gaussiano a posteriori.
- La función de probabilidad de X es

$$P(X) = P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{XX}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X-M)^T \cdot \sigma_{XX}^{-1} \cdot (X-M)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x}$$

siendo $n =$ numero de coordenadas generado por los vértices de la red, obteniéndose los casos anteriores particularizando para $n = 1, 2$.

- Se cumple que $X = B \cdot T + M$, vector de coordenadas compensadas más probables, donde $B = (\sigma_{XX})^{\frac{1}{2}} = (\sigma_{xx})^{\frac{1}{2}}$, $T \sim N(0, 1)$ y $M = E(X)$, que define en su caso más general la distribución normal multivariante de las componentes del vector X .

Siendo de nuevo los casos anteriores particularizaciones para $n = 1, 2$.

- El lugar de los puntos n-dimensionales afijos de X/x equiprobables con una probabilidad arbitraria $P = P(X) = P(x)$ es uno de los hiperelipsoides del haz de ejes paralelos y con centro en el vértice compensado n-dimensional A_C cuya ecuación es

$$L \cdot \left(P \cdot (2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n} \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} = C^2 = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x$$

siendo $C = \text{Constante}$ para una P prefijada.

Evidentemente, sin realidad física.

• Referido el hiperelipsoide de que se trate a forma canónica mediante la conocida transformación de ejes $z = \Gamma^T \cdot x$, la probabilidad conjunta P_Ψ , donde el recinto de incertidumbre es $\Psi = \left\langle \begin{array}{l} |z_i| \leq C \cdot a_i = C \cdot \sigma_{zi} \\ i \in 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right\rangle$, que concierne a los puntos transformados Z/z cuyo lugar geométrico es el hiperparalelepípedo circunscrito al hiperelipsoide canónico definido por los hiperplanos $\left\langle \begin{array}{l} |z_i| = C \cdot a_i = C \cdot \sigma_{zi} \\ i \in 1, 2, 3, \dots, n \end{array} \right\rangle$, tangentes en sus vértices, viene dada por la integral múltiple⁵

$$P_\Psi =$$

$$= \iiint \dots \int_{\Psi, n} \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \left(\frac{z_i}{C \cdot \sigma_{zi}} \right)^2} \cdot dz_1 \cdot dz_2 \cdot dz_3 \cdot dz_4 \dots \cdot dz_n$$

que se resuelve por la de variables separadas

$$P_\Psi =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{z1}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{z2}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT \dots \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+C \cdot \sigma_{zn}} e^{-\frac{1}{2} \cdot T^2} \cdot dT =$$

$$= 2^n \cdot [N(0, 1)_0^C]^n = [2 \cdot N(0, 1)_0^C]^n$$

extendida al hiperparalelepípedo Ψ antes definido considerado como recinto de integración.

No existe evidentemente representación geométrica con realidad física.

Y a partir de lo expuesto el problema práctico puede así plantearse en toda su generalidad. Se trata en definitiva de conferir realidad e interpretación física

⁵Ibidem. Pg. 29 y sig.

práctica y rigurosa, bi y tridimensionales, a la doctrina descrita. Es posible, y en trabajos anteriores nuestros se ha desarrollado y tratado exhaustivamente una solución⁶ a la que nos remitimos. No insistiremos sobre ella.

Queda extender la doctrina a la densificación de la red de que se trate hasta alcanzar cualquier punto de la superficie cubierta, interpretando el resultado sin pérdida de rigor y supresión o sustancial ahorro en trabajo de campo adicional. Es el objeto del trabajo que sigue, en el que aplicaremos con algún avance incorporado tal vez importante, la doctrina del Problema Principal de Diseño, también desarrollada por nosotros con anterioridad⁷.

⁶*Ibidem*. Es el objeto de la publicación citada.

⁷M. CHUECA PAZOS, A. B. ANQUELA JULIÁN, S. BASELGA MORENO “Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 2007. En las páginas que siguen reproducimos básicamente nuestra teoría del PPD y entendemos que por primera vez, la aplicamos a una red real, con todas sus consecuencias.

Capítulo 2

CUESTIONES CONCEPTUALES

2.1. CASO MALLA RECTANGULAR

Con anterioridad¹ hemos desarrollado el estudio de los distintos recintos de error asociados a los vértices de una red libre o ligada, ajustada por Gauss-Marcov, a priori y a posteriori, individualizados por separado y en conjunto o conjuntos simultáneos, estableciendo siempre sus expresiones algébricas e interpretaciones geométricas correspondientes desde la consideración de la red completa hasta su particularización puntual en un solo vértice cualquiera.

Así mismo se ha completado la doctrina estableciendo distintos criterios de aproximación al conocimiento, interpretación estadística y probabilística y cifrado consiguiente con cualquier poder de afirmación predeterminado de los

¹*Cfr.* M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, A. MARQUÉS MATEU, J.M. PAREDES ASENSIO, M. VILLAR CANO “Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local. Método de Triangulateración”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: www.racv.es/racv-digital. Valencia, 2010.

Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, N. QUESADA OLMO, M. VILLAR CANO, J.M. PAREDES ASENSIO, A. MARQUÉS MATEU, “Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: www.racv.es/racv-digital. Valencia, 2011.

Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, FR. GARCÍA GARCÍA, M. VILLAR CANO “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: www.racv.es/racv-digital. Valencia, 2012.

Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, FR. GARCÍA GARCÍA, M. VILLAR CANO “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”. Real Academia de Cultura Valenciana. Revista Digital: www.racv.es/racv-digital. Valencia, 2012.

mencionados recintos, siempre referidos a la red en mallas cartesianas rectangulares generadas a partir de hipercuádricas n-dimensionales, y particularizaciones bi o tridimensionales.

Se trata ahora de densificar dichas mallas hasta lograr el desideratum de acceder a la misma información sobre *cualquier punto del espacio definido y abarcado por la red y su evolución en el tiempo*. La cuestión es fundamental por sí misma y su aplicación práctica en cuestiones de control de deformaciones, decisiva, ya que la elección a priori de vértices de control, por fundamentada que sea, no garantiza en absoluto que se produzcan en ellos las modificaciones de la realidad física que se pretende controlar e interpretar.

En adelante nos referiremos a la cuestión enunciada y su desarrollo correspondiente como Problema Principal de Diseño (PPD), que se considera conveniente desarrollar en dos partes diferenciadas. La primera se ocupará del establecimiento conceptual de la doctrina, en buena parte novedosa, y la segunda de la praxis de aplicación, deduciendo y formulando la instrumentación geométrica, algebraica y estadística necesaria. Completará el trabajo la tercera parte dedicada a la resolución completa y en detalle de una aplicación práctica.

De acuerdo con la teoría conocida², la expresión general de probabilidad normal multivariante de n variables, representativas de coordenadas de vértices configurando una red local reducida a un punto en el espacio E^n , es

$$P = P(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|_{n,n}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})} \quad (36)$$

con la notación usual establecida. Y aun cuando en la práctica no acostumbra a tenerse en cuenta, con todo rigor debe aceptarse la expresión anterior como a posteriori, por serlo la matriz σ_{XX} y su determinante $|\sigma_{XX}|$.

La función de probabilidad a priori, con la notación usual, sería

$$P = P(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\Sigma_X|_{n,n}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})^T \cdot \Sigma_X^{-1} \cdot (X_{n,1} - M_{n,1})} \quad (37)$$

² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano...". *Opus cit.* Pg. 23 y sig. expresiones (45), (74) y (75).

siéndolo también la matriz de varianzas Σ_X y su determinante $|\Sigma_X|$. Otra cuestión es la dificultad de su establecimiento riguroso, generalmente poco asequible.

En el mismo orden de ideas, el vector $M = E(X)$ tiene el significado físico de vector de coordenadas más probable. Por consiguiente, es lícito establecerlo a priori utilizando medias aritméticas cuando ello es posible y escribiendo $M = \mu_X$, más frecuentemente por medio del camino de mejor consistencia, con la notación $M = X_a$ o por cualquier otro procedimiento adecuado.

Así mismo, entendemos razonable y así lo haremos a continuación, establecer hipótesis alternativas a posteriori. Y será así mismo lícito particularizar $M = X = E(X)$, vector de coordenadas ajustadas por Gauss Marcov como más probable. Y en este último supuesto estará rigurosamente justificado utilizar la matriz σ_{XX} y su determinante $|\sigma_{XX}|$.

P es máxima = P_{max} , para $X = M$. Así se tendrá

$$P = P(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \cdot |\Sigma_X|^{-\frac{1}{2}} \quad (38)$$

$$P = P(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \quad (39)$$

Las expresiones (36) y (39) a posteriori son generalmente las de más fácil particularización y mayor fiabilidad y utilidad en la práctica. Por ello y para evitar la doble exposición nos referiremos en adelante solo a ellas. En cualquier caso, el algoritmo a priori es trivial conocido lo que sigue.

Se considera a continuación la integral definida múltiple de orden n , cuya función subintegral es la de probabilidad normal multivariante (36) a posteriori extendida a un recinto $\Phi = \Phi(X)$ en el espacio E^n , adecuado al trabajo en presencia y previamente establecido.

$$P_\Phi = \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(X) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 \dots dX_n \quad (40)$$

Y practicando el cambio de variable

$$X - M = x \quad (41)$$

$$X = M + x \quad (42)$$

se genera así en cualquier caso y previa aplicación del método Gauss Marcov, bien conocido y que forma parte de la resolución del problema, el paso del vector de variables-coordenadas X ajustadas al de variables-correcciones x sobre los valores más probables, medibles sobre el n-edro cartesiano de referencia en unidades de desviación típica σ_x .

Y se tendrá en definitiva

$$\begin{aligned} P_{\Phi} = P_{\Phi}(X) = P_{\Phi}(M + x) &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} \frac{D(X)}{D(x)} \cdot P(M + x) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_n = \\ &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(x) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_n \quad (43) \end{aligned}$$

probabilidad de que el vector X_e desconocido de valores exactos de las variables X se encuentre dentro de un recinto prefijado Φ geoméricamente conocido y situado en el entorno de X , valores ajustados. Posteriormente, la particularización de (43) a uno, varios, o todos los vértices de la red completa el trabajo.

Y siguiendo rutina, en (43) la función subintegral se expresa según

$$P = P(X) = \frac{1}{(2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|_{n, n}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x} \quad (44)$$

donde tomando neperianos

$$-2L \cdot \left(P(X) \cdot (2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n} \cdot |\sigma_{xx}|_{n, n}^{\frac{1}{2}} \right) = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = C^2 \quad (45)$$

expresión del hiperelipsoide de error HE asociado a una red determinista con el poder de afirmación correspondiente a una probabilidad $P = P(x)$, arbitrariamente prefijada. Se tiene

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^{-1}$$

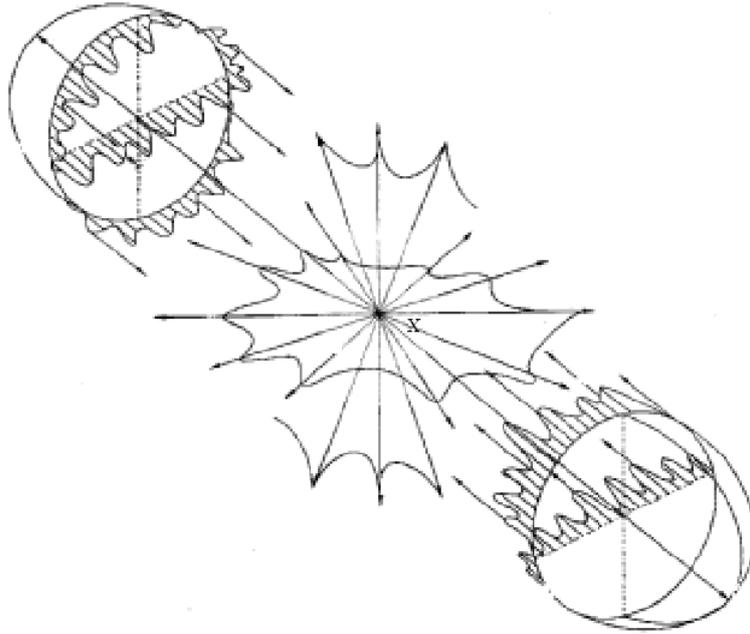


Figura 2.1: Hiperelipsoide de error

$$\sigma_{XX}^{-1} = \sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \quad (46)$$

$$R(\sigma_{XX}) = R(\sigma_{xx}) = R(S^{-1}) = R(S) = n \implies \text{completo}$$

Y según sabemos³, el hiperelipsoide de error HE permite acceder a recintos $\Phi = \Phi(X) = \Phi(x)$, de tipo hiperparalelepípedos circunscritos a HE, que facilitan la aplicación del Análisis Multivariante a la interpretación de resultados en el ajuste de Redes Locales especialmente por medio de la integración de (43) separando las variables, y sus correspondientes particularizaciones por secciones planas a cualquier grupo de vértices de la red en estudio.

A continuación, para fijar conceptos, y mejor avanzar en la correcta comprensión de la doctrina que desarrollamos, merece la pena insistir sobre algún aspecto de las hipersuperficies HE .

³*Ibidem.* Pg. 20 y sig.

En la figura 2.1, representación espacial idealizada del espacio E^n , imaginemos que X es el afijo del vector $X_{n,1}$ de los valores ajustados por Gauss-Marcov de las coordenadas de la red en estudio referidas a un n-edro cartesiano rectangular arbitrario no representado.

Trasladando dicho n-edro paralelamente a sí mismo hasta que su origen O coincida con el punto X , puede imaginarse como el haz de rectas concurrentes en X representado, bien entendido que todas ellas serán también ortogonales entre sí, y nulo en consecuencia el producto escalar de cualquier pareja de vectores situados respectivamente sobre dos cualesquiera de ellas.

Dicho n-edro trasladado será el de referencia de las variables-correcciones x . Y el lugar del afijo del vector x será el hiperelipsoide HE de n ejes y ecuación (45) con centro en el origen $O \equiv X$.

El hiperelipsoide HE en general será no canónico y sus ejes no coincidirán con los de coordenadas. Será objetivo esencial del proyectista conseguir que no sea así, y para ello deberá lograr una matriz de criterio a posteriori tan diagonal como le sea posible $\sigma_{xx} \approx \text{diag } \sigma_{xi}$, siendo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Además tratará de alcanzar como condición muy favorable para la correcta interpretación de resultados que las longitudes de los ejes de HE sean muy semejantes.

En el límite, una hiperesfera sería la figura perfecta. En la práctica, un hiperelipsoide HE casi-canónico y casi-hiperesférico, debe ser el resultado del buen hacer del proyectista. Es lo que se ha pretendido representar en la figura 2.1.

Supuesto para fijar ideas que estamos tratando del caso planimétrico (la extensión a tres dimensiones no ofrece dificultad mayor), la cuestión siguiente es trasladar la información geométrica contenida en la figura 2.1 y el algoritmo algébrico que la sustenta al plano del levantamiento, de forma útil y rigurosa.

Al fin y al cabo se trata de una generalización de tecnología cartográfica básica. Si ésta trata de representar en un plano bidimensional espacios tridimensionales expresando analítica y gráficamente la correspondencia de sus dos geometrías,

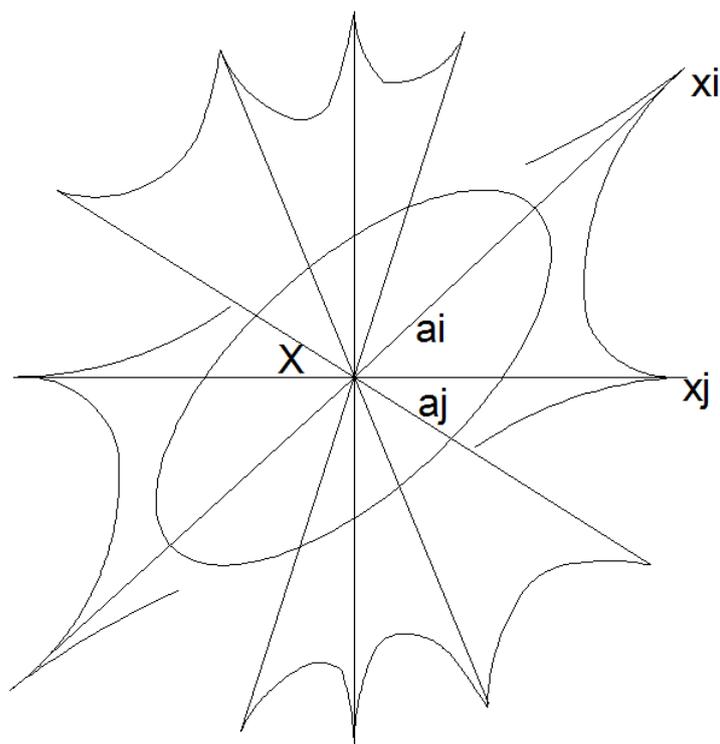


Figura 2.2: Plano coordenado cualquiera del Hiperelipsoide de error

ahora se trata de lo mismo, generalizando el espacio tridimensional a un número arbitrario n de dimensiones.

Existe sin embargo una diferencia importante. En la Ingeniería Cartográfica clásica, los dos espacios relacionados (tri y bidimensional), tienen realidad física. En el caso general que estudiamos, la realidad física solo corresponde al espacio bidimensional.

Así, en la figura 2.2, representativa del n -edro de referencia de las variables x en figura 2.1, si se corta al hiperelipsoide HE , que hemos supuesto canónico, por un plano coordenado cualquiera $Ox_ix_j = Xx_ix_j$, se obtendrá una elipse canónica de semiejes a_i, a_j , pero el eje Ox_i de la variable x_i tiene existencia real, así como el eje Ox_j de la variable x_j . Ambos ejes definen un plano que coincide con el del levantamiento. Llevando sobre éste el origen O al punto (X_i, X_j) conservando el paralelismo con el sistema general OXY , se obtiene (figura 3.3) un sistema local Ox_ix_j , y sobre él representada la elipse de error según

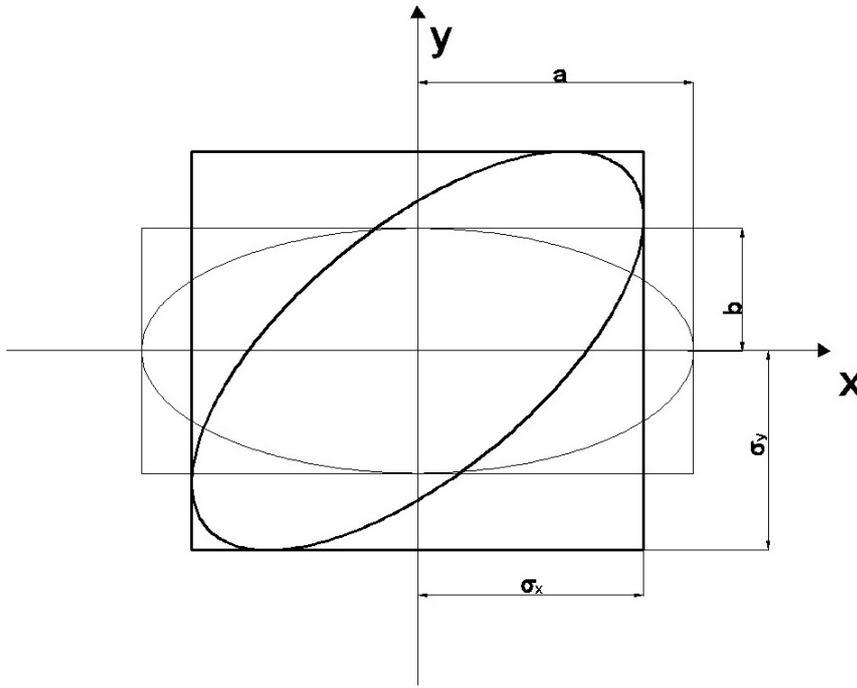


Figura 2.3: Elipses canónica y no canónica. En trazo grueso la no canónica

$$\frac{x_i^2}{a_i^2} + \frac{x_j^2}{b_j^2} \equiv \frac{x_i^2}{\sigma_{xi}^2} + \frac{x_j^2}{\sigma_{xj}^2} = 1 \quad (47)$$

por teoría conocida y donde hemos supuesto el coeficiente de homotecia $C = 1$ para simplificar.

Pero si la sección plana fuera no canónica, la elipse sección hubiera resultado de la forma

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2\sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) \quad (48)$$

en ambos casos la proyección ortogonal de la elipse sobre los ejes locales de coordenadas por tangentes paralelas a aquellos da lugar a rectángulos circunscritos cuyos semilados valen siempre las desviaciones típicas σ_{xi} , σ_{xj} , esencialmente variables según la situación de rotación del sistema de ejes, pero conocidas por serlo σ_{xx} . Es obvio que resultados idénticos se obtienen girando los ejes $Oxixj$ en el plano que los contiene, sin perder realidad física.

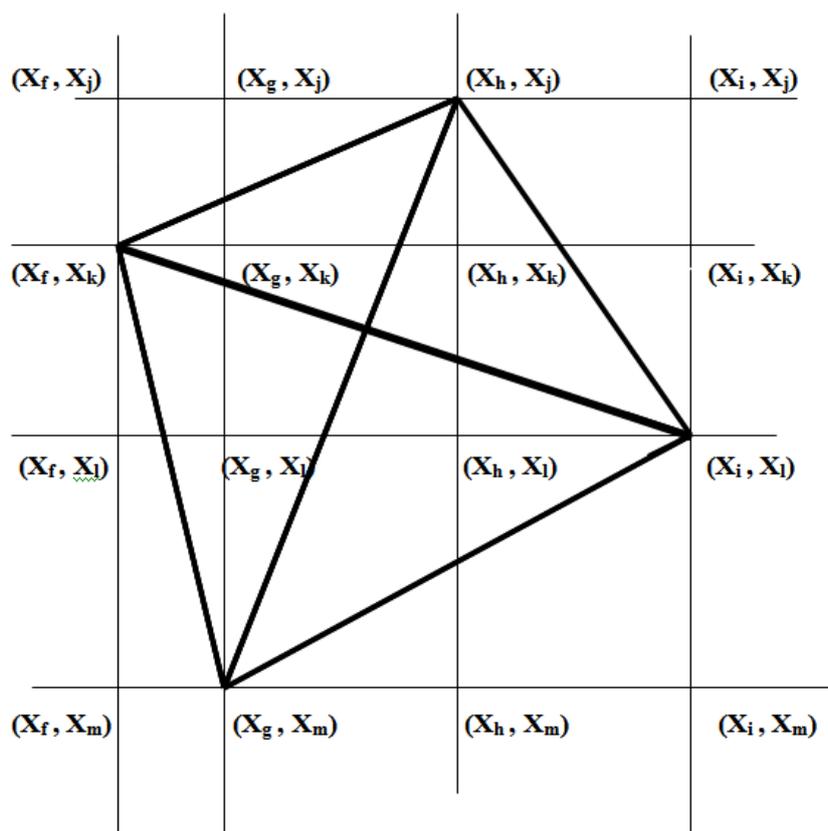


Figura 2.4: Red local de 4 vértices básicos iniciales y 12 correlativos

Si el punto (X_i, X_j) es un vértice de la red, (47) o (48) será su elipse de error, geométrica y analíticamente según es bien conocido. Pero si no pertenece a la red corresponderá a uno de los nudos de la malla rectangular de la figura 2.4, donde se han representado cuatro vértices libres de una red local formando un trapezoido irregular.

En dicho supuesto, puede densificarse la red con 12 puntos más, llamados correlativos, según es evidente en la figura. Y la información de cada uno de ellos tendrá la misma calidad que la de los cuatro vértices básicos iniciales, supuesto correctamente realizado el imprescindible trabajo de replanteo en el terreno. La densificación lograda es claramente importante. Y ello considerando como venimos haciendo solamente el caso planimétrico. La elemental extensión a tres dimensiones da lugar lógicamente a una densificación mucho mayor.

Con menos inmediatez, pero también es asequible según veremos en lo que sigue, acceder a análoga información con el mismo poder de afirmación asociada a cualquier punto arbitrario replanteable en el espacio abarcado por la red, formando o no parte de ella, mediante rotaciones de ejes adecuados y sin perder la realidad física. Un primer procedimiento (Figura 2.5) consistirá en rotar los ejes locales Axy y Bxy correspondientes a dos vértices A y B de una red local ajustados por Gauss-Marcov un mismo ángulo arbitrario δ hasta $Ax'y'$ y $Bx'y'$.

Demostraremos que la operación conserva la realidad física, define dos nuevos puntos en M , intersección de los sentidos positivos de By' y Ax' y N (no representado), intersección de los negativos de Bx' y Ay' , e interpreta sus datos métricos y figuras de error con el mismo poder de afirmación obtenido en A y B , supuesto efectuado un replanteo correcto de M , N .

Se conserva la ortogonalidad de los ejes locales en M y N y puede extenderse la densificación obtenida variando el ángulo arbitrario δ a cualquier punto del arco capaz de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ sobre AB . Es decir, la circunferencia de dicho diámetro.

Finalmente, y ello es esencial en la teoría y praxis que nos ocupa, se podrá aplicar Análisis Multivariante en todos los aspectos y particularizaciones estudiados y resolver por variables separadas las integrales múltiples formadas agregando a las ya existentes las coordenadas de los vértices y las longitudes de los lados de los rectángulos de error asociados a los puntos de densificación. Para ello bastará con volver a referir toda la red, incluyendo los nuevos puntos densificados, al sistema de referencia inicial OXY . Así, será preciso deshacer la rotación practicada mediante una nueva rotación adicional de argumento $-\delta$ a los sistemas locales en A , B y M .

La cobertura del espacio ocupado por la red mediante las dos técnicas de densificación descritas es ampliamente suficiente en la gran mayoría de los casos, como puede apreciarse en la representación de la figura 2.6.

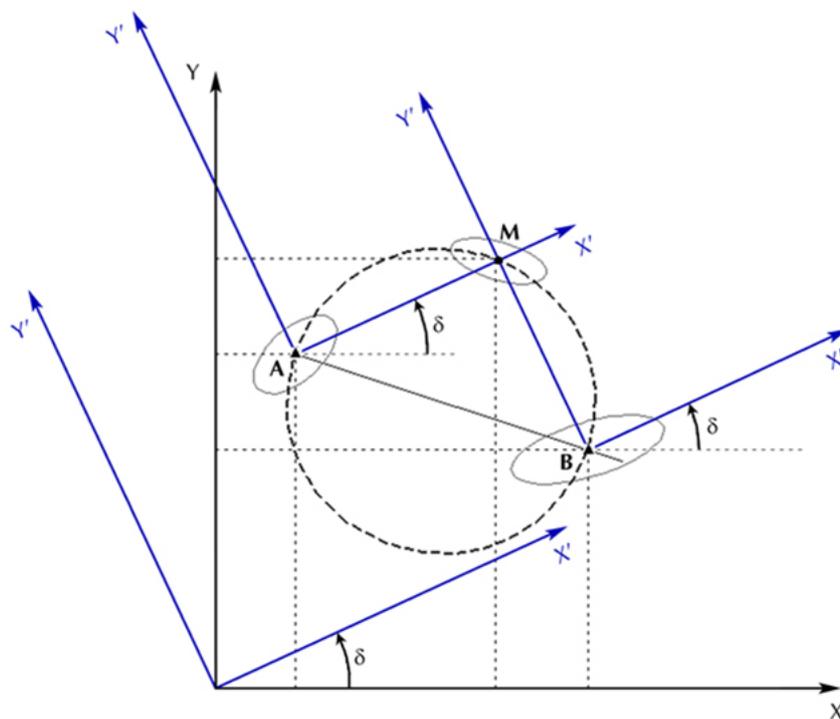


Figura 2.5: Giro δ de los ejes coordenados

No obstante, puede surgir ocasionalmente la necesidad de estudiar algún punto o grupo de puntos específico no cubierto por la metodología anterior. En este caso, es inevitable acudir a rotaciones de distintos argumentos, lo que obliga a trabajar en parte del proceso con coordenadas oblicuas, lo que es generalmente laborioso. Así, en figura 2.7, dos rotaciones de argumentos δ y γ en los sistemas locales de referencia en A y B definen como en el caso anterior el punto de densificación M .

En consecuencia, el sistema de referencia local $M_{x'Ay'B}$ del vértice de densificación M resulta de ejes oblicuos formando un ángulo

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi - (\delta - \gamma) \quad (49)$$

Ello obliga a trabajar, según se dijo, en ejes oblicuos, manteniéndose la ineludible necesidad final de pasar de nuevo a los ejes ortogonales OXY del levantamiento

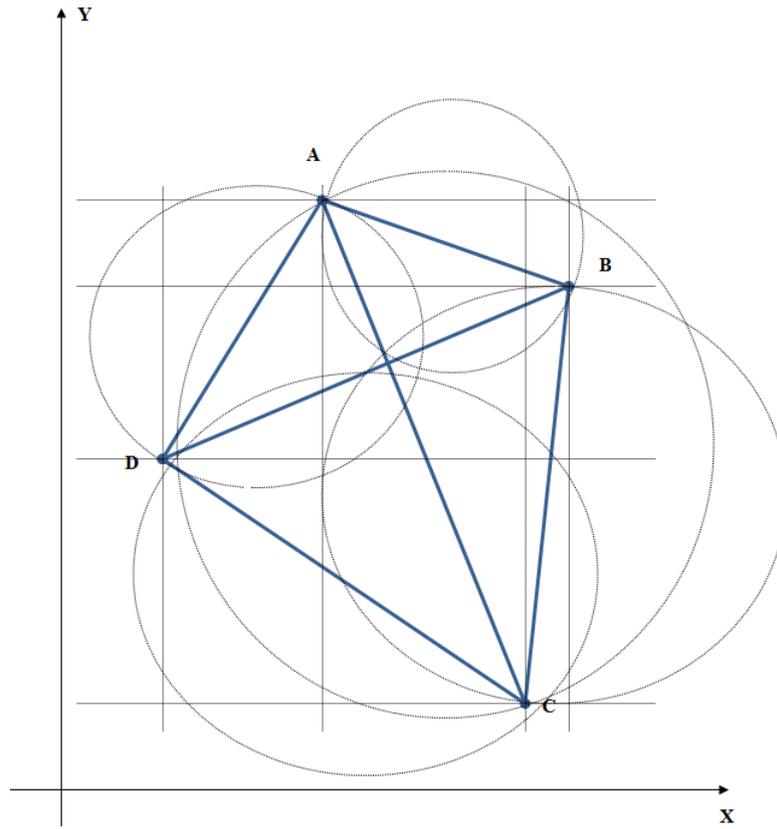


Figura 2.6: Red principal, vértices correlativos y arcos capaces

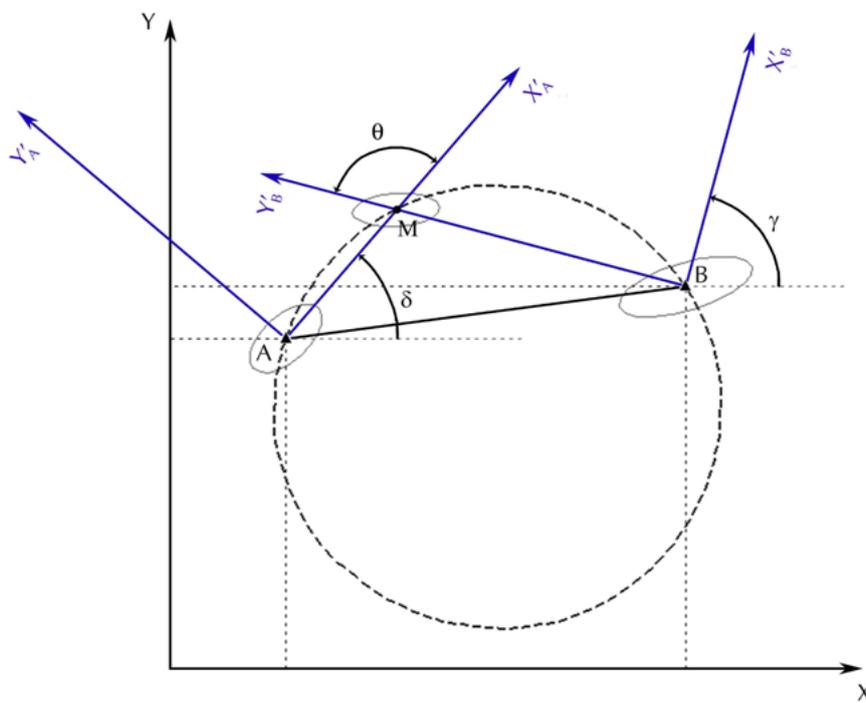


Figura 2.7: Giro δ y γ de los ejes coordenados

junto con la totalidad restante de vértices y puntos de densificación mediante la o las oportunas rotaciones, según se deducirá y formulará más adelante, y a efectos de poder aplicar Análisis Multivariante.

El procedimiento es sencillo, aunque prolijo, y a poco grado de reiteración que requiera el trabajo es aconsejable proveerse del adecuado apoyo informático específico en evitación de errores y ahorro de atención y tiempo.

Como en el caso anterior y con el mismo condicionado y poder de afirmación, puede extenderse la aplicación a cualquier punto del arco capaz de ángulo θ sobre AB .

De acuerdo con lo expuesto y sin necesidad de nuevos trabajos de campo, con excepción de los inevitables y generalmente sencillos replanteos de densificación que sean menester, es posible acceder con resultados totalmente homogéneos en rigor, precisión e interpretación, a la determinación de la geometría de cualquier punto y cualquier zona de la superficie abarcada por la red local inicial. Es posible, y puede considerarse como un avance destacable, modelizar con las condiciones técnicas de calidad descritas, espacios prácticamente “sólidos”, con miles de puntos, utilizando instrumentación de barredores láser.

Es banal la ampliación y generalización de la doctrina y praxis planimétrica descrita a tres dimensiones agregando por separado la altimetría, no ofreciendo dificultad sensible tampoco su aplicación directamente tridimensional.

Y nada más habría que agregar en lo concerniente al supuesto determinista o de redes ligadas, de aplicación formalmente exclusiva en la práctica actual de la profesión, y que hemos venido considerando hasta ahora. Sin embargo, adelantando ideas y desarrollos que figuran en las páginas que siguen, ello supone aceptar en primer lugar error cero en todos los vértices de apoyo, que implica una contradicción básica en sí mismo. Y si se considera posible la existencia de error mensurable y apreciable, que pueda llegar a influir en los resultados finales de un posible trabajo, presente o futuro en un previsible horizonte exigencia creciente,

es inevitable modificar las hipótesis de partida y considerar a la red a lo menos como dividida en dos zonas que llamaremos “de distinta significación”, a saber: la zona de los vértices de apoyo, que supondremos de error mínimo, pero existente, y la de los vértices libres, a determinar.

El problema se resuelve según se verá en las páginas que siguen, mediante la aplicación fraccionada del algoritmo de las redes libres, solución inversa generalizada recíproca, resolviendo cada zona con dos matrices específicas de criterio distintas.

En cualquier caso y tratándose de una red libre se tendrá

$$R(S) = (n - d) \implies \text{incompleto} \quad (50)$$

$$d = \text{defecto de rango}$$

y escribiremos sucesivamente, según sabemos

$$x = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot K$$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q_K \cdot (S^- \cdot A^T \cdot P)^T = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q \cdot P \cdot A \cdot S^- = \\ &S^- \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot S^- = S^- \cdot S \cdot S^- \quad (51) \end{aligned}$$

$$Q_{xx} = S^-$$

siendo S^- matriz inversa generalizada recíproca arbitraria.

Y por consiguiente

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^- \quad (52)$$

existiendo infinitas soluciones. Entre ellas, la solución con matriz pseudoinversa única S^+

$$\sigma_{XX} = \sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^+ \quad (53)$$

generalización de (11), pero siempre con defecto de rango = d

$$R(S) = R(S^-) = R(S^+) = R(\sigma_{xx}) = n - d \quad (54)$$

resultando nulo el determinante de la matriz varianza covarianza a posteriori σ_{xx}

$$|\sigma_{xx}| = 0 \quad (55)$$

Con lo que, en el caso de Red Libre, las expresiones (44), (45) y (46) no tienen sentido. No es posible aplicar Análisis Multivariante en la misma forma que lo hemos hecho en la Red Ligada. Es razonable porque, por definición, el vector x de variables-correcciones es indeterminado, sus componentes adoptan infinitos valores, y no existe distribución estocástica específica alguna. No existe hiperelipsoide ni hipercuádrica de error en el espacio E^n análogos a los estudiados en el caso determinista, red ligada.

No obstante, aplicada que sea una solución inversa generalizada a la red, lleva implícita la formulación de una matriz varianza covarianza σ_{xx} de la forma (52), rango incompleto, como más adecuada para la red en presencia. Pero, en cualquier caso, ello equivale a determinar una descripción de los errores esperados en las variables x , estableciendo distribuciones normales para todas ellas y cifrando covarianzas y desviaciones típicas individualizadas.

Podrán formularse las expresiones análogas a (45) y (46)

$$x_p^T \cdot \sigma_{xx}^- \cdot x_p = x_p^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \cdot x_p = k^2 \quad (56)$$

donde k es un coeficiente de homotecia adimensional, sin significación probabilística alguna.

Nada que ver con el parámetro C de (45). Pero sea cual fuere la solución adoptada para la red, la varianza a posteriori del observable de peso unidad $\sigma_0^2 = \frac{R \cdot P \cdot R}{m - R(S)}$ será invariante por definición de solución Gauss Marcov. S , matriz de diseño, es constante en todos sus elementos y la expresión (56) será una forma cuadrática

en E^n de tipo hiperelipsoide en que un número de ejes $d =$ defecto de rango de S tienen longitudes ilimitadas, infinitas. Es decir, un hipercilindro, recto único con hiperelipsoide directriz de $n - d$ dimensiones y d direcciones generatrices ortogonales entre sí, afectado de un coeficiente de homotecia arbitrario k .

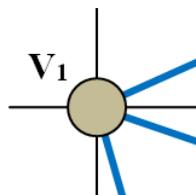
Sus secciones planas no paralelas a las generatrices del cilindro adoptan evidentemente la forma y expresión más general (48) y pueden considerarse elipses de error. Más propiamente y describiendo determinada realidad física, en algún caso las llamaremos de sensibilidad. Y a fortiori (56) será una figura de error de la red completa según rutina, representada por el afijo del vector X en E^n , única sea cual fuere la solución adoptada.

Avanzando un trecho más, veremos que la mejor solución (51) adoptada para la red puede resolverse mediante dos matrices, una inversa de Cayley aplicable a la zona de vértices libres a determinar, con lo que estamos en el caso anterior, y otra pseudoinversa, aplicable a los vértices llamados de apoyo o fijos, que se entiende como de error mínimo.

Y así estamos ya en condiciones de expresar el concepto de caso más general de resolución, densificación e interpretación del ajuste Gauss Marcov de una red local. Para fijar ideas, supongamos que se trata de la red planimétrica de cuatro vértices que venimos estudiando en esta publicación y otras anteriores. Sea su representación la figura 2.8.

Sean las dos zonas de distinta significación A y B , siendo A la correspondiente a los vértices a determinar V_1 y V_2 y B los puntos de apoyo V_3 y V_4 .

La zona A , vértices V_1 y V_2 señalados con un círculo opaco de trazo fino



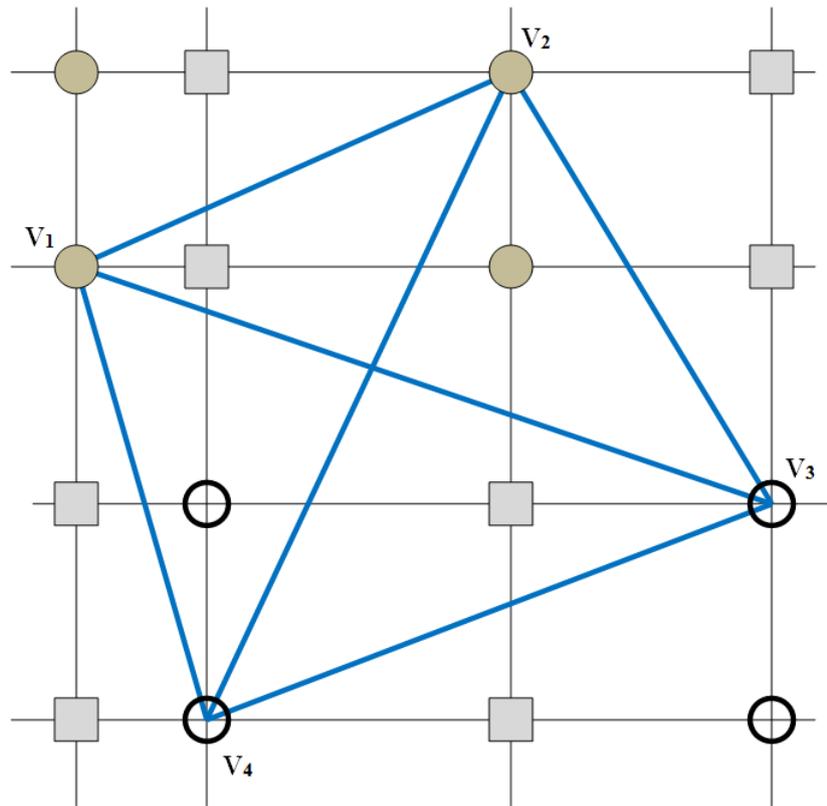
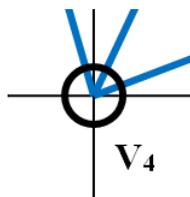


Figura 2.8: Densificación de la red planimétrica de cuatro vértices

se densifica con sus dos correlativos igualmente representados, con información probabilística, y, en su caso, con nuevos puntos definidos por arcos capaces, no representados.

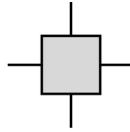
En la zona B , se determinan las elipses de sensibilidad, no probabilistas, de sus vértices $V3$ y $V4$, señalados con un círculo transparente de trazo grueso,



Se densifica la información con dos puntos más análogamente marcados y sus elipses de sensibilidad, utilizando según técnica conocida la abscisa de uno de los dos puntos y la ordenada del otro y viceversa.

Y con el fin de seguir acumulando información sobre la red, nada impide acudir a la solución pseudoinversa completa S^+ y obtener nuevas elipses, que llamaremos de

transición, referidas a puntos con abscisas procedentes de la zona A y ordenadas de la zona B y viceversa. No probabilística. Señalados en la figura con un rectángulo opaco de trazo fino,



Podría aplicarse la técnica de arcos capaces, pero con la densificación conseguida a través de todo lo que antecede y siempre contando con el imprescindible buen hacer del proyectista, creemos que la cuestión queda suficientemente enmarcada y ordenada en su aspecto conceptual. Procede ahora ocuparse de la deducción y establecimiento del algoritmo geométrico, algébrico y estadístico de aplicación práctica y normativa de interpretación.



Consideramos la hipercuádrlica de error más general en el espacio E^n , que para fijar ideas entendemos asociada a una red ligada, sin que ello suponga restricción alguna a su utilidad práctica, según se ha justificado en toda la exposición que antecede, resultando así un hiperelipsoide en general no canónico HE con centro en el origen de coordenadas. Del mismo modo supondremos la red planimétrica, siendo trivial su extensión a tres dimensiones. Así escribimos con la notación usual⁴.

$$HE = x_{n,1}^T \cdot \sigma_{xx_{n,n}}^{-1} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = C^2 \quad (57)$$

donde $C^2 = L \cdot \left(P(X) \cdot (2 \cdot \pi)^{\frac{1}{2} \cdot n} \cdot |\sigma_{xx}|^{\frac{1}{2} \cdot n} \right)^{-2}$

referida al n -edro euclídeo n -rectangular

$$O(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_j, \dots, x_k, x_l, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

Que se expresa también como

⁴Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT., "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada...". Expresión (76). *Opus Cit.*

$$HE = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{s^2} \cdot x = C^2 \quad (58)$$

a priori, que acostumbra a aplicarse con $s = 1$ según

$$HE = x_{n,1}^T \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot S \cdot x = C^2 \quad (59)$$

y como

$$HE = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{\sigma_0^2} \cdot x = C^2 \quad (60)$$

a posteriori

obteniéndose sucesivamente las expresiones standard para $C = 1$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot \sigma_{xx,n}^{-1} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot x = 1 \quad (61)$$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{s^2} \cdot x = 1 \quad (62)$$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot S \cdot x = 1 \quad (63)$$

$$HES = x_{n,1}^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{n,n} \cdot x_{n,1} = x^T \cdot \frac{S}{\sigma_0^2} \cdot x = 1 \quad (64)$$

Y todos los hiperelipsoides no canónicos HE (22),(23),(24),(25), y HES (26),(27),(28),(29) respectivamente estarán inscritos según se demostró en el trabajo anteriormente citado en hiperparalelepípedos rectos rectángulos simétricos con respecto al origen de coordenadas, de aristas paralelas a los ejes de longitud

$$l_i = 2 \cdot k \cdot \sigma_{xi} \quad (65)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots n$$

donde l_i , longitud de la arista genérica paralela al eje Ox_i , y $C = k$, coeficiente de homotecia, siendo las desviaciones típicas σ_{xi} esencialmente variables para un mismo hiperelipsoide, dependiendo de la orientación de los ejes del n-edro de referencia escogido.

Del mismo modo, cada hiperelipsoide tendrá asociada una hiperpodaria HP y HPS con la expresión y significado geométrico anteriormente estudiados⁵. Y solo cuando las hipersuperficies descritas asuman expresiones canónicas, los ejes de hiperpodarias e hiperelipsoides coincidirán con los del n-edro de coordenadas y sus longitudes constantes $2 \cdot a_i$ serán iguales a las aristas l_i y valdrán el doble del producto del coeficiente de homotecia k por las desviaciones típicas σ_{xi} , en este caso y sólo en este caso también constantes, de las variables estocásticas componentes de x , vector de correcciones de las coordenadas de los vértices de la red representadas por las componentes del vector X . Se podrá escribir

$$l_i = 2 \cdot a_i = 2 \cdot k \cdot \sigma_{xi} \quad (66)$$

donde $a_i \equiv$ semieje de orden de hiperelipsoide e hiperpodaria. Habrá pues un solo hiperparalelepípedo como el definido que generará un solo conjunto de desviaciones típicas σ_{xi} . En cualquier caso, la red se representará y estudiará como el afijo del vector X en el espacio E^n .

Y particularizando cuanto antecede para $n \in 2, 3$ se obtendrán los supuestos bi y tridimensionales con realidad física y aplicación usual⁶. Así, en planimetría, la elipse genérica de error de un vértice (X_i, X_j) se obtendrá seccionando HE o en su caso HES por el hiperplano coordenado bidimensional $Ox_i x_j$, coincidente con el del levantamiento porque ambos ejes Ox_i, Ox_j , están sobre él. La extensión a tres dimensiones es trivial.

Y considerando una red planimétrica genérica, según antes se indicó, refirámonos seguidamente a la figura 2.9, que es la figura 2.5 con alguna adición ahora necesaria.

⁵Ibídem. Pg. 6 y sig.

⁶Ibídem. Pg. 69 y sig.

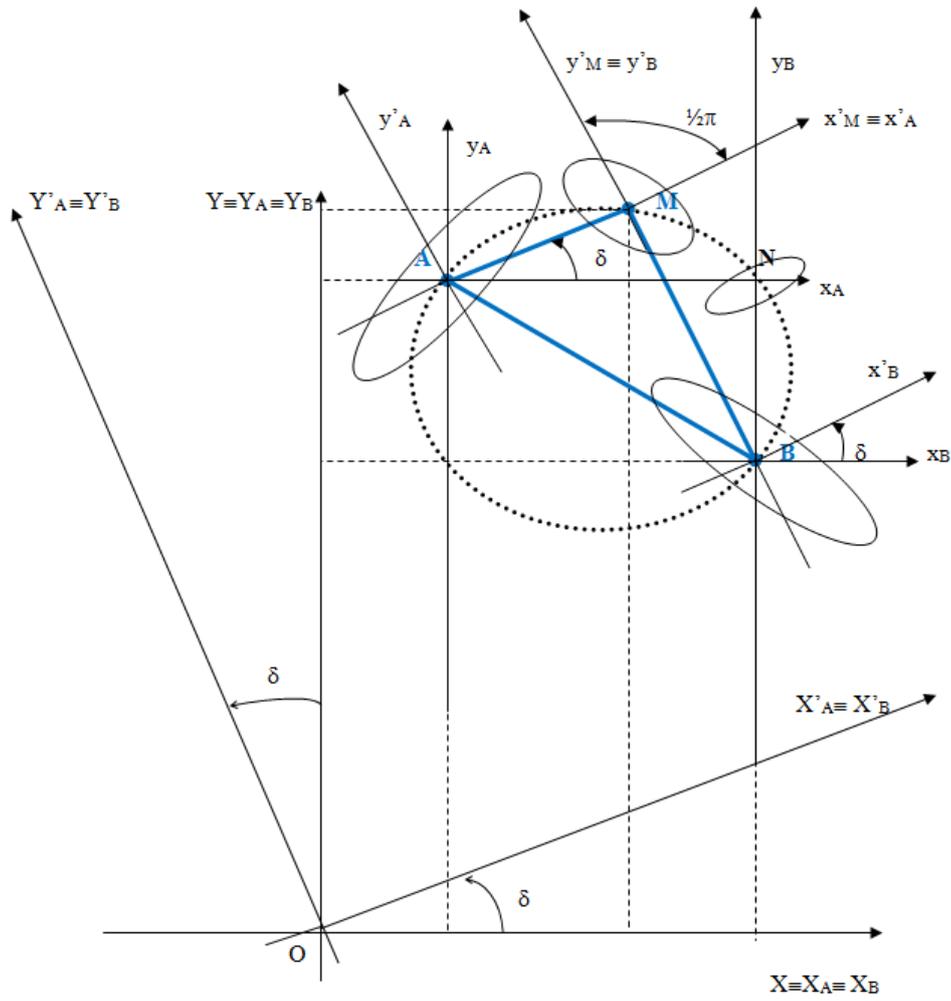


Figura 2.9: Red planimétrica genérica

Suponemos que en la red planimétrica de que se trata (x_i, x_j) y (x_k, x_l) representan las variables correspondientes a las correcciones respectivas de las coordenadas de dos vértices libres arbitrarios de ella, prefiriéndose la notación adoptada a la más restrictiva $(i, i + 1 = j)$ y $(k, k + 1 = l)$ y sean estos los $A (X_i, X_j) \equiv (X_A, Y_A)$ y $B (X_k, X_l) \equiv (X_B, Y_B)$ representados sobre el plano del levantamiento y referidos a los ejes cartesianos rectangulares OXY .

Aceptamos así mismo la asociación de hiperplanos bidimensionales secciones de los HE y HES y el del levantamiento, según el criterio establecido para obtener las elipses de error de vértice. Se representan sobre el plano las elipses genéricas de vértice asociadas a A y B , referidas a sus ejes específicos Ax_Ay_A, Bx_By_B . En principio, de acuerdo con la teoría expuesta y según sea la expresión de HE, HES , utilizada, se tratará de figuras de error a priori o a posteriori. Se trata de definir geoméricamente y deducir la expresión del recinto de error de un punto del espacio sobre el que se ha observado y medido la red, cuyo lugar geométrico es el arco capaz de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ sobre AB . Es decir, la circunferencia de dicho diámetro. Sea dicho punto $M (X_M, Y_M)$, de coordenadas supuestas conocidas a priori.

Sea

$$m = tg (\delta) = \frac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A} \quad (67)$$

conocida.

M resulta ser la intersección de los ejes $Ax'_A \equiv Mx'_M \equiv x'_A \equiv x'_M$ y $By'_B \equiv My'_M \equiv y'_B \equiv y'_M$, resultado de rotar los Ax_A y By_B el argumento δ , conocido (67). Ello es evidente de la igualdad de diversos ángulos en la figura. Así, el ángulo $\angle x_B B x'_B$ con vértice en B tiene los lados paralelos al $\angle x_A A x'_A$ con vértice en A . Ambos son iguales y valen δ . Como consecuencia, la rotación sinistrorsum de argumento δ de los sistemas cartesianos ortogonales Ax_Ay_A, Bx_By_B alrededor de sus orígenes A, B , describe y resuelve la cuestión.

La figura de error (elipse) de M ($x'_M \equiv x'_A$, $y'_M \equiv y'_B$) resulta así ser la definida en dicho punto como nudo de la malla rectangular generada por (59) para fijar ideas (igualmente se podría haber tomado (58), más general), tras afectar al sistema Ax_Ay_A de la transformación geométrica indicada, de expresión analítica

$$x'_A = x_A \cdot \cos \delta + y_A \cdot \sen \delta \quad (68)$$

$$y'_A = -x_A \cdot \sen \delta + y_A \cdot \cos \delta \quad (69)$$

y al Bx_By_B de la análoga

$$x'_B = x_B \cdot \cos \delta + y_B \cdot \sen \delta \quad (70)$$

$$y'_B = -x_B \cdot \sen \delta + y_B \cdot \cos \delta \quad (71)$$

rotaciones ambas sinistrorsum de argumento δ .

Y se accede con todo rigor a la interpretación geométrica y expresión algébrica del recinto de error del punto M (x'_M , y'_M), que no es vértice de la red ni ha sido físicamente levantado desde ella, practicando en primer lugar al hiperelipsoide HE o en su caso al HES , la transformación definida por las expresiones (68), (69), (70), (71), representativa de dos giros sinistrorsum de argumento δ , simultáneos e independientes, en los planos coordenados Ox_Ay_A y Ox_By_B . Posteriormente y en forma análoga a lo establecido para los vértices de la red, la figura (elipse) de error deseada se obtendrá seccionando al hiperelipsoide HE' o en su caso al HES' así transformado por el plano coordenado $Ox'_M y'$.

Los cuadros de doble entrada que representan las rotaciones directa e inversa consideradas son los que siguen.

	x_A	y_A	
x'_A	$\cos \delta$	$\text{sen } \delta$	
y'_A	$-\text{sen } \delta$	$\cos \delta$	
	x_B	y_B	
x'_B	$\cos \delta$	$\text{sen } \delta$	
y'_B	$-\text{sen } \delta$	$\cos \delta$	

(72)

Desarrollemos a continuación la expresión (59) correspondiente a HE a priori con $s^2 = 1$ según

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i \cdot x_j & \dots & \dots & x_k \cdot x_l & \dots & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ x_j \\ \dots \\ x_k \\ x_l \\ \dots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = C^2$$

(73)

y es claro que se puede expresar la transformada HE' de HE después de las dos rotaciones descritas, siendo x_m un eje (o variable) cualquiera antes de la transformación y x'_m el mismo después de la transformación, escribiendo:

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_i = x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta$$

$$x_j = x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \text{cos } \delta \quad (74)$$

$$x_k = x'_k \cdot \text{cos } \delta - x'_l \cdot \text{sen } \delta$$

$$x_l = -x'_k \cdot \text{sen } \delta + x'_l \cdot \text{cos } \delta$$

Y teniendo en cuenta que la transformada deducida, aplicada a la figura 2.9 se escribirá

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_A = x'_A \cdot \text{cos } \delta - y'_A \cdot \text{sen } \delta$$

$$x_A = x'_A \cdot \text{sen } \delta + y'_A \cdot \text{cos } \delta \quad (75)$$

$$x_B = x'_B \cdot \text{cos } \delta - y'_B \cdot \text{sen } \delta$$

$$y_B = x'_B \cdot \text{sen } \delta + y'_B \cdot \text{cos } \delta$$

particularizando i, j, k, l en las coordenadas (correcciones) planas de A, B

Y así la transformada HE' de HE en (73), utilizando las inversas (74) deducidas de (72) será la expresión (76).

Y aceptando la asociación ejes (variables) en el espacio E^n y ejes (variables) en el plano del levantamiento E^2 , el recinto de error de M , considerado como punto correlativo definido por la intersección de los ejes $x'_i \equiv x'_A$ y $x'_l \equiv y'_B$ en la nueva malla rectangular generada, se obtendrá en forma de elipse según doctrina conocida cortando por el hiperplano bidimensional

$$\begin{aligned}
 & (x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta \quad x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta \quad \dots \quad x'_k \cdot \cos \delta - x'_l \cdot \text{sen } \delta \quad x'_k \cdot \text{sen } \delta + x'_l \cdot \cos \delta \quad \dots \quad x'_{n-1} \quad x'_n) \cdot \\
 & \left(\begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta \\ x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta \\ \dots \\ x'_k \cdot \cos \delta - x'_l \cdot \text{sen } \delta \\ x'_k \cdot \text{sen } \delta + x'_l \cdot \cos \delta \\ \dots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{array} \right) = C^2 \quad (76) \\
 & \cdot S.
 \end{aligned}$$

$$x'_m = 0$$

$$\forall m \neq i, l \quad (77)$$

es decir

$$(0 \ 0 \ \dots \ x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ \dots \ -x'_l \cdot \sen \delta \ x'_l \cdot \cos \delta \ \dots \ 0 \ 0) \cdot$$

$$\cdot S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ \dots \\ -x'_l \cdot \sen \delta \\ x'_l \cdot \cos \delta \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C^2 \quad (78)$$

y sobre el plano del levantamiento se tendrá en definitiva la elipse de incertidumbre a priori de M , obtenida a partir del hiperelipsoide HE' con el poder de afirmación que corresponda a C , del que después nos ocuparemos, y expresada según

$$(x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ -x'_l \cdot \sen \delta \ x'_l \cdot \cos \delta) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ -x'_l \cdot \sen \delta \\ x'_l \cdot \cos \delta \end{pmatrix} =$$

$$= C^2 \quad (79)$$

siendo $s_{rs} = s_{sr}$ los elementos de orden rs y sr en la matriz simétrica de diseño S .

Y en forma simplificada se escribirá:

$$x'^T_{i\delta} \cdot S_{ijkl} \cdot x'_{i\delta} - C^2 = 0 \quad (80)$$

o bien, particularizando para M en la figura 2.9

$$(x'_M \cdot \cos \delta \quad x'_M \cdot \text{sen } \delta \quad -y'_M \cdot \text{sen } \delta \quad y'_M \cdot \cos \delta) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x'_M \cdot \cos \delta \\ x'_M \cdot \text{sen } \delta \\ -y'_M \cdot \text{sen } \delta \\ y'_M \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2$$

$$(81)$$

elipse de error a priori referida a los ejes cartesianos ortogonales $M x'_M y'_M$ con el poder de afirmación asociado a C . Standard para $C = 1$, según se ha reiterado.

y en forma simplificada

$$x'^T_{M\delta} \cdot S_{AB} \cdot x'_{M\delta} - C^2 = 0 \quad (82)$$

que resuelve la cuestión completamente. El cálculo y dibujo de los elementos de la elipse es ya inmediato.

La elipse a posteriori en virtud de la expresión (60) tendrá las expresiones análogas

$$(x'_M \cdot \cos \delta \quad x'_M \cdot \text{sen } \delta \quad -y'_M \cdot \text{sen } \delta \quad y'_M \cdot \cos \delta) \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x'_M \cdot \cos \delta \\ x'_M \cdot \operatorname{sen} \delta \\ -y'_M \cdot \operatorname{sen} \delta \\ y'_M \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (83)$$

$$x'^T_{M\delta} \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot S_{AB} \cdot x'_{M\delta} - C^2 = 0 \quad (84)$$

con $C = 1$, expresiones standard.

En su momento entraremos en la discusión y aplicación práctica de las expresiones que anteceden. No obstante, de antemano puede entenderse su importancia como instrumentos de elevada utilidad en diseño, proyecto, previsión e interpretación de resultados en Redes Locales y Microgeodesia. Entre otras prestaciones, permiten densificar la red en presencia con nuevos puntos a cuyas precisiones se tiene acceso con el mismo rigor que en los vértices, sin adición de trabajo de levantamiento de campo alguno. Es importante señalar que, por propia definición, el estimador σ_o^2 no se conoce a priori. Sin embargo, se presupone la red correctamente observada y cumplimentado ampliamente el F-Test. Así, siempre podrá establecerse como correcta hipótesis de cálculo la expresión $s^2 \cong \sigma_o^2 = 1$. En su defecto, $s^2 \cong \sigma_o^2$, más general.

Una aplicación importante es la correspondiente a $\delta = 0$.

Así, las elipses de error a priori y a posteriori asociadas al punto N ($x_N \equiv x_A$, $y_N \equiv y_B$) serán en la figura 2.9, particularizando en (81) y (83)

$$(x_N \quad 0 \quad 0 \quad y_N) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ 0 \\ 0 \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (85)$$

elipse a priori

$$(x_N \ 0 \ 0 \ y_N) \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ 0 \\ 0 \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (86)$$

elipse a posteriori.

Pero operando en (85) y (86) fácilmente se obtiene las expresiones más simplificadas

$$(x_N \ y_N) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (87)$$

elipse a priori

$$(x_N \ y_N) \cdot \frac{1}{\sigma_o^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = C^2 \quad (88)$$

elipse a posteriori

A los puntos como el N , nudos de la malla rectangular de la figura 2.9 generada por el conjunto de los ejes cartesianos rectangulares con orígenes en los vértices de la red, ejes de abscisas y ordenadas respectivamente paralelos entre sí, y coplanarios sobre el plano del levantamiento, se les conoce como vértices o puntos correlativos. Sus elipses de error serán “elipses correlativas”⁷.

La densificación de la red así generada es importante. En efecto, y en el caso planimétrico, se pasa de disponer de

$$\frac{1}{2} \cdot n = N = \text{número de vértices ajustados} = \text{número de “elipses de vértice”}$$

según el método que ya podemos llamar clásico, a

$$C_{2 \cdot N}^2 - 2 \cdot C_N^2 = \frac{(2 \cdot N)!}{(2 \cdot N - 2)! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{N!}{(N - 2)! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot N \cdot (2 \cdot N - 1)}{2} - 2 \cdot \frac{N \cdot (N - 1)}{2} = N^2$$

⁷ Cfr. M. CHUECA, ET ALT, “Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes”, pg. 91 y sig., Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.

N^2 elipses de vértice y correlativas donde $2 \cdot C_N^2$ corresponden a parejas de ejes de ordenadas o abscisas, paralelos, que generan “elipses impropias o de infinito” de las que no nos ocuparemos aquí.

El número de elipses correlativas será

$$N^2 \text{ elipses total} - N \text{ elipses de vértice} = N \cdot (N - 1) = \text{elipses correlativas}$$

En definitiva, se pasa de N elipses de vértice a N^2 elipses totales, con notable densificación de la red de puntos, de estación o correlativos, cuyo recinto de error es conocido.

La generalización a tres dimensiones es muy simple. En efecto, hemos visto que el caso planimétrico se genera a partir de una malla rectangular plana de lados paralelos a los ejes de coordenadas cuyos nudos son los vértices de la red y correlativos, cifrados como antecede. Es claro que el caso tridimensional se genera a partir de una malla paralelepípedica de aristas paralelas a los ejes de coordenadas cuyos nudos son también los vértices de la red y correlativos.

Y si se verifica ahora que

$$\frac{1}{3} \cdot n = N = \text{número de vértices} = \text{número de “elipses de vértice”}$$

podemos dividir la malla tridimensional total en N secciones planas paralelas a cada uno de los tres ejes pasando por un vértice de la red.

En dicha sección se definirá 1 vértice de la red y $N \cdot (N - 1)$ vértices correlativos.

En las N secciones se definirán N vértices de la red y $N^2 \cdot (N - 1)$ vértices correlativos.

Y en definitiva se contará con los N elipsoides de vértice iniciales, más $N^2 \cdot (N - 1)$ elipsoides correlativos, con lo que se alcanza una cifra de N^3 elipsoides en total, con notable densificación de la red de puntos, de estación o correlativos, cuyo recinto de error es conocido.

En otro orden de ideas, y volviendo al caso planimétrico, sabemos que la elipse de error de un vértice aislado (X_i, X_j) de una red local ajustada por Gauss-Marcov

puede expresarse en función de sus variables, correcciones o parámetros, sinónimos usuales de la misma realidad física, (x_i, x_j) , cuya matriz varianza covarianza σ_{xixj} se supone conocida, en la forma

$$(x_i \quad y_j) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xixi}^2 & \sigma_{xixj} \\ \sigma_{xixj} & \sigma_{xjxj}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} = C^2 \quad (89)$$

o bien

$$x_{ij}^T \cdot \sigma_{xixj}^{-1} \cdot x_{ij} - C^2 = 0 \quad (90)$$

siendo su expresión desarrollada

$$\sigma_{xj}^2 \cdot x_i^2 - 2 \cdot \sigma_{xixj} \cdot x_i \cdot x_j + \sigma_{xi}^2 \cdot x_j^2 - C^2 \cdot (\sigma_{xi}^2 \cdot \sigma_{xj}^2 - \sigma_{xixj}^2) = 0 \quad (91)$$

Y será preciso estudiar y establecer la relación entre las expresiones (87) y (88) con las (89), (90) y (91), si es que existe.

En principio, es claro que se trata de dos formas distintas de expresar el recinto de error de un punto perteneciente a una red. Formando parte de la red o considerándolo aislado. En principio, su realidad física y por consiguiente, su interpretación, deben ser distintas.

Pero si se puede expresar la matriz varianza covarianza de toda la red σ_{xx} en forma de banda según

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x3}^2 & \sigma_{x3x4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x3x4} & \sigma_{x4}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1)}^2 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n} & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_0^2 \cdot S^{-1} \quad (92)$$

pudiendo escribirse lo que sigue

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_3x_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_{ixj}} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot S^{-1} \quad (93)$$

y del mismo modo se tendrá

$$\sigma_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1x_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_3x_4}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_{ixj}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n}^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \quad (94)$$

siendo

$$\sigma_{x_{ixj}}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_{ixj}} \\ \sigma_{x_{ixj}} & \sigma_{x_j}^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{x_i}^2 \cdot \sigma_{x_j}^2 - \sigma_{x_{ixj}}^2} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{x_j}^2 & -\sigma_{x_{ixj}} \\ -\sigma_{x_{ixj}} & \sigma_{x_i}^2 \end{pmatrix} \quad (95)$$

pudiendo despejarse S que adopta la expresión

$$S = \sigma_0^2 \cdot \sigma_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x_1x_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x_3x_4}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x_{ixj}}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0^2 \cdot \sigma_{x \cdot (n-1) \cdot n}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & S_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{(n-1)\cdot n} \end{bmatrix} \quad (96)$$

y (87) y (88) podrán expresarse en la forma

$$(x_N \ y_N) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = x_N^T \cdot S_{il} \cdot x_N = C^2 \quad (97)$$

elipse a priori,

$$(x_N \ y_N) \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{il} \\ s_{il} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = x_N^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{il} \cdot x_N = x_N^T \cdot \sigma_{x_N y_N}^{-1} \cdot x_N = C^2 \quad (98)$$

elipse a posteriori que será de la forma (91), clásica y bien conocida, es decir

$$\sigma_{y_N}^2 \cdot x_N^2 - 2\sigma_{x_N y_N} \cdot x_N \cdot y_N + \sigma_{x_N}^2 \cdot y_N^2 - C^2 \cdot (\sigma_{x_N}^2 \sigma_{y_N}^2 - \sigma_{x_N x_N}) = 0 \quad (99)$$

que será standard para $C = 1$, como siempre.

Lograr la matriz (92) no es inasequible. Se trata de una aplicación del Problema de Diseño de Orden Dos (PD2) que ya hemos tratado ampliamente. *Siempre y por supuesto, estamos hablando de una red de alta calidad.* Pero en general es más aconsejable, y así se viene practicando en aplicaciones anteriores, alcanzar, o acercarse lo más posible a la matriz de criterio diagonal

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_0^2 \cdot S^{-1} = \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \text{diag } \sigma_{x_i}^2 = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (100)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots n$$

caso particular de (92)⁸ con covarianzas nulas que hemos tratado con detalle y permite aplicar con rigor y sencillez el Análisis Multivariante, fundamental en la predicción e interpretación de resultados. De nuevo el objetivo es lograr que los hiperelipsoides de error sean canónicos. En el límite, que sean hiperesferas. Y de cualquier forma, es inútil pretender, a lo menos en el estado actual de la ciencia y la tecnología, fórmulas y métodos de aplicación automática que transformen en pura rutina el Proyecto, Diseño, Ajuste e Interpretación de Resultados de una Red Local de Alta Precisión. Sigue (y creemos que seguirá) siendo una función de Ingeniería Superior con mucho de arte y de toma de decisiones lógicas y diferentes en cada caso.

Teoría y Praxis siguen avanzando y ahora de acuerdo con lo expuesto, la simple inspección de la figura 2.10, utilizada en anteriores publicaciones, si se refiriera a un caso real, revela una configuración de elipses de error heterogéneas, de alta excentricidad y ejes muy separados respecto a los de la malla de coordenadas locales, muy poco satisfactoria y que indefectiblemente ocasionará problemas.

Del mismo modo negativo podemos juzgar la figura 2.10, también procedente de trabajos anteriores⁹. Es intuitivo que debe perseguirse una estructura a lo menos con el aspecto de la figura 2.11, trazada a partir de la figura 2.9. Es claro que supuesta corregida de escala, enormemente aumentada en las figuras de error respecto a la del levantamiento.

⁸ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas”. Pg 55, expresión (146) y sig. *Opus cit.*

⁹ Cfr. M. CHUECA, ET ALT, “Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes”, Pg. 91. *Opus Cit.*

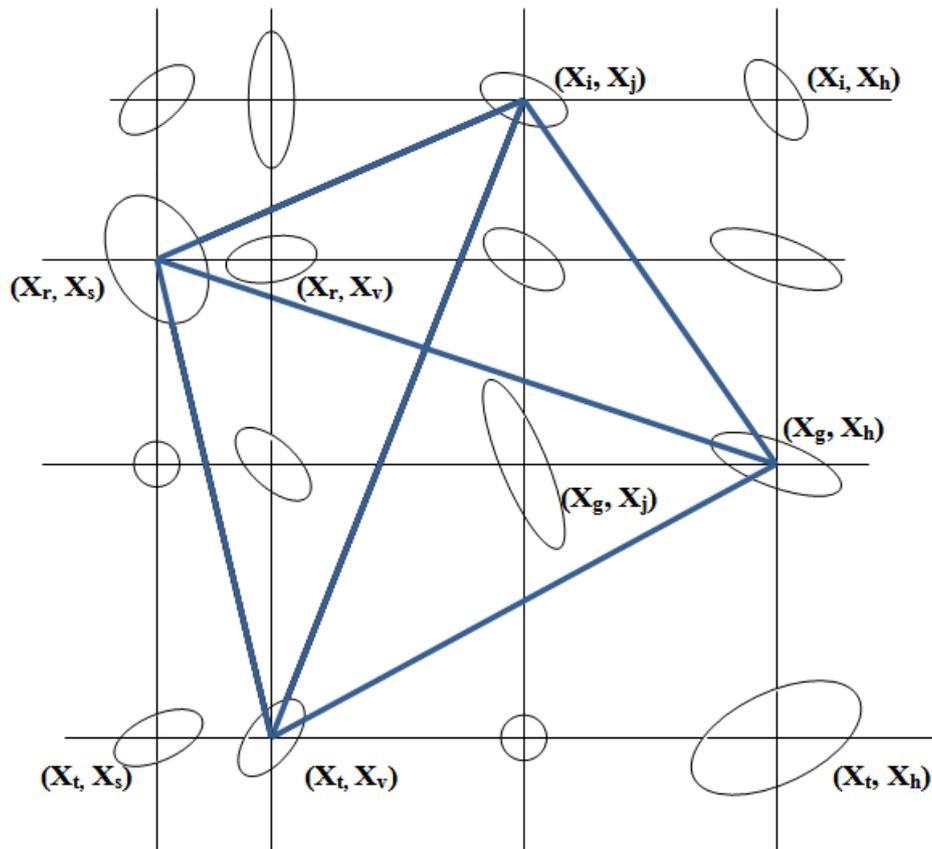


Figura 2.10: Red principal y vértices correlativos

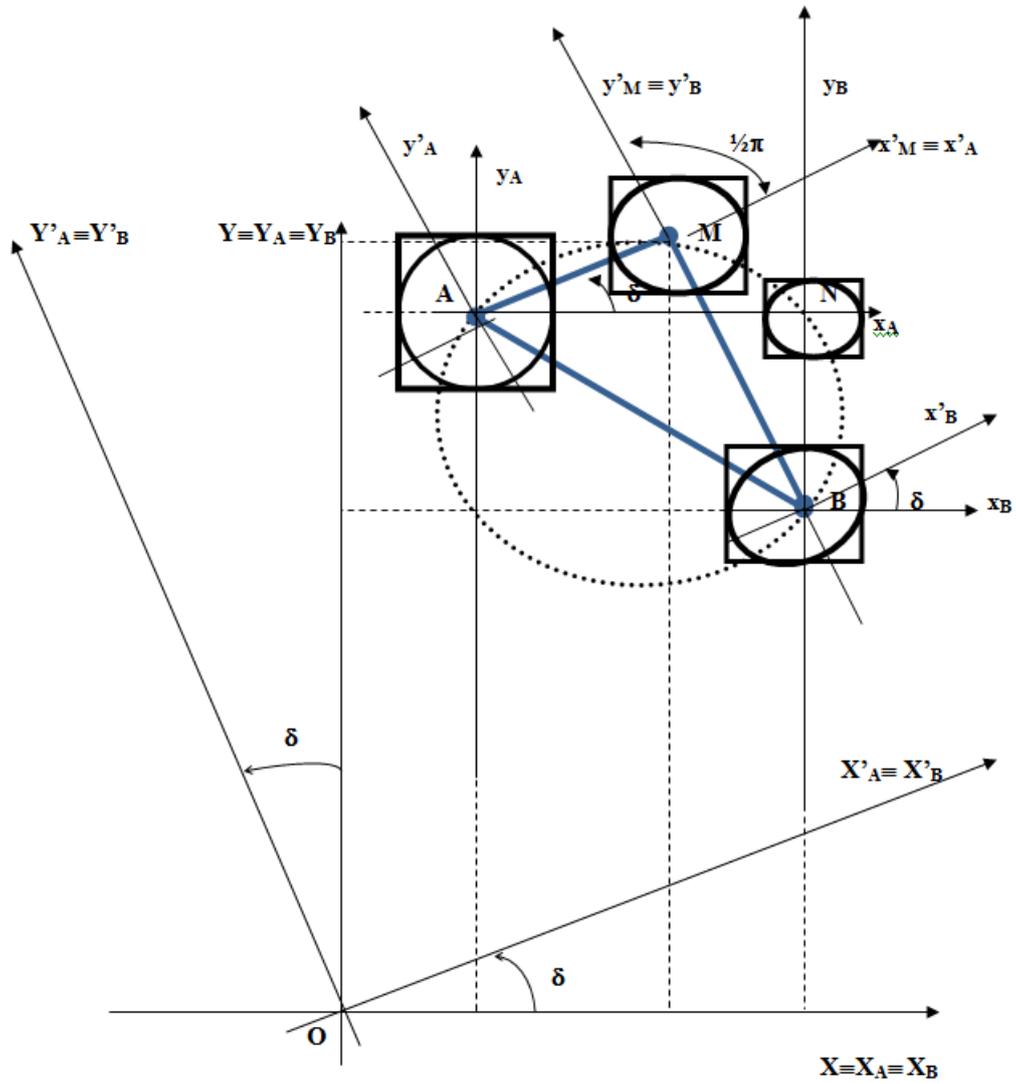


Figura 2.11: Red principal y vértice M perteneciente al arco capaz $\frac{\pi}{2}$

En ella las elipses son de muy escasa excentricidad y sus ejes aproximadamente paralelos a los de la malla de referencia. Sus rectángulos circunscritos sugieren una geometría pseudocanónica y puede aventurarse que sus lados son de longitudes muy aproximadas a las de los ejes de las elipses e iguales así mismo a un múltiplo arbitrario, según poder de afirmación deseado, de las desviaciones típicas de las coordenadas de los vértices, de acuerdo con teoría conocida¹⁰. Con todo ello es posible aplicar con buen éxito el Análisis Multivariante, objetivo esencial de este trabajo. En definitiva, y siempre volviendo a lo mismo, es inútil confiar en el gabinete para subsanar errores de campo y solamente una observación de alta calidad permitirá la obtención y, sobre todo, la interpretación de resultados con el rigor y nivel de afirmación deseables.

En las figuras 2.9 y 2.11 la malla de trama rectangular inicial se ve modificada evidentemente por cada vértice correlativo que se adicione con submallas, también rectangulares, pero formando ángulos genéricos δ con respecto a la básica. Es claro que ello no contradice sino corrobora el modelo geométrico establecido de correspondencia entre ejes de las hiperfiguras y ejes locales de los vértices. Una pareja de ejes girados δ en su hiperplano bidimensional coordinado en el hiperelipsoide deben representarse en el plano del levantamiento como girados también con respecto a la malla rectangular inicial básica.

Pero en figura 2.11 los rectángulos de error se han trazado paralelos a la malla rectangular básica. Ello es necesario para los cálculos ulteriores de interpretación y aplicación de las integrales definidas múltiples del algoritmo de análisis e interpretación bien conocido. En consecuencia, será preciso referir todas y cada una de las elipses correlativas establecidas a las orientaciones básicas mediante una rotación final de argumento genérico $-\delta$. Con la notación empleada su expresión será:

$$x''_M = x'_M \cdot \cos \delta - y'_M \cdot \sen \delta \quad (101)$$

¹⁰ *Cfr.* M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS...". Pg. 69 y sig. *Opus cit.*

$$y''_M = x'_M \cdot \text{sen } \delta + y'_M \cdot \text{cos } \delta \quad (102)$$

El cuadro de doble entrada que representa las rotaciones directa e inversa consideradas es el que sigue.

	x'_M	y'_M	
x''_M	$\text{cos } \delta$	$-\text{sen } \delta$	(103)
y''_M	$\text{sen } \delta$	$\text{cos } \delta$	

Y bastará con sustituir en (81) y (82)

$$x'_M = x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta \quad (104)$$

$$y'_M = -x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \text{cos } \delta \quad (105)$$

obteniéndose las expresiones finales de las elipses correlativas de error a priori y a posteriori mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} & [(x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{cos } \delta \quad (x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ & (x''_M \cdot \text{sen } \delta - y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (-x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{cos } \delta]. \end{aligned}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{cos } \delta \\ (x''_M \cdot \text{cos } \delta + y''_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (x''_M \cdot \text{sen } \delta - y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (-x''_M \cdot \text{sen } \delta + y''_M \cdot \text{cos } \delta) \cdot \text{cos } \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (106)$$

elipse correlativa a priori del punto M referida a los ejes $Ox''y''$, que son paralelos y forman parte de la malla rectangular inicial Oxy . Puede (y debe) perfectamente suprimirse el superíndice y escribir

$$\begin{aligned}
 & [(x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \cos \delta \quad (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \sen \delta \\
 & (x_M \cdot \sen \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \sen \delta \quad (-x_M \cdot \sen \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \cos \delta \\ (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \sen \delta \\ (x_M \cdot \sen \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \sen \delta \\ (-x_M \cdot \sen \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (107)
 \end{aligned}$$

y del mismo modo se escribirá

$$\begin{aligned}
 & [(x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \sen \delta) \cdot \cos \delta \quad (x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \sen \delta) \cdot \sen \delta \\
 & (x''_M \cdot \sen \delta - y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \sen \delta \quad (-x''_M \cdot \sen \delta + y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \sen \delta) \cdot \cos \delta \\ (x''_M \cdot \cos \delta + y''_M \cdot \sen \delta) \cdot \sen \delta \\ (x''_M \cdot \sen \delta - y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \sen \delta \\ (-x''_M \cdot \sen \delta + y''_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [(x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \cos \delta \quad (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \sen \delta \\
 & (x_M \cdot \sen \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \sen \delta \quad (-x_M \cdot \sen \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]. \\
 & \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \cos \delta \\ (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \sen \delta) \cdot \sen \delta \\ (x_M \cdot \sen \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \sen \delta \\ (-x_M \cdot \sen \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2 \quad (109)
 \end{aligned}$$

expresiones de la elipse correlativa a posteriori del punto M . Con la misma connotación anterior respecto a los ejes. Y es trivial que, por tratarse de las mismas elipses giradas en su plano, tanto (81), (106) y (107) como (83), (108)

y (109), tres a tres, tienen los mismos ejes. Debe tenerse en cuenta al aplicar Análisis Multivariante para evitar cálculos innecesarios.

En cualquier caso y para $C = 1$, elipses standard. Y es inmediato comprobar que para $\delta = 0$ se obtienen las expresiones (87),(88),(97),(98), como debía suceder.

Es conveniente subrayar que, como puede inferirse de la figura 2.6, aún cuando se trate de una red de pocos vértices, es normalmente suficiente la densificación de puntos correlativos que permite el método de los arcos capaces de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ expuesto para obtener la información necesaria en trabajos usuales, incluso de alta precisión, con la no pequeña ventaja de utilizar siempre coordenadas cartesianas rectangulares y poder replantear en su caso cualquier punto desde los extremos fijos de una base arbitraria AB (fig. 2.9).

Se trata de una práctica asequible con alta precisión de visuales ortogonales y paralelas a los ejes AN y BN , de azimutes π y $2 \cdot \pi$ (determinación de puntos correlativos propiamente dichos como el N) o bien del caso más amplio de visuales de azimutes ortogonales $\frac{1}{2} \cdot \pi \pm \delta$ y $2 \cdot \pi \pm \delta$. (Extensión de puntos correlativos como el M). En la figura 2.9.

$$\text{Azimut de } AN = \theta_{AN} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Azimut de } BN = \theta_{BN} = 2 \cdot \pi$$

$$\text{Azimut de } AM = \theta_{AM} = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\text{Azimut de } BM = \theta_{BM} = 2 \cdot \pi - \delta \quad (110)$$

El caso más general, con utilización de ejes oblicuos, que permite acceder a cualquier punto del espacio concernido por la red, es mucho más prolijo en cálculo, observación y replanteo en su caso. Por tanto debe reservarse para situaciones en las que realmente no sea bastante con la primera alternativa, *siendo en la práctica fundamental disponer de un software de suficiente calidad que resuelva el problema,*

con transformación automática de coordenadas cualquiera que sea el supuesto. Más adelante facilitaremos y aclararemos la cuestión.

La interpretación y valoración estadística y probabilística de los resultados obtenidos requiere, según ya se adelantó, una red que pueda calificarse como de alta calidad. No insistiremos más sobre ello, pero establecido sea que una matriz de varianzas de criterio banda lo más aproximada posible a la diagonal (100) es definitivamente deseable y, en todo caso, unos autovalores μ_i de la matriz S comprendidos entre valores extremos muy cercanos.

En dicho supuesto¹¹, serán tanto más fiables los resultados cuanto mejor se cumpla que los semiejes del hiperelipsoide HE (60) a posteriori

$$a \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu^{-1}} = \sigma_0 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1^{-1}} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_i^{-1}} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_n^{-1}} \end{pmatrix} = \sigma_{xi} \quad (111)$$

se aproximan a los valores de las correspondientes desviaciones típicas σ_{xi} de las correcciones x_i sobre los ejes de la misma denominación $O x_i$, y en consecuencia, pueda aceptarse la expresión canónica

$$HESC \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{x_i^2}{a_i^2} \right] = 1 \quad (112)$$

que expresamos en su forma standard, siendo la consideración a priori y la aplicación del coeficiente de homotecia k adecuado, que entenderemos implícitamente formuladas con carácter sistemático de ahora en adelante, si no se considera necesario hacerlo expresamente.

Así, dando por supuesta la calidad de la red, consecuencia de un trabajo cuidadoso y de alto nivel técnico en cualquier aspecto que se considere, y habiendo utilizado

¹¹En lo que sigue damos por conocidos los tres artículos hasta ahora publicados, en especial, el tercero.

debidamente los recursos técnicos referentes a pesos, covarianzas, ajustes por incrementos de coordenadas con o sin subredes, algoritmos del problema de diseño de orden dos PD2, etc...en definitiva se podrá establecer la integral

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi} &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(X) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 \dots dX_n = \\
 &= \iiint \dots \int_{\Phi, n} P(X) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_n \quad (113)
 \end{aligned}$$

tanto más aproximadamente cuanto mejor sea la calidad del trabajo y según

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi} &= P(x)_{\Phi} = \\
 &= \iiint \dots \int_{n, \Phi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \left(\frac{x_i}{\sigma_{xi}}\right)^2} \cdot dx \cdot dx \dots \cdot dx_n \quad (114)
 \end{aligned}$$

Integral de variables separadas, con n variables y n filas en σ_{xx} .

La expresión anterior puede adoptar la forma más general

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi_q} &= \iiint \dots \int_{\Phi, q} P(X) \cdot dX_1 \cdot dX_2 \cdot dX_3 \dots dX_q = \\
 &= \iiint \dots \int_{\Phi, q} P(X) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \dots dx_q \quad (115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\Phi_q} &= P(x)_{\Phi_q} = \\
 &= \iiint \dots \int_{q, \Phi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot n}} \cdot |\sigma_{xx}|_q^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n \left(\frac{x_i}{\sigma_{xi}}\right)^2} \cdot dx \cdot dx \dots \cdot dx_q \quad (116)
 \end{aligned}$$

importante y versátil expresión de aplicación a zonas específicas de la red. Donde $1 \leq q \leq n$, y el determinante $|\sigma_{xx}|_q$ es el de la matriz cuadrada menor de orden q , σ_{xxq} formada escogiendo los elementos de cruce de las q filas y q columnas elegidas en la matriz varianza covarianza cuadrada de orden n inicial σ_{xx} correspondiente a la red completa.

Pudiendo aplicarse desde una sola coordenada x_i ($n = 1$), un solo punto planimétrico, (x_i, x_j) , con ($n = 2$), o tridimensional (x_i, x_j, x_k) , con ($n = 3$), hasta a toda la red pasando por una parte arbitraria de ella con ($n = q$), establecido que sea en cada caso el orden de variables adecuado.

El recinto de integración que también es de incertidumbre será en su caso más general el hiperparalelepípedo recto rectángulo canónico respecto al $q - edro$ de coordenadas y circunscrito al hiperelipsoide HES_q de lados dobles de las desviaciones típicas definidas por las componentes del vector σ_{xq} , expresadas según $\sigma_{x_{iq}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_{iq}^{-1}}$, siendo $i \in (1, 2, \dots, q)$, semiejes de las figuras de error insistentemente mencionadas y μ_{iq} autovalor genérico de una cierta matriz S_q tal que

$$\sigma_{xxq} = \sigma_0^2 \cdot S_q^{-1} \quad (117)$$

cuya expresión es

$$\Phi_q = R_{\sigma_{xq}} = \left[| x_{xiq} | \leq \sigma_{x_{iq}} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_{iq}^{-1}} \right] \quad (118)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots, q)$$

cuya significación en planimetría es que todos y cada uno de los puntos exactos definidos por las q coordenadas que son variables de la integral (115) se encuentren dentro de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas particulares de cada punto, centro de simetría en el origen, y lados iguales al doble de las desviaciones típicas correspondientes a las coordenadas del punto. Son también los rectángulos circunscritos a las elipses standard de incertidumbre de cada punto y a sus podarias, ambas en posición canónica. La generalización a tres dimensiones es, como de costumbre, trivial.

Y si se tiene en cuenta toda la red, la expresión de (118) será

$$\Phi = R_{\sigma_x} = \left[| x_{xi} | \leq \sigma_{x_i} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}} \right] \quad (119)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots, n)$$

Todo ello no es sino la teoría bien conocida. Pero la densificación de la red obliga a aplicar la doctrina anterior a nuevos puntos adicionales de la red, en consecuencia, es preciso considerar el supuesto de

$$q = n + p > n \quad (120)$$

en todo el desarrollo anterior.

Pero cualquier punto de densificación que se considere según la metodología y doctrina expuesta tiene la cualidad de virtual con respecto a todo el trabajo de levantamiento y ajuste efectivamente realizado.

Por consiguiente, entendemos es imposible que genere término cofactor con ninguna coordenada del levantamiento y/o influya en su desviación típica ni en figura de error alguna, sus variables (coordenadas) serán independientes, sus desviaciones típicas según hemos visto, conocidas e independientes, y podrán ser de aplicación las expresiones (114) y (116) adicionándolas simplemente al cálculo como nuevas variables separadas y manteniendo la condición de canonicidad de cuantos recintos de integración e incertidumbre, generales o parciales, se consideren.

Así pues, la adición de un número arbitrario “ p ” de coordenadas procedentes de una densificación cualquiera virtual practicada según se ha expuesto, conduce a las mismas expresiones (116) y (118).

Y en definitiva, y aceptadas que sean, según reiteramos una vez más, todas las condiciones previas de calidad establecidas, podrán generalizarse las expresiones de error deducidas en su momento.

Así, y como ejemplo, para la totalidad de la red densificada hasta $n+p$ coordenadas es lícito escribir hasta $n + p$ coordenadas (114) como

$$P_{\Phi_{n+p}} = P(x)_{\Phi_{n+p}} =$$

$$= \iiint \dots \int_{n+p, \Phi_{n+p}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2} \cdot (n+p)}} \cdot |\sigma_{xx}|_{n+p}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sum_1^{n+p} \left(\frac{x_i}{\sigma_{xi}}\right)^2} \cdot dx \cdot dx \dots \cdot dx_{n+p} \quad (121)$$

Integral de variables separadas, con $n + p$ variables y $n + p$ filas y columnas en σ_{xx} extendida al recinto

$$\Phi_{n+p} = R_{\sigma_{x(n+p)}} = |x_{xi}| \leq \sigma_{xi} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}} = \quad (122)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots, n + p)$$

y la probabilidad de que todos y cada uno de los vértices de la red densificada se encuentren simultáneamente en sus respectivos recintos rectangulares de error así definidos será

$$\begin{aligned} P_{RK_{n+p}} &= P_{RK\sigma_{x(n+p)}} = |diag \sigma_o^2 \mu^{-1}|_{n+p}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{n+p} \cdot \prod_1^p \sigma_{xi} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} = \\ &= |\sigma_{xi}^2|_{n+p}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{n+p} \cdot \prod_1^{n+p} \sigma_{xi} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} = \\ &= \sigma_{x_1}^{-1} \cdot \sigma_{x_2}^{-1} \cdot \sigma_{x_3}^{-1} \dots \cdot \sigma_{x_{n+p}}^{-1} \cdot \sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2} \cdot \sigma_{x_3} \dots \cdot \sigma_{x_{n+p}} \cdot 2^{n+p} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} = \\ &= 2^{n+p} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} \quad (123) \end{aligned}$$

y en definitiva

$$P_{\Phi K_{n+p}} = P_{RK\sigma_{x(n+p)}} = 2^{n+p} \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^{n+p} \quad (124)$$

aplicable directamente con el coeficiente de homotecia K que sea requerido por el condicionado del trabajo.

Nótese que las expresiones (86), (87), (88) y (89) tienen, como siempre, un poder de afirmación tanto mayor cuanto mejor sea el trabajo de campo realizado. Y en especial, si se ha conseguido, directamente o aplicando los recursos que hemos estudiado con anterioridad, en especial los concernientes al problema de diseño de

orden dos PD2, que la matriz varianza covarianza de las variables a posteriori se aproxime lo más posible a una matriz diagonal de expresión (100).

En el límite, es elemental que si se verifica

$$\sigma_{xx} = \text{diag } \sigma_{xi}^2 = \text{diag } a_i^2 \quad (125)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots n)$$

el hiperelipsoide standard será canónico, de “ n ” ejes, y la expresión (61) se escribirá también como (112)

$$HESC = \sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \quad (126)$$

$$i \in (1, 2, 3, \dots n)$$

y practicada la densificación de la red, para un cierto grupo de puntos virtuales arbitrario definido por “ p ” coordenadas adicionales, y siendo así que no puede aparecer covarianza alguna, cualquiera que sean los valores de las varianzas o semiejes obtenidos

$$\sigma_{xi} = a_i \quad (127)$$

$$i \in (n + 1, n + 2, n + 3, \dots n + p)$$

se generará la matriz

$$\sigma_{xx} = \text{diag } \sigma_{xi}^2 = \text{diag } a_i^2 \quad (128)$$

$$i \in 1, 2, 3, \dots n + p$$

y siempre existirá el hiperelipsoide standard, canónico y de “ $n + p$ ” ejes

$$HESC = \sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \quad (129)$$

$$i \in 1, 2, 3, \dots, n + p$$

que resuelve la cuestión en toda su generalidad.

Si se trata de un grupo de puntos concernidos en su conjunto por “ q ” coordenadas, la probabilidad simultanea correspondiente será

$$P_{\Phi K_q} = P_{RK\sigma x q} = 2^q \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^q \quad (130)$$

Con $q = n$, coordenadas de la red inicial no densificada, la probabilidad simultanea correspondiente se acostumbra a escribir

$$P_{\Phi K} = P_{RK\sigma x} = 2^n \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^n \quad (131)$$

y para cada vértice por separado podemos escribir en planimetría

$$P_{\Phi K_2} = P_{RK\sigma x_2} = 2^2 \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^2 \quad (132)$$

ampliable a tres dimensiones según

$$P_{\Phi K_3} = P_{RK\sigma x_3} = 2^3 \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^3 \quad (133)$$

En definitiva, determinados que sean los recintos rectangulares de error de la totalidad de los vértices de la red densificada incluyendo correlativos, se calcularán las probabilidades de inclusión de los vértices exactos, desconocidos, en los recintos descritos, cualquiera que sea la agrupación o desglose que se requiera, con sencillez y a través de las expresiones que anteceden.

Es resaltable que para $K = 4$

$$N(0, 1)_0^4 \approx 0,5000$$

$$P_{\Phi 4_q} = P_{R4\sigma x q} = 2^q \cdot \left[(N(0, 1))_0^4 \right]^q = (2 \cdot 0,5000)^q \implies 1 \quad (134)$$

prácticamente la certeza, independientemente del número de vértices concernidos. Así, las técnicas de densificación permiten manejar e interpretar con rigor conjuntos de vértices de magnitud prohibitiva para cualquier otro procedimiento, con importante aplicación en barridos de láser, zonas de distinta significación y, evolución de redes en el tiempo y control de deformaciones.

2.2. CASO GENERAL CON UTILIZACIÓN DE EJES OBLICUOS

Conviene reiterar que es en general suficiente la densificación propiciada por los puntos que hemos llamado correlativos obtenidos por el método de los arcos capaces de $\frac{1}{2} \cdot \pi$ para lograr la información necesaria en trabajos usuales, incluso de alta exigencia, con la no pequeña ventaja de utilizar siempre coordenadas cartesianas rectangulares. El caso general, con utilización de ejes oblicuos, debe reservarse para situaciones en las que realmente no sea posible la primera alternativa, generalmente por tratarse de puntos muy específicos que dejan al proyectista con escaso o nulo margen de elección, por ejemplo, el seguimiento de una grieta aparecida en un paramento u obra de fábrica que se desea controlar. Es ahora momento de estudiarlo.

El caso general, con utilización de ejes oblicuos corresponde a la determinación del recinto de error de un punto arbitrario M del espacio concernido por la red (cuyo lugar geométrico, no representado, siempre será el arco capaz sobre AB de un ángulo AMB cualquiera). En la figura 2.12 se representa con todo rigor a través de una rotación de argumento δ del sistema Ax_Ay_A y otra de argumento γ del sistema Bx_By_B . Por consiguiente, M queda determinado por dos rotaciones arbitrarias de argumentos δ y γ que cubren cualquier supuesto en todo el plano del levantamiento.

La repetición del método da lugar en principio a la inevitable superposición de subtramas de paralelogramos a la malla de trama rectangular inicial. Luego veremos como puede abordarse dicha cuestión. Sin embargo y en principio *resulta preceptivo tener en cuenta que si en el caso primeramente estudiado de malla y trama rectangulares era muy aconsejable, en el presente es imprescindible contar con un trabajo de campo de alta calidad, que genere matrices varianza covarianza a posteriori de las variables diagonales o cuasi-diagonales y figuras de error elipsoídicas canónicas y de pequeña excentricidad, con óptimo en circunferencias.*

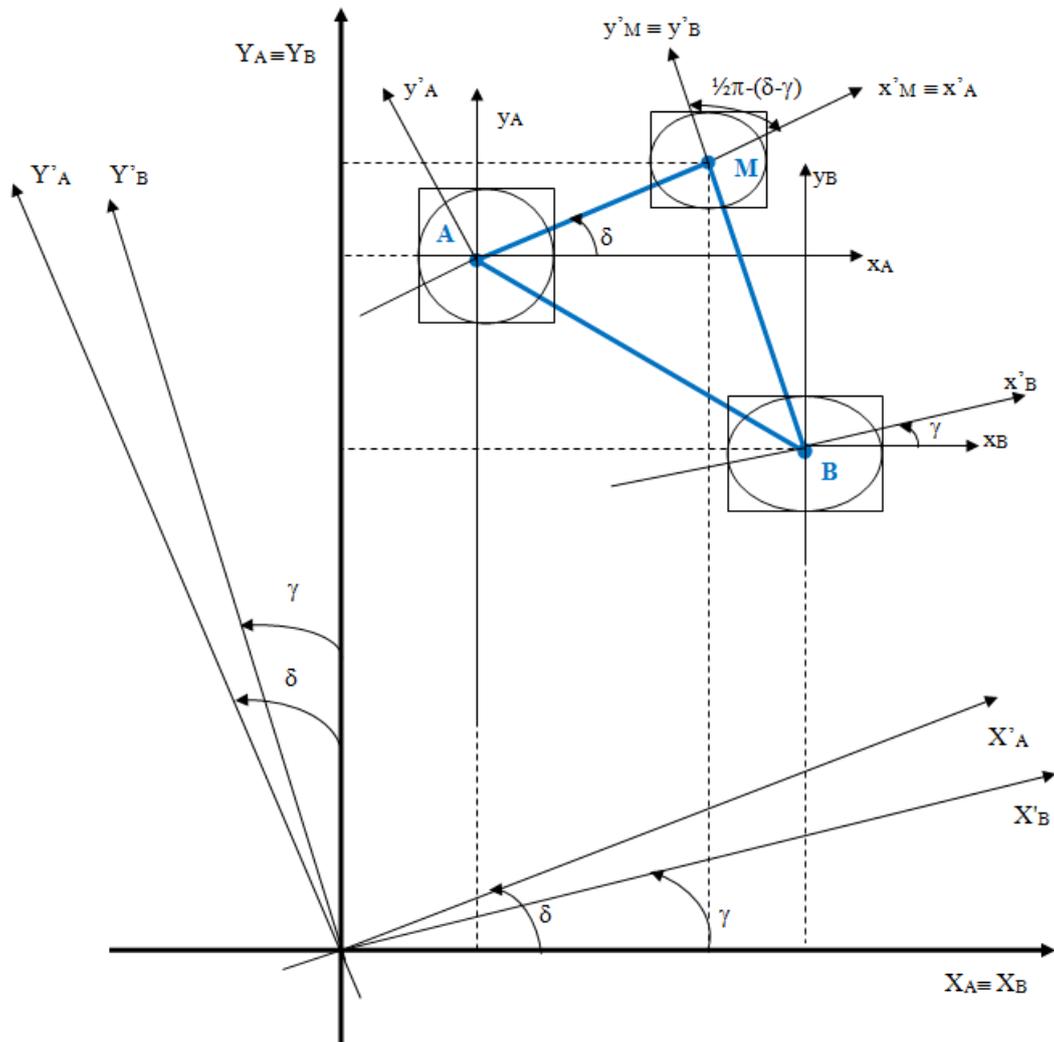


Figura 2.12: Determinación del punto M por ejes oblicuos

Así se representa en la fig. 2.12, obviamente con escala específica muy aumentada.

Es claro que, igual que δ , γ también es conocido para A, B, M, dados según la expresión análoga a (67)

$$m_B = \operatorname{tg} \left(\gamma + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{Y_M - Y_B}{X_M - X_B} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \quad (135)$$

y todo se reduce a expresar la transformada de HE o HES a partir de (73) y aplicando dos rotaciones sinistrorsum δ , γ que se escriben sucesivamente como en (68), (69), (70), (71), (72)

$$x'_A = x_A \cdot \cos \delta + y_A \cdot \sen \delta \quad (136)$$

$$y'_A = -x_A \cdot \sen \delta + y_A \cdot \cos \delta \quad (137)$$

$$x'_B = x_B \cdot \cos \gamma + y_B \cdot \sen \gamma \quad (138)$$

$$y'_B = -x_B \cdot \sen \gamma + y_B \cdot \cos \gamma \quad (139)$$

	x_A	y_A
x'_A	$\cos \delta$	$\sen \delta$
y'_A	$-\sen \delta$	$\cos \delta$
	x_B	y_B
x'_B	$\cos \gamma$	$\sen \gamma$
y'_B	$-\sen \gamma$	$\cos \gamma$

(140)

Y siguiendo el razonamiento conocido, las rotaciones inversas serán como en (74) y (75)

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_i = x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \sen \delta$$

$$x_j = x'_i \cdot \sen \delta + x'_j \cdot \cos \delta \quad (141)$$

$$x_k = x'_k \cdot \cos \gamma - x'_l \cdot \sen \gamma$$

$$x_l = x'_k \cdot \sen \gamma + x'_l \cdot \cos \gamma$$

Y la transformada deducida, aplicada a la figura 2.12 se escribirá

$$x_m = x'_m$$

$$\forall m \neq i, j, k, l$$

$$x_A = x'_A \cdot \cos \delta - y'_A \cdot \text{sen } \delta$$

$$y_A = x'_A \cdot \text{sen } \delta + y'_A \cdot \cos \delta \quad (142)$$

$$x_B = x'_B \cdot \cos \gamma - y'_B \cdot \text{sen } \gamma$$

$$y_B = x'_B \cdot \text{sen } \gamma + y'_B \cdot \cos \gamma$$

particularizando i, j, k, l en las variables (correcciones) planas de A, B .

Sucesivamente se tendrá

$$\begin{array}{cccccccc}
 [x'_1 & x'_2 & \dots & x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta & x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta & \dots & \cdot \\
 \dots & x'_k \cdot \cos \gamma - x'_l \cdot \text{sen } \gamma & x'_k \cdot \text{sen } \gamma + x'_l \cdot \cos \gamma & \dots & x'_{n-1} & x'_n] \cdot \\
 \cdot S \cdot & \left(\begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta - x'_j \cdot \text{sen } \delta \\ x'_i \cdot \text{sen } \delta + x'_j \cdot \cos \delta \\ \dots \\ x'_k \cdot \cos \gamma - x'_l \cdot \text{sen } \gamma \\ x'_k \cdot \text{sen } \gamma + x'_l \cdot \cos \gamma \\ \dots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{array} \right) & = C^2 & (143)
 \end{array}$$

Hipercuádrica HE , HES para $C = 1$, referida a los nuevos ejes, y la sección por el hiperplano

$$\begin{aligned} x'_m &= 0 \\ \forall m \neq i, l \end{aligned} \quad (144)$$

resulta

$$(0 \ 0 \ \dots \ x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ \dots \ -x'_l \cdot \sen \gamma \ x'_l \cdot \cos \gamma \ \dots \ 0 \ 0) \cdot$$

$$\cdot S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ \dots \\ -x'_l \cdot \sen \gamma \\ x'_l \cdot \cos \gamma \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C^2 \quad (145)$$

y sobre el plano del levantamiento se tendrá en definitiva la elipse de incertidumbre de M más general, obtenida a partir de la hipercuádrica HES

$$(x'_i \cdot \cos \delta \ x'_i \cdot \sen \delta \ -x'_l \cdot \sen \gamma \ x'_l \cdot \cos \gamma) \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_i \cdot \cos \delta \\ x'_i \cdot \sen \delta \\ -x'_l \cdot \sen \gamma \\ x'_l \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= C^2 \quad (146) \end{aligned}$$

Siendo $s_{rs} = s_{sr}$ los elementos de orden rs y sr en la matriz simétrica de diseño S .

Y en forma simplificada se escribirá:

$$x'^T_{i\delta\gamma} \cdot S_{ijkl} \cdot x'_{i\delta\gamma} - C^2 = 0 \quad (147)$$

o bien, particularizando para M en la figura 2.12

$$(x'_M \cdot \cos \delta \quad x'_M \cdot \sen \delta \quad -y'_M \cdot \sen \gamma \quad y'_M \cdot \cos \gamma) \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x'_M \cdot \cos \delta \\ x'_M \cdot \sen \delta \\ -y'_M \cdot \sen \gamma \\ y'_M \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (148)$$

elipse referida a los ejes cartesianos **oblicuos** $M x'_M y'_M$

y en forma simplificada

$$x'^T_{M\delta\gamma} \cdot S_{AB} \cdot x'_{M\delta\gamma} - C^2 = 0 \quad (149)$$

que resuelve la cuestión completamente.

El dibujo y determinación de los elementos de la elipse deben tener en cuenta los nuevos ejes oblicuos de referencia, formando un ángulo de $\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi - (\delta - \gamma)$, según se deduce de la figura 2.12. El punto M será un punto correlativo generalizado y el caso estudiado anteriormente, de ejes rectangulares, corresponde a la particularización $\delta = \gamma$, c.d.s.

En el caso más general de aplicación reiterada de la doctrina expuesta, la malla compleja resultante estará formada por una malla inicial básica de trama rectangular y tantas submallas de tramas paralelogramicas y orientaciones distintas como nuevos puntos correlativos generalizados se hayan determinado, es decir como pares de rotaciones δ , γ , planas, hayan sido aplicadas a la hipercuádrica HE recinto general de incertidumbre de la red.

Se hace preciso avanzar en la doctrina y esforzarse en dotarla de la suficiente practicidad.

Veremos a su debido tiempo que es posible sintetizar la praxis en una aplicación del Análisis Multivariante sobre un mismo sistema de ejes rectangulares y a este efecto desarrollamos el algoritmo que sigue.

Se trata de definir rigurosa y completamente el recinto de error. Así pues, escribiremos la expresión conocida de la ecuación de la elipse de incertidumbre $E_{\theta C}$ de un punto cualquiera M , según la figura 2.13, con centro en el origen de coordenadas, ejes cualesquiera formando un ángulo θ , y procedente de un hiperelipsoide HE de parámetro C , en la forma

$$\begin{aligned} E_{\theta C} &= x^T \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot xy + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} = 0 \quad (150) \end{aligned}$$

y sea la ecuación canónica de la misma elipse

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2}\pi C} &= x^T \cdot A \cdot x = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= a'_{11} \cdot x^2 + a'_{22} \cdot y^2 + a'_{33} = 0 \quad (151) \end{aligned}$$

Sean $E_{\theta C}$ y $E_{\frac{1}{2}\pi C}$ las ecuaciones, de la misma cónica expresada en dos sistemas de referencia distintos. La expresión matricial de la cónica $E_{\theta C}$ va a tener en común con la expresión matricial $E_{\frac{1}{2}\pi C}$ los llamados invariantes métricos.

La igualdad de invariantes entre ambas cónicas se sigue como

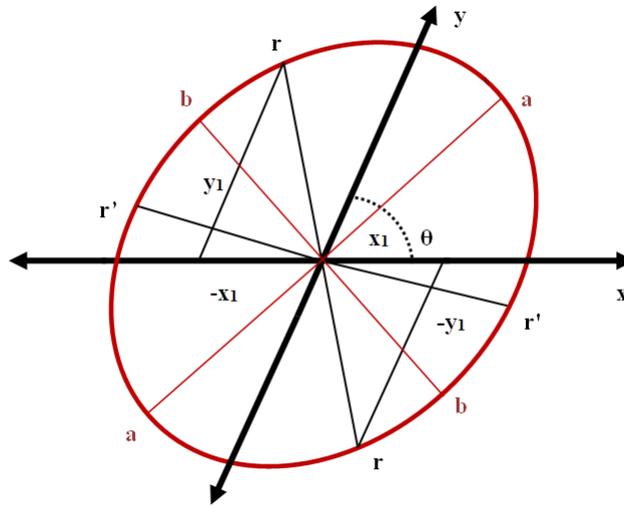


Figura 2.13: Elipse de incertidumbre de un punto cualquiera M

$$a'_{11} + a'_{22} = \frac{I}{\text{sen}^2\theta} = \frac{a_{11}+a_{22}}{\text{sen}^2\theta} = \text{conocido} \quad (152)$$

$$a'_{11} \cdot a'_{22} = \frac{A_{33}}{\text{sen}^2\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{\text{sen}^2\theta} = \text{conocido} \quad (153)$$

$$a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} = \frac{A}{\text{sen}^2\theta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\text{sen}^2\theta} = \text{conocido} \quad (154)$$

luego a'_{11} y a'_{22} son las raíces de la ecuación de segundo grado conocida:

$$\rho^2 - \frac{I}{\text{sen}^2\theta} \cdot \rho + \frac{A_{33}}{\text{sen}^2\theta} = 0 \quad (155)$$

que expresamos sucesivamente como

$$\rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta - I \cdot \rho + A_{33} = 0 \quad (156)$$

$$\rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta - (a_{11} + a_{22}) \cdot \rho + (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (157)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} - \rho \cdot \cos\theta \\ a_{12} - \rho \cdot \cos\theta & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (158)$$

de raíces ρ_1 y ρ_2 , cuya expresión es

$$\rho = \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2 \theta} \cdot \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2)} \right] \quad (159)$$

cumpléndose que

$$\rho_1 = a'_1 \quad (160)$$

$$\rho_2 = a'_2 \quad (161)$$

es trivial como comprobación inmediata considerar que particularizando en (124) para ejes rectangulares con $\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi$ y $a_{12} = 0$, que equivale a partir de ecuación canónica en (150), resulta c.d.s.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(a_{11} + a_{22}) \pm (a_{11} - a_{22})] \quad (162) \end{aligned}$$

$$\rho_1 = a'_1 = a_1 = b^2 \quad (163)$$

$$\rho_2 = a'_2 = a_2 = a^2 \quad (164)$$

con a, b , semiejes de la elipse, siendo indiferente en cualquier caso para el resultado final asignar a'_1, a'_2 a cualquiera de las dos raíces.

La ecuación canónica de la elipse será pues

$$\rho_1 \cdot x^2 + \rho_2 \cdot y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \quad (165)$$

o bien

$$\frac{A_{33}}{A} \cdot \rho_1 \cdot x^2 + \frac{A_{33}}{A} \cdot \rho_2 \cdot y^2 + 1 = 0 \quad (166)$$

con lo que se deducen los semiejes de la elipse en su caso más general, que serán

$$a = \sqrt{-\frac{A}{A_{33} \cdot \rho_1}} \quad (167)$$

$$b = \sqrt{-\frac{A}{A_{33} \cdot \rho_2}} \quad (168)$$

y aún puede simplificarse el proceso, teniendo en cuenta que, en (153) y (154)

$$A = a_{33} \cdot A_{33} = a_{33} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \quad (169)$$

$$A_{33} = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \quad (170)$$

y particularizando en (166), (167), (168) se obtiene

$$\frac{\rho_1}{a_{33}} \cdot x^2 + \frac{\rho_2}{a_{33}} \cdot y^2 + 1 = 0 \quad (171)$$

$$a = \sqrt{-\frac{a_{33}}{\rho_1}} \quad (172)$$

$$b = \sqrt{-\frac{a_{33}}{\rho_2}} \quad (173)$$

ecuación generatriz y semiejes de la elipse

Es preceptivo terminar el proceso accediendo a la representación rigurosa de la elipse con respecto a los ejes oblicuos iniciales.

A dicho efecto consideremos en la figura 2.13 una pareja de semidiámetros en la elipse de igual dimensión que designamos con $r = r'$. Ambos serán simétricos respecto a los semiejes a y b .

Escribamos la expresión de la elipse (150) $E_{\theta C}$ y la aplicación del teorema del coseno a un semidiámetro cualquiera. Se tendrá:

$$E_{\theta C} = a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + a_{33} = 0 \quad (174)$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\theta + y^2 - r^2 = 0 \quad (175)$$

(175) generaliza para cualquier cuadrante la expresión del teorema del coseno, al tener en cuenta los signos de x , y .

Resolviendo el sistema (174), (175) se obtendrán las coordenadas de los cuatro puntos extremos de los diámetros r y $r' = r$ considerados. Es claro que la ecuación resolvente en x ó en y será de cuarto grado.

Un procedimiento adecuado para resolver el sistema estriba en la aplicación del algoritmo y eliminante de Sylvester, estudiado en Álgebra Superior. Así, si representamos (175) en la forma análoga a la (174)

$$b_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot b_{12} \cdot x \cdot y + b_{22} \cdot y^2 + b_{33} = 0 \quad (176)$$

la ecuación de cuarto grado en y , eliminante de x , que resuelve el sistema propuesto se demuestra que es de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ b_{11} & 2 \cdot b_{12} \cdot y & b_{22} \cdot y^2 + b_{33} & 0 \\ 0 & b_{11} & 2 \cdot b_{12} \cdot y & b_{22} \cdot y^2 + b_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (177)$$

y particularizando para el caso estudiado se tendrá

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (178)$$

la ecuación es conocida en todos sus términos y sus raíces son las ordenadas de los cuatro extremos de los semidiámetros considerados. Conocidas que sean, la obtención de las correspondientes abscisas es ya trivial.

El caso general de ecuación de cuarto grado no tiene solución en formulación algébrica exacta y es preciso acudir a métodos aproximados (Newton, Newton-cuerda,...etc). Sin embargo, en el caso que nos ocupa las ordenadas solución serán, según se desprende de la figura 2.13, de la forma y_1 , y_2 , $-y_1$, $-y_2$.

Por consiguiente (178) se podrá escribir como

$$K \cdot (y - y_1) \cdot (y + y_1) \cdot (y - y_2) \cdot (y + y_2) = 0 \quad (179)$$

$$K \cdot (y^2 - y_1^2) \cdot (y^2 - y_2^2) = 0 \quad (180)$$

$K = cte.$, coeficiente de y^4 que puede tomarse como la unidad, y en definitiva se tendrá

$$y^4 - y^2 \cdot (y_1^2 + y_2^2) + y_1^2 \cdot y_2^2 = 0 \quad (181)$$

con lo que se demuestra que (178) es una ecuación bicuadrada de solución exacta conocida e inmediata.

Pero de la figura 2.13 se deduce que, si se toma

$$r = r' = a \quad (182)$$

cumplirá que

$$y_1 = y_2 \quad (183)$$

y en (179), (180), (181) se sigue

$$K \cdot (y - y_1)^2 \cdot (y + y_1)^2 = 0 \quad (184)$$

$$K \cdot (y^2 - y_1^2)^2 = 0 \quad (185)$$

$$y^4 - y^2 \cdot (2 \cdot y_1^2) + (y_1^2)^2 = 0 \quad (186)$$

Ecuación bicuadrada con dos raíces dobles, “ $+y_1$ ” y “ $-y_1$ ”.

y finalmente, siendo a , b , semiejes de la elipse, conocidos en virtud de (172) y (173), las coordenadas de los vértices de la elipse referidas al sistema de ejes oblicuos iniciales de ángulo θ , vendrán dadas por las cuatro ecuaciones bicuadradas con dos raíces dobles cada una correspondientes a los vértices de los ejes $2 \cdot a$, $2 \cdot b$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (187)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - br \end{vmatrix} = 0 \quad (188)$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11} \cdot x^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (189)$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11} \cdot x^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & x^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (190)$$

que permiten conocer y representar la elipse con todo rigor, en posición y dimensiones.

Merece la pena, aunque el cálculo resulte un tanto prolijo, desarrollar las expresiones anteriores. En (178) desarrollando por menores adjuntos se tiene sucesivamente

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22}y^2 + a_{33} \\ 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 & 0 \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} & 0 \\ a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y & a_{22} \cdot y^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot y^2 + a_{33}) \cdot \begin{vmatrix} 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \\ 1 & 2 \cdot y \cdot \cos\theta \end{vmatrix} + a_{11} \cdot (y^2 - r^2) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} \cdot y \\ 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} + \quad (191)$$

$$+ 2 \cdot a_{12} \cdot y \cdot \begin{vmatrix} 2 \cdot a_{12} \cdot y & (a_{22}y^2 + a_{33}) \\ 2 \cdot y \cdot \cos\theta & y^2 - r^2 \end{vmatrix} - (a_{22} \cdot y^2 + a_{33}) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & (a_{22}y^2 + a_{33}) \\ 1 & y^2 - r^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22}y^2 + a_{33}) \cdot [4 \cdot y^2 \cdot \cos^2\theta - (y^2 - r^2)] + a_{11} \cdot (y^2 - r^2) \cdot [a_{11} \cdot (y^2 - r^2) - 4 \cdot a_{12} \cdot y^2 \cdot \cos\theta^2] +$$

$$+ 2 \cdot a_{12} \cdot y \cdot [2 \cdot a_{12} \cdot y \cdot (y^2 - r^2) - 2 \cdot y \cdot \cos\theta \cdot (a_{22}y^2 + a_{33})] - (a_{22} \cdot y^2 + a_{33}) \cdot [a_{11} \cdot (y^2 - r^2) \cdot$$

$$- (a_{22}y^2 + a_{33})] = \quad (192)$$

$$= [(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos\theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2] \cdot y^4 +$$

$$+ [4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{11} \cdot a_{33} \cdot \cos\theta + a_{11} \cdot a_{12} \cdot r^2 - a_{12} \cdot a_{33}) - 2 \cdot a_{11} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot r^2 -$$

$$- 2 \cdot a_{11}^2 \cdot r^2 - 4 \cdot a_{12}^2 \cdot r^2 + 2 \cdot a_{22} \cdot a_{33}] \cdot y^2 + (a_{11} \cdot r^2 + a_{33})^2 = 0 \quad (193)$$

ecuación bicuadrada de las ordenadas de los cuatro extremos de los semidiámetros de longitud “r” , como debía ser, y del mismo modo la ecuación de las abscisas se obtendrá de (178) cambiando “y” por “x” y a_{11} por a_{22} y recíprocamente. En definitiva

$$\begin{vmatrix} a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} & 0 \\ 0 & a_{22} & 2 \cdot a_{12} \cdot x & a_{11}x^2 + a_{33} \\ 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot x \cdot \cos\theta & x^2 - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (194)$$

y desarrollando

$$= [(a_{22} - a_{11})^2 + 4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos\theta - a_{12} \cdot a_{11} - a_{22} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2] \cdot x^4 +$$

$$\begin{aligned}
 & +[4 \cdot \cos\theta \cdot (a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cos\theta + a_{22} \cdot a_{12} \cdot r^2 - a_{12} \cdot a_{33}) - 2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot r^2 - \\
 & -2 \cdot a_{22}^2 \cdot r^2 - 4 \cdot a_{12}^2 \cdot r^2 + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{33}] \cdot x^2 + (a_{22} \cdot r^2 + a_{33})^2 = 0 \quad (195)
 \end{aligned}$$

que resuelve la cuestión, siendo las raíces de la ecuación bicuadrada deducida las cuatro abscisas buscadas.

Las coordenadas de los vértices se obtendrán fácilmente sustituyendo en (193) y (195) el semidiámetro genérico “ r ” por los semiejes “ a ” y “ b ”, es decir, teniendo en cuenta (159) y (172) y (173) se obtiene en primer lugar:

$$r^2 = -\frac{a_{33}}{\rho} = \frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2\theta}{[(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2\theta}]} \quad (196)$$

resultando $a^2 = a^2$, $r^2 = b^2$ según se tome uno u otro signo en el discriminante de las raíces ρ , es decir

$$r^2 = \frac{a_{33}}{\rho_1} = a^2 = -\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2\theta}{[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2\theta}]} \quad (197)$$

$$r^2 = \frac{a_{33}}{\rho_2} = b^2 = -\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2\theta}{[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2\theta}]} \quad (198)$$

es inmediato comprobarlo en el caso trivial canónico $a_{12} = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \pi$

Pero según se vio en (182), (183), (184), (185), (186) el caso en presencia se resuelve con una bicuadrada con dos raíces dobles. Por consiguiente, la sustitución de r^2 por los valores deducidos en (193) y (194) dan a dichas ecuaciones la forma (185) o (186), que podemos escribir

$$K \cdot (y^2 - y_1^2)^2 = (K^2 \cdot y^2 - K^2 \cdot y_1^2)^2 = (P \cdot y^2 - Q)^2 = 0 \quad (199)$$

P, Q , coeficientes conocidos. Y despejando y^2

$$y^2 = \frac{Q}{P} \quad (200)$$

y en definitiva, particularizando en (193)

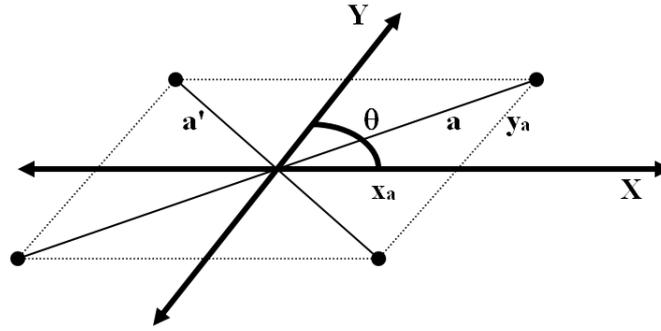


Figura 2.14: Ejes oblicuos

$$y^2 = -\frac{a_{11}r^2 + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 - 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{22}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (201)$$

y con $r^2 = a^2$ según (197)

$$y_a^2 = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (202)$$

y particularizando en (195) y teniendo en cuenta también (197) se obtiene

$$x_a^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (203)$$

(202) y (203) son la expresión de las coordenadas de los vértices del eje 2 · a de la elipse referidos a los ejes oblicuos de ángulo θ. Es fundamental comprobar el signo de las coordenadas que debe establecerse verificando la cumplimentación de (174) para el valor de “a” conocido por (172). En figura 2.14 se aprecia que en ejes oblicuos una pareja de valores-componentes (±x_a, ±y_a) dan lugar a dos posibilidades de vectores de módulo distinto según sea la combinación de signos adoptada.

Es ya inmediato definir las coordenadas de los vértices del eje 2 · b. Sustituyendo en (193) y (195) el semidiámetro genérico “r” por el semieje “b”, es decir, teniendo en cuenta (159) , (173) y (198) se obtiene:

$$y_b^2 = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 - 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (204)$$

$$x_b^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33} \cdot \text{sen}^2 \theta}{[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2) \cdot \text{sen}^2 \theta}]} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 - 4 \cdot \cos \theta \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cos \theta - a_{12} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12}) + 4 \cdot a_{12}^2}} \quad (205)$$

(204) y (205) son la expresión de las coordenadas de los vértices del eje $2 \cdot b$ de la elipse referidos a los ejes oblicuos de ángulo θ , con las mismas observaciones del caso anterior con respecto a signos de aquellas. Es obvio también que se rechazarán como soluciones extrañas las imaginarias generadas por valores negativos de (202), (203), (204) y (205).

Como ya hemos hecho anteriormente, podemos comprobar las expresiones deducidas con el caso trivial de ejes rectangulares con $\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi$ y $a_{12} = 0$, que equivale a partir de la ecuación canónica

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 - a_{33} \equiv b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$$

en (150). En dicho supuesto se obtiene

$$\begin{aligned} y_a^2 &= \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22})}} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2}} = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \\ &= \frac{-a_{33} + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = 0 \quad (206) \end{aligned}$$

$$x_a^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{-a_{22} \cdot \frac{a_{33}}{a_{11}} + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \pm \frac{a_{33}}{a_{11}} = \pm \frac{-a^2 \cdot b^2}{b^2} = a^2 \quad (207)$$

$$\begin{aligned} y_b^2 &= \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22})}} \right] + a_{33}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2}} = \frac{a_{11} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) - (a_{11}-a_{22})} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \\ &= \frac{a_{11} \cdot \left(-\frac{a_{33}}{a_{11}} \right) + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{a_{33} \cdot (a_{22} - a_{11})}{\pm a_{22} \cdot (a_{11} - a_{22})} = \pm \frac{a_{33}}{a_{22}} = \pm \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2} = b^2 \quad (208) \end{aligned}$$

$$x_b^2 = \frac{a_{22} \cdot \left[-\frac{2 \cdot a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4 \cdot (a_{11} \cdot a_{22})}} \right] + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{a_{22} \cdot \left(-\frac{a_{33}}{a_{22}} \right) + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = \frac{-a_{33} + a_{33}}{\pm(a_{11}-a_{22})} = 0 \quad (209)$$

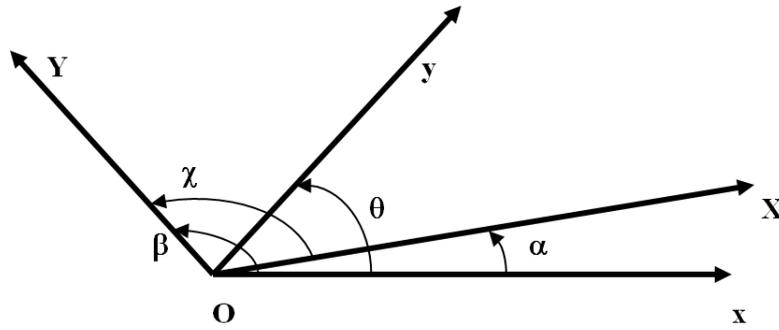


Figura 2.15: Ángulos de definición de los ejes oblicuos

resultando las coordenadas de los vértices, despreciando soluciones imaginarias, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$ c.d.s.

A costa de ejecutar un nuevo cambio de ejes puede reducirse el caso de ejes oblicuos al de rectangulares.

Efectivamente, la expresión general en el plano del cambio de ejes oblicuos (x, y) formando un ángulo θ a los (X, Y) formando un ángulo χ conservando el origen O es

$$x = \frac{\text{sen}(\theta - \alpha)}{\text{sen} \theta} \cdot X + \frac{\text{sen}(\theta - \beta)}{\text{sen} \theta} \cdot Y \quad (210)$$

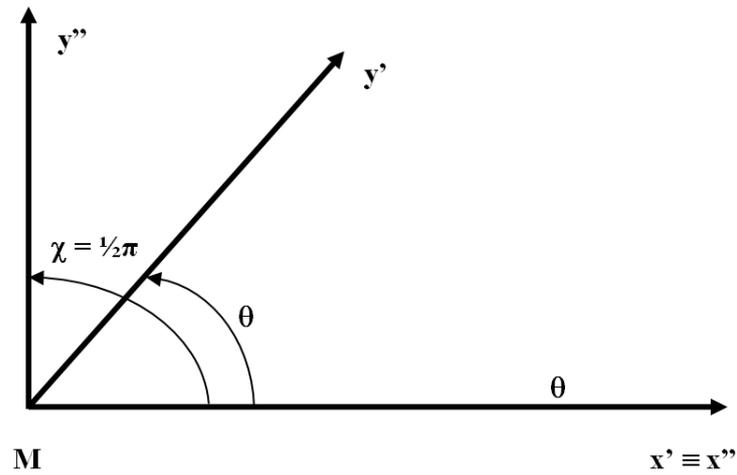
$$y = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta} \cdot X + \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen} \theta} \cdot Y \quad (211)$$

donde

$$\alpha = \text{ángulo ejes } (x, X)$$

$$\beta = \text{ángulo ejes } (x, Y)$$

con sentido de ejes sinistrorsum como en figura 2.15

Figura 2.16: Cambio de ejes de $Mx'_M y'_M$ a $Mx''_M y''_M$

Y teniendo en cuenta la expresión (148) y la figura 2.12, apliquemos lo expuesto al cambio de ejes de $Mx'_M y'_M$ ($Mx'y'$ en general) a $Mx''_M y''_M$ ($Mx''y''$ en general) representado en figura 2.16 y donde

$$\alpha = \text{ángulo ejes } (x', x'') = 0$$

$$\chi = \text{ángulo ejes } (x', y'') = \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$\theta = \text{ángulo ejes } (x', y')$$

$$\text{eje } x' \equiv \text{eje } x''$$

se sigue

$$x' = x'' + \frac{\text{sen}(\theta - \frac{1}{2}\pi)}{\text{sen } \theta} \cdot y'' = x'' - y'' \cdot \text{ctg } \theta \quad (212)$$

$$y = y'' \cdot \text{cosec } \theta \quad (213)$$

y sustituyendo en (148) se escribe

$$\begin{aligned}
 & ((x''_M - y''_M \cdot \text{ctg } \theta) \cdot \cos \delta \quad (x''_M - y''_M \cdot \text{ctg } \theta) \cdot \text{sen } \delta \quad -y''_M \cdot \text{cosec } \theta \cdot \text{sen } \gamma \quad y''_M \cdot \text{cosec } \theta \cdot \cos \gamma) \cdot \\
 & \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x''_M - y''_M \cdot \text{ctg } \theta) \cdot \cos \delta \\ (x''_M - y''_M \cdot \text{ctg } \theta) \cdot \text{sen } \delta \\ -y''_M \cdot \text{cosec } \theta \cdot \text{sen } \gamma \\ y''_M \cdot \text{cosec } \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (214)
 \end{aligned}$$

referida a los ejes cartesianos **ortogonales** $M x'' y''$, que se definen y representan con toda sencillez a partir de la identidad de los ejes x' y x'' . En forma simplificada será

$$x''^T_{M\delta\gamma} \cdot S_{Mkl} \cdot x''_{M\delta\gamma} - C^2 = 0 \quad (215)$$

Con la exposición y desarrollo que antecede queda ultimada el estudio y definición de figuras de error en Redes Locales y Microgeodesia, hasta su densificación por vértices correlativos en su caso más general.

Sin embargo, aun resulta incompleto la interpretación y cifrado rigurosos del poder de afirmación de aquellas, tanto para el conjunto de todos los vértices de la red, como para un grupo o grupos de ella simultáneamente, cualquiera que sea su magnitud, hasta llegar a un solo punto arbitrario individualizado.

A dicho efecto entendemos como mejor solución establecer el condicionado necesario para aplicar rigurosamente Análisis Multivariante mediante la integral múltiple bien conocida de variables separadas estudiada y desarrollada en trabajos anteriores¹². Y para ello y en primer lugar, es preciso un giro más que referencia

¹² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". *Opus cit.*

la elipse correlativa generalizada tipo estudiada a ejes ortogonales x'' paralelos a los de malla rectangular inicial x .

Es decir, en el presente caso y para todos y cada uno de los puntos de densificación que den lugar a elipses correlativas en principio referidas a ejes oblicuos, habiendo resultado coincidentes los ejes x' y x'' será preceptivo afectar a estos últimos de una rotación plana final de argumento $-\gamma$, según se aprecia en fig. 2.12. análogamente a como se operó en el caso de malla rectangular¹³.

Con la notación usual su expresión será:

$$x'''_M = x''_M \cdot \cos \gamma - y''_M \cdot \operatorname{sen} \gamma \quad (216)$$

$$y'''_M = x''_M \cdot \operatorname{sen} \gamma + y''_M \cdot \cos \gamma \quad (217)$$

	x''_M	y''_M	
x'''_M	$\cos \delta$	$-\operatorname{sen} \delta$	(218)
y'''_M	$\operatorname{sen} \delta$	$\cos \delta$	

expresándose

$$x''_M = x'''_M \cdot \cos \gamma + y'''_M \cdot \operatorname{sen} \gamma \quad (219)$$

$$y''_M = -x'''_M \cdot \operatorname{sen} \gamma + y'''_M \cdot \cos \gamma \quad (220)$$

que escribimos previamente suprimiendo períndices¹⁴ en el segundo miembro y sin mengua de rigor ni generalidad, en una primera notación simplificada

$$x''_M = x_M \cdot \cos \gamma + y_M \cdot \operatorname{sen} \gamma = \Delta \quad (221)$$

$$y''_M = -x_M \cdot \operatorname{sen} \gamma + y_M \cdot \cos \gamma = \Gamma \quad (222)$$

¹³Ver epígrafe 2.1 “Caso malla rectangular” de esta publicación.

¹⁴*Ibidem*. Se operó de la misma forma.

Así y sustituyendo en (214) se obtiene la expresión final más general de la elipse correlativa de error a priori referida a ejes ortogonales pertenecientes a la malla de trama rectangular básica y asociada a un punto correlativo arbitrario. *Que es lo mismo que decir un punto cualquiera arbitrario del área de levantamiento, interno o externo al recinto abarcado por los vértices de estación de la red, siendo trivial extender el resultado al supuesto a posteriori.*

En definitiva, se tendrá

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma)) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (223)$$

elipse correlativa generalizada a priori

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma)) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2 \quad (224)$$

Elipse correlativa generalizada a posteriori.

Así, (223) y (224) resuelven totalmente la cuestión respecto al punto arbitrario M y su figura de error referida a los ejes $Ox''y''$, cuyos períndices pueden suprimirse por ser dichos ejes paralelos a los de la malla rectangular inicial Oxy y por tanto formar parte de ella.

En forma simplificada se escribirán las expresiones (223) y (224) más generales de elipses a priori y posteriori, de interpretación inmediata

$$x^T_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} \cdot S_{AB} \cdot x_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} - C^2 = 0$$

$$x^T_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S_{AB} \cdot x_{M\delta\gamma\Delta\Gamma} - C^2 = 0 \quad (225)$$

En cualquier caso y para $C = 1$, elipses standard. Y es inmediato comprobar que para $\delta = \gamma$ se obtiene el caso de malla rectangular y para $\delta = \gamma = 0$ se obtienen las N^2 elipses correlativas básicas, como debía suceder¹⁵.

En cuanto a la aplicación ulterior de Análisis Multivariante que completa el trabajo, estamos de nuevo en el caso estudiado en Malla Rectangular y a él nos referimos¹⁶. Será posible o no, y tanto más fiable, cuanto mejor sea la calidad de la red. Y entendemos por calidad, aparte de las características que ya podemos llamar clásicas y no repetiremos aquí, la condición indispensable de lograr matrices varianza covarianza a posteriori diagonales o casi-diagonales y elipses de error de poca excentricidad, tan cercanas a circunferencias como se sea capaz mediante un excelente trabajo de campo, imprescindible e irremplazable por tarea alguna de gabinete.

La extensión a tres dimensiones manteniendo vertical el eje de cotas, caso topográfico y microgeodésico, requiere manejar transformaciones espaciales tridimensionales con ejes oblicuos, que complican teoría y praxis de forma notable. Es mucho más aconsejable, en su caso, tratar separadamente planimetría y altimetría.

Otra cuestión es que la realidad física imponga que ninguno de los tres ejes tenga una dirección predeterminada. Con ello, las inevitables transformaciones espaciales mencionadas se complican más todavía. Sin embargo dicho supuesto se plantea frecuentemente en cálculo de deformaciones y es ineludible abordarlo. Así lo haremos en su momento al ocuparnos de dicha materia. Con ello la aplicación topográfica, si además y en su caso procediere, se reducirá a una particularización.

Finalmente y en otro orden de ideas, es necesario cuidar de la correcta representación, señalización e incluso monumentación de los puntos correlativos

¹⁵*Ibidem.*

¹⁶*Ibidem.*

densificados. Es claro que la cuestión planteada entra de lleno en el ámbito del replanteo topográfico, que no es objeto de este trabajo.

2.3. NOTA ACERCA DE LA DENSIFICACIÓN DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”, O VÉRTICES OBTENIDOS CON SOLUCIÓN PSEUDOINVERSA

Si se trata de una red libre

$$R(S) = (n - d) \implies \text{rango incompleto} \quad (226)$$

d =defecto de rango

y escribiremos sucesivamente, según sabemos

$$x = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot K$$

$$Q_{xx} = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q_K \cdot (S^- \cdot A^T \cdot P)^T = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot Q \cdot P \cdot A \cdot S^- = S^- \cdot S \cdot S^- \quad (227)$$

$$Q_{xx} = S^-$$

siendo $S^- \implies$ matriz inversa generalizada recíproca arbitraria.

Y por consiguiente

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^- \quad (228)$$

existiendo infinitas soluciones. Entre ellas, la solución con matriz pseudoinversa única S^+

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^+ \quad (229)$$

generalización de (46), pero siempre con defecto de rango = d

$$R(S) = R(S^-) = R(S^+) = R(\sigma_{xx}) = n - d \quad (230)$$

resultando nulo el determinante de la matriz varianza covarianza a posteriori σ_{xx}

$$S^+ \cdot S \cdot S^+ = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T =$$

$$= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T =$$

$$= \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S^+$$

$$S \cdot S^+ = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T$$

$$(S \cdot S^+)^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S \cdot S^+$$

$$S^+ \cdot S = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T$$

$$(S^+ \cdot S)^T = \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T = S^+ \cdot S$$

como debía ser. Y fácilmente se deduce

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^+ = \sigma_0^2 \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T$$

$$\sigma_{xx}^+ = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Gamma \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \Gamma^T \quad (234)$$

generalización de (46), con defecto de rango = d

Puede por tanto escribirse directamente, con la notación usual

$$x^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x = k^2$$

$$x^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \cdot x = k^2 \quad (235)$$

$$x^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S \cdot x = k^2$$

siendo s = varianza del observable de peso unidad a priori.

k = coeficiente de homotecia, adimensional. *Nada que ver con C en (44).*

Formas cuadráticas representativas de hipercuádricas degeneradas, tipo hipercilindros rectos, con directriz hiperelipsoídica de $(n - d)$ ejes y generatrices definidas por d direcciones. No son recintos de error con información probabilística evidentemente como (44), pero sí pueden ser útiles para el proyectista como figuras representativas del vector de correcciones x , especialmente en comparación con el de valor mínimo x_p , solución pseudoinversa.

Así, para $k = 1$, generalización de las figuras que hemos llamado standard, se tendrá:

$$x^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x = 1$$

$$x^T \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot S \cdot x = 1 \quad (236)$$

hipercilindro de correcciones en el espacio E_n , de directriz hiperelipsoídica en general no canónica de $(n - d)$ semiejes a_i tales que

$$a_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$$

$$\mu_i \implies \text{autovalor de } S \text{ positivo de orden } i \quad (237)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots (n - d)$$

en la dirección de sus $(n - d)$ autovalores correspondientes.

Y con d direcciones generatrices definidas por los autovectores de los restantes d autovalores nulos de S .

Que puede estimarse a priori por el hipercilindro correlativo

$$x^T \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S \cdot x = 1 \quad (238)$$

de semiejes

$$a_i = s \cdot \sqrt{\mu_i^{-1}}$$

$$\mu_i \implies \text{autovalor de } S \text{ positivo de orden } i \quad (239)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots (n - d)$$

en la dirección de sus $(n - d)$ autovectores correspondientes, que son los anteriormente definidos.

Y con las d direcciones generatrices, también antes definidas. El resultado es de importante aplicación a lo largo de todo el Proyecto, Ejecución e Interpretación de la red concernida, a priori y a posteriori. Y especialmente en su densificación.

Efectivamente, cualquier hiperplano bidimensional sección de cualquiera de los dos hipercilindros formulados (236) y (238) generado por dos ejes de coordenadas (Ox_j, Ox_l) es según sabemos superponible sobre el plano del levantamiento, tiene significado real y es de aplicación obvia en el estudio de la sensibilidad de la red en presencia.

Y también sabemos calcular la ecuación de la curva sección, elipse que puede representarse en el plano del levantamiento con centro y origen de coordenadas en el punto (x_j, x_l) , perteneciente a la red observada o correlativo, referida a sus ejes específicos (Ox_j, Ox_l) , y cuya ecuación, refiriéndonos a (236), es

$$x^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x = 1$$

$$x_i = 0$$

$$i \neq j, l \quad (240)$$

$$i \in 1, 2, 3 \dots (n - d)$$

que se desarrolla según

$$(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_l \ \dots \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ x \\ \dots \\ x_l \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (241)$$

siendo su ecuación en el plano del levantamiento y referida a (Ox_j, Ox_l)

$$x_j \ x_l \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{jj}^+ & \sigma_{jl}^+ \\ \sigma_{jl}^+ & \sigma_{ll}^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j \\ x_l \end{pmatrix} = 1 \quad (242)$$

$\sigma_{gh}^+ \implies$ elemento de orden gh en la pseudoinversa σ_{xx}^+

en notación simplificada

$$x_{jl}^T \cdot \sigma_{jl}^+ \cdot x_{jl} = 1 \quad (243)$$

expresión a posteriori. Siendo banal la aplicación a priori en (238) y la ampliación o reducción por homotecia de razón k , lo que es infrecuente al no existir significación probabilística. Solo se persiguen criterios de calidad a partir de relaciones de comparación entre la magnitud de las figuras resultantes, según establezca el proyectista en función de las características del trabajo en presencia.

Sin embargo, en ocasiones puede ser ilustrativo trabajar con el hipercilindro que contenga la solución pseudoinversa de que se trate. Este será de la forma

$$x_p^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x_p = k_p^2 = \text{conocido} \quad (244)$$

siendo

$$x_p = S^+ \cdot A^T \cdot P \cdot K = \text{solución pseudoinversa conocida} \quad (245)$$

y las elipses sección serán de la forma

$$x_j \quad x_l \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{jj}^+ & \sigma_{jl}^+ \\ \sigma_{jl}^+ & \sigma_{ll}^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j \\ x_l \end{pmatrix} = k_p^2 \quad (246)$$

Es banal que puede generalizarse aún más estableciendo para cualquier solución inversa generalizada el hipercilindro

$$x_g^T \cdot \sigma_{xx}^- \cdot x_g = k_g^2 = \text{conocido} \quad (247)$$

$$x_g = S^- \cdot A^T \cdot P \cdot K = \text{solución pseudoinversa conocida} \quad (248)$$

y las elipses sección

$$x_j \quad x_l \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{jj}^- & \sigma_{jl}^- \\ \sigma_{jl}^- & \sigma_{ll}^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j \\ x_l \end{pmatrix} = k_g^2 \quad (249)$$

Entendemos que existe no obstante un problema de interpretación no suficientemente investigado. Efectivamente, siendo el hipercilindro en general no canónico,

su sección por cualquier hiperplano coordenado generado por la pareja de ejes (Ox_j, Ox_l) será una elipse.

Pero se da la paradoja de que, contrariamente lo que sucede en los supuestos probabilísticos estudiados, es desfavorable que el hipercilindro presente la expresión canónica, pues $d = n - R(S)$ ejes serán paralelos a las direcciones generatrices y los planos secantes de que formen parte darán lugar a elipses degeneradas en pares de rectas paralelas²⁰ al tender a infinito uno de sus ejes. En situaciones próximas a la expuesta, la configuración de las elipses, de gran excentricidad, será muy desfavorable.

En cualquier caso, la utilidad de lo que antecede se pone de manifiesto especialmente si se trabaja con las dos zonas de distinta significación que anteriormente hemos definido como A y B, siendo A la correspondiente a los vértices a determinar y B los puntos de apoyo. *Y todo conduce a preferir el método de ajuste por Incrementos de Coordenadas con dos subredes, cuya geometría es perfectamente conocida y presenta un defecto de rango mínimo, $d = 1$, en cada una de ellas.*

La sensibilidad de la red puede estudiarse, obviamente, aplicando el algoritmo que antecede a la zona B, que se resuelve por una pseudoinversa. Las expresiones (243) tienen el significado de elipses de sensibilidad de la red.

En la red de la figura 2.8 del epígrafe 2.1, como explica el texto adjunto a esa figura, son inmediatas las elipses de sensibilidad de los vértices $V3$ y $V4$ correspondientes a la zona B, y la información no probabilística de cuatro puntos más a los cuatro que habíamos obtenido hasta ahora generados en la zona A es decir, $V1$ y $V2$. Y también las nuevas elipses, que llamaremos de transición, referidas a puntos

²⁰Su expresión será

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

la elipse degenera en las dos rectas paralelas $x = \pm a$

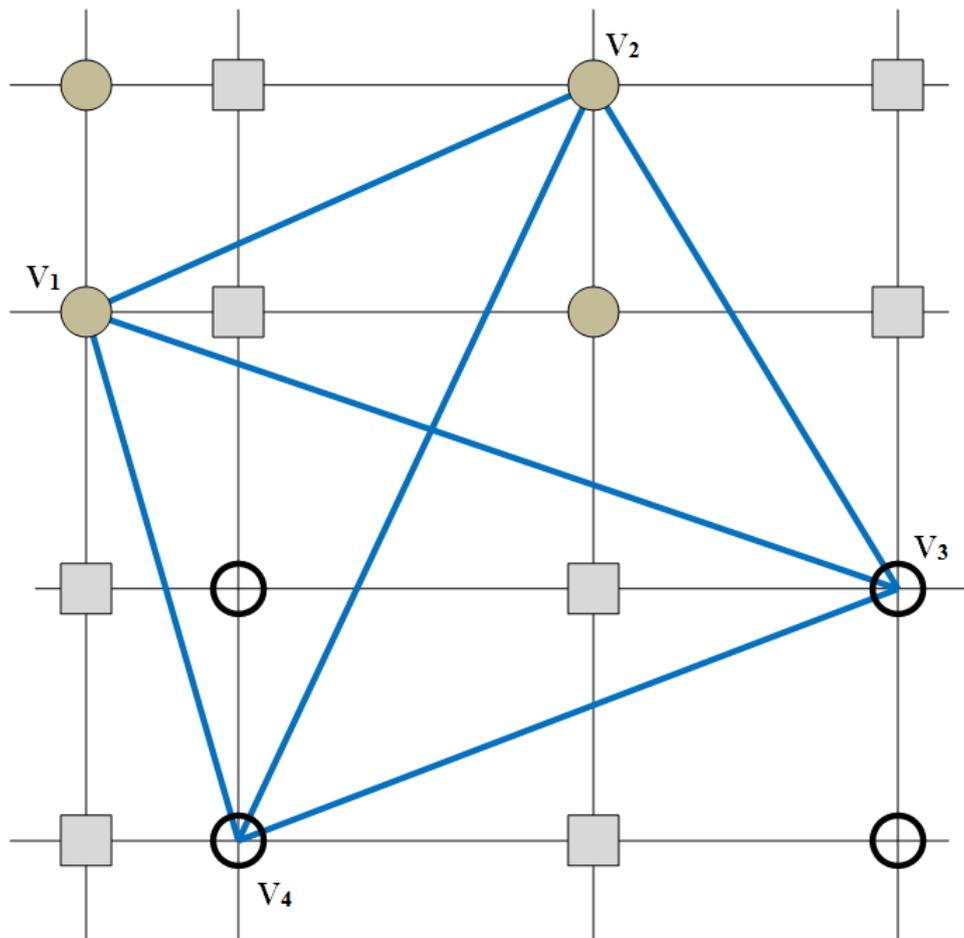


Figura 2.17: Densificación del plano del levantamiento

con abscisas procedentes de la zona A y ordenadas de la zona B y viceversa. No probabilística.

De tal manera que solo utilizando la primera técnica de densificación, de malla rectangular, sin rotación de ejes, se ha pasado de las 4 figuras básicas generadas por los dos vértices libres, agregando dos vértices correlativos, a 16 figuras de información y control de otros tantos puntos de la red.

Y un primer criterio en el esencial aspecto del poder de afirmación en la interpretación de sus resultados, parciales y finales es obvio. Las elipses de sensibilidad (zona B) deben ser de dimensiones y superficie inferior a las de error (zona A). Las de transición, intermedias. La calidad de la red será tanto mejor cuanto más homogéneos sean los tres grupos de elipses considerados por separado y cuanto menor sean las diferencias existentes entre cada uno de ellos y los otros dos.

Finalmente, utilizando técnicas de arco capaz puede llegar a obtenerse, sin mayor dificultad, doble y hasta triple información conceptualmente diferenciada sobre cualquier punto de la red o relacionable geoméricamente con ella según la metodología establecida.

En cuanto al resto, repetimos una vez más que como sucede en cualquier obra de Ingeniería de alto nivel, todo depende del buen hacer del proyectista y su mejor criterio. Y como ya dijimos, imposible de sustituir por un programa informático.

Capítulo 3

APLICACIÓN SOBRE LA RED DE LA UPV

3.1. Vértices iniciales

A continuación aplicaremos la teoría expuesta utilizando como ejemplo práctico una pequeña red de cuatro vértices, como lo hemos venido haciendo desde el principio de la presente disciplina, compensada por inversa recíproca generalizada por zonas de distinta significación. Consideraremos todos los casos posibles de densificación: vértices correlativos, pertenecientes al arco capaz y obtenidos por ejes oblicuos.

Partimos de la red calculada en el artículo “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”¹. Croquis de la red y coordenadas compensadas en cuadro y figura 3.1.

¹Publicado en la revista digital de la Real Academia de Cultura Valenciana: www.racv.es/racv-digital. Valencia, 2012.

Vértice	Coordenadas compensadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{V3}	167,5210 m
Y_{V3}	88,0114 m
X_{V4}	99,9999 m
Y_{V4}	99,9993 m

Cuadro 3.1: Coordenadas compensadas de la red

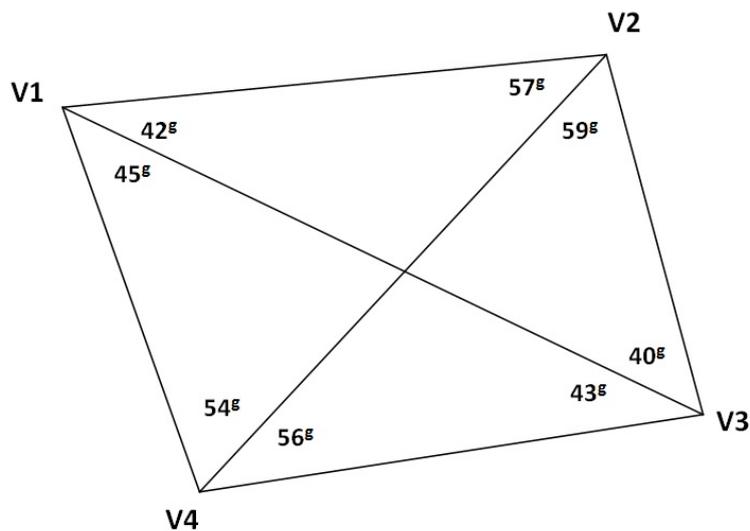


Figura 3.1: Croquis de la red

3.2. RECINTOS DE ERROR DE LOS VÉRTICES INICIALES

La red en estudio se ha calculado con solución inversa generalizada recíproca con zonas de distinta significación. Siempre existen dos zonas de muy distinta significación en cualquier red, a saber:

- La zona que llamaremos “A”, concernida por vértices libres V_1 y V_2 , de coordenadas a determinar .
- La zona “B”, de vértices o puntos de apoyo V_3 y V_4 , que se consideran fijos, cuyas coordenadas se entienden en principio invariables y conocidas a priori.

Según el artículo citado, recopilamos a continuación parámetros y matrices necesarios para obtener los recintos de error de los vértices de una y otra zona.

3.2.1. LA ZONA “A”

3.2.1.1. COORDENADAS DE LA ZONA “A”

Las coordenadas de la zona “A” son:

Vértice	Coordenadas
X_{V_1}	100,0004 m
Y_{V_1}	166,5963 m
X_{V_2}	163,0152 m
Y_{V_2}	154,2495 m

3.2.1.2. VARIANZA A PRIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD

El estimador de la varianza a priori de la subred 1 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas X es:

$$\sigma^2 = 2,5827 \cdot 10^{-7}$$

la desviación típica: $\sigma = 4,0927 \cdot 10^{-4} = 0,00041$ m

El estimador de la varianza a priori de la subred 2 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas Y es:

$$\sigma^2 = 8,1904 \cdot 10^{-7}$$

la desviación típica: $\sigma = 0,0009$ m

3.2.1.3. VARIANZA A POSTERIORI DEL OBSERVABLE DE PESO UNIDAD

El estimador de la varianza a posteriori de la subred 1 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas X es:

$$\sigma_0^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m_1 + m_2 - n} = 1,6974 \cdot 10^{-7} = 1,7 \cdot 10^{-7}$$

la desviación típica: $\sigma = 4,1231 \cdot 10^{-4} = 0,00041 \text{ m}$

El estimador de la varianza a posteriori de la subred 2 que hace referencia a las correcciones a las coordenadas Y es:

$$\sigma_0^2 = \frac{R^T \cdot P \cdot R}{m_1 + m_2 - n} = 1,868 \cdot 10^{-6}$$

la desviación típica: $\sigma = 0,0014 \text{ m}$

3.2.1.4. MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”

Conocidas las matrices M de la subred 1 y de la subred 2: M_{11} , M_{12} , M_{21} y M_{22} calculadas en el epígrafe 2.4 del artículo de referencia², podemos obtener las matrices cofactor de los vértices de la zona “A” a partir de la conocida expresión:

$$Q_{x_a x_a} = M_{11}^{-1}$$

$$Q_{x_a x_a} = M_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2931 & 0,1439 \\ 0,1439 & 0,4591 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 1}$$

$$Q_{y_a y_a} = M_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4684 & 0,0395 \\ 0,0395 & 0,0699 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 2}$$

3.2.1.5. MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”

En la subred 1 la matriz varianza covarianza es:

² Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre...”. Epígrafe 2.4. *Opus Cit.*

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_a x_a} = \begin{pmatrix} 0,497454042398561 & 0,244315435251555 \\ 0,244315435251555 & 0,779209385343674 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

En la subred 2 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_a y_a} = \begin{pmatrix} 0,875049760666387 & 0,073709532985295 \\ 0,073709532985295 & 0,130635982125522 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} m^2$$

3.2.1.6. SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “A”

Con el fin de conocer la probabilidad de que el vértice $V1$ compensado se encuentre dentro de su recinto de error y, a su vez el $V2$ se encuentre dentro del suyo simultáneamente³ es necesario conocer el hiperparalelepípedo como hipervolumen de error, en posición no canónica, constituido por los ejes σ_{xv1} , σ_{xv2} , σ_{yv1} y σ_{yv2} , en el sistema de referencia que situamos plano a plano y por parejas de ejes de coordenadas en el plano del levantamiento⁴. En nuestro ajuste será un hipervolumen de error de 4 dimensiones porque tenemos 4 variables libres, que recordamos son las correcciones: dx_{V1} , dy_{V1} , dx_{V2} , dy_{V2} , pertenecientes a la zona que hemos llamado “A”.

A partir de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{xx} y σ_{yy} , se sigue:

$$\sigma_{xv1} = \sqrt{0,4922 \cdot 10^{-7}} = 2,2186 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{xv2} = \sqrt{0,7709 \cdot 10^{-7}} = 2,7765 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv1} = \sqrt{0,8750 \cdot 10^{-6}} = 9,3541 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv2} = \sqrt{0,1306 \cdot 10^{-6}} = 3,6139 \cdot 10^{-4} m$$

Que constituyen los semilados de los rectángulos canónicos de error a partir de las elipses no canónicas.

³ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas”. Epígrafe 2.7.1. *Opus cit.*

⁴ Recordamos que el hiperparalelepípedo no tiene realidad física. Pero sus secciones por los planos coordenados de su espacio “ x ”, sí.

3.2.1.7. AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “A”

Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza σ_{xx} y σ_{yy} , se encuentran en cuadros sucesivos ⁵:

-0,8659	0,5002
0,5002	0,8659

Cuadro 3.2: Matriz de autovectores Γ_1 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{xx} de la subred 1

0,0976	-0,9952
-0,9952	0,0976

Cuadro 3.3: Matriz de autovectores Γ_2 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{yy} de la subred 2

$\mu_{\sigma^2_{xv1}} = 0,3525 \cdot 10^{-7}$	0
0	$\mu_{\sigma^2_{xv2}} = 0,9106 \cdot 10^{-7}$

Cuadro 3.4: Matriz $V_1 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{xx} de la subred 1

$\mu_{\sigma^2_{yv1}} = 0,8823 \cdot 10^{-6}$	0
0	$\mu_{\sigma^2_{yv2}} = 0,1234 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.5: Matriz $V_2 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{yy} de la subred 2

⁵ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. “Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas”. Epígrafe 2.7.1. *Opus cit.*

3.2.1.8. SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES

Aplicar una rotación a los semiejes no canónicos (obtenidos a partir de σ_{xx} y σ_{yy} , como hemos visto) hasta su posición canónica⁶ según la expresión:

$$\sigma_{zz} = \Gamma^T \cdot \sigma_{xx} \cdot \Gamma$$

siendo

Γ = matriz de autovectores columna de σ_{xx} y σ_{yy}

$\sigma_{zz} = V$ = matriz diagonal de autovalores de σ_{xx} y σ_{yy}

nos permite conocer los semiejes del hiperelipsoide de error inscrito en el hiperparalelepípedo en el sistema canónico σ_{zz} . Así, a partir de las matrices V de autovalores obtenemos:

$$\sigma_{x'v1} = a_{v4} = \sqrt{0,3525 \cdot 10^{-7}} = 1,8775 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{x'v2} = b_{v4} = \sqrt{0,9106 \cdot 10^{-7}} = 3,0176 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{y'v1} = a_{v1} = \sqrt{0,8823 \cdot 10^{-6}} = 9,3931 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{y'v2} = b_{v1} = \sqrt{0,1234 \cdot 10^{-6}} = 3,5128 \cdot 10^{-4} m$$

Si comparamos estos semiejes con los semilados del epígrafe 3.2.1.6, la diferencia entre la posición canónica con la no canónica, es de 1 y 2 décimas de milímetro.

Es la posición canónica la que nos permite calcular la fiabilidad conjunta con varios vértices libres, pero en el caso presente, para estudiar los recintos de error es aconsejable estudiar la matriz de autovectores conjunta Γ de σ_{xx} , y σ_{yy} , cfr. cuadro 3.6,

⁶Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". Epígrafe 2.7.1. *Opus cit.*

-0,8659	0,5002	0	0
0,5002	0,8659	0	0
0	0	0,0976	-0,9952
0	0	-0,9952	0,0976

Cuadro 3.6: Matriz de autovectores Γ de la matriz varianza covarianza total de las variables

donde comprobamos que dos autovectores con todos sus componentes nulos menos dos indica que sus autovalores correspondientes están sobre un mismo hiperplano coordenado, también los semiejes del hiperelipsoide que correspondan, y por lo tanto, la elipse que definen. Comprobamos que la rotación de los ejes del hipervolumen de error hasta su posición canónica mantiene las figuras de error dentro del plano del levantamiento, y no las proyecta fuera de él. En este caso es inmediato deducir una figura de error, en general no canónica y con realidad física (en concreto el rectángulo) asociada a cada punto de la zona "A". Es lícito girar elipses y rectángulos hasta posición canónica y aplicar Análisis Multivariante con variables separadas.

3.2.1.9. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

El Análisis Multivariante se puede aplicar directamente, sin transformación alguna a los parámetros de error no canónicos porque sus dimensiones son muy próximas a las de los parámetros canónicos. Lo importante es que la relación entre ejes canónicos y mal llamados no canónicos (en realidad, desviaciones típicas, según teoría) es aceptable, resultando próxima a 1 en todos los casos (cfr. (3) en el cuadro 3.7). Por otra parte, todas las figuras de error resultantes son bidimensionales, y pueden situarse sobre el plano del levantamiento.

	Semieje/ semilado	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$
(1)	Semieje elipse ^a	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$
(2)	Semilado ^b	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
(3)	(2)/(1)	$\frac{2,2186}{1,8775} = 1,18$	$\frac{9,3541}{9,3931} = 0,9958$	$\frac{2,7765}{3,0176} = 0,9201$	$\frac{3,6139}{3,5128} = 1,029$
(4)	Semilado corregido	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
(5)	Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$
(6)	$K = 3, n = 4, P = 98,96\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$
(7)	$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$

Cuadro 3.7: Recintos de error de los vértices V1 y V2

^aEquivale a la raíz del autovalor.

^bCoordenadas en valor absoluto de las intersecciones con los ejes Oxy de las tangentes a la elipse no canónica paralelos a ellos.

Recordamos⁷ que para evitar que el área/volumen de la podaria/hiperpodaria supere al del rectángulo/hiperparalelepípedo y siendo las longitudes de los semiejes arbitrarios a y b de elipse/hiperelipsoide:

$$a = b \cdot \operatorname{tg} 71,25^\circ = b \cdot 2,06$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} 28,75^\circ = b \cdot 0,48$$

deberá cumplirse

$$0,48 = \operatorname{tg} 28,75^\circ < \frac{a}{b} < \operatorname{tg} 71,25^\circ = 2,06$$

con óptimo en $\frac{a}{b} = 1 = \operatorname{tg} 50^\circ$, caso círculo \equiv elipse.

La relación entre los semilados $a = x_i = \sigma x_{vi}$ y $b = y_i = \sigma y_{vi}$ (cfr. (4) en el cuadro 3.7) del recinto rectangular de error de cada vértice se cumple, con la excepción del semilado del semieje x_1 , lo sustituimos por el valor del semilado y_1 dividido por 2, lo que equivale a ampliar el recinto de error, resultando:

$$\frac{9,3541 \cdot 10^{-4}}{2} = 4,6771 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Multiplicamos por dos cada semilado (cfr. (5) en el cuadro 3.7) para obtener el lado del rectángulo de error. Siendo la relación entre ejes canónicos y lados próxima a 1, preferimos elegir los lados porque siempre están sobre el plano del levantamiento, con evidente realidad física (además, en este caso los no canónicos también están en el plano del levantamiento).

A partir de la expresión⁸:

$$P_{RK\sigma zn} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K]^n$$

calculamos el porcentaje de fiabilidad multivariante $P_{nRK\sigma z}$ de los dos vértices libres de la red.

En nuestro caso $n = 4$, tenemos 4 variables:

⁷Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". Epígrafe 1.3.3.2. *Opus cit.*

⁸Conocida por la teoría expuesta en M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ, ET ALT. "Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con GNSS y ajustada por incrementos de coordenadas". Epígrafe 1.2.2, ecuación (97). *Opus cit.*

$$\sigma_{x_{v1}}, \sigma_{y_{v1}}, \sigma_{x_{v2}} \text{ y } \sigma_{y_{v2}}$$

La probabilidad asociada a los rectángulos de error de los vértices $V1$ y $V2$, para $n = 4$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ es:

$$P_{RK\sigma_{zn}} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K]^n = (2 \cdot 0,4987)^4 = 0,9974^4 = 0,9896 = 98,96\%$$

98,96% es la probabilidad simultánea de que los vértices exactos y desconocidos $V1$ y $V2$ se encuentren en sus rectángulos de error, cuyos centros son las coordenadas compensadas de sus vértices respectivos tras el ajuste de las subredes, (cfr. (6) en el cuadro 3.7).

Es evidente que la selección de los elementos de cruce de las q filas y q columnas elegidas en la matriz varianza covarianza cuadrada de orden n inicial σ_{xx} y σ_{yy} modifica la superficie de error de los vértices de que se trate, debido a la influencia de otros vértices. Al estudiar la probabilidad de ubicación del vértice exacto $V1$ en solitario en su recinto de error es diferente a la de ese mismo vértice considerando los vértices $V1$ y $V2$ simultáneamente, resultando que:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 2^q \cdot [(N(0, 1)_0^K]^q$$

siendo $n = 2$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 0,9974^2 = 0,9948 = 99,48\% \quad (\text{cfr. (7) en el cuadro 3.7}).$$

Con la pretensión de comparar los recintos de error canónicos y no canónicos de los vértices $V1$ y $V2$, hacemos los cálculos que siguen.

Unimos las dos matrices varianza covarianza σ_{xx} , obtenidas a partir de los ajustes independientes de las subredes, tenemos:

$\sigma_{x_{v1}}^2 = 0,4922 \cdot 10^{-7}$	$\sigma_{x_{v1}\sigma_{x_{v2}}} = 0,2417 \cdot 10^{-7}$	0	0
$\sigma_{x_{v1}\sigma_{x_{v2}}} = 0,2417 \cdot 10^{-7}$	$\sigma_{x_{v2}}^2 = 0,7709 \cdot 10^{-7}$	0	0
0	0	$\sigma_{y_{v1}}^2 = 0,8750 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{y_{v1}\sigma_{y_{v2}}} = 0,0737 \cdot 10^{-6}$
0	0	$\sigma_{y_{v1}\sigma_{y_{v2}}} = 0,0737 \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{y_{v2}}^2 = 0,1306 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.8: Matriz varianza covarianza total de las variables σ_{xx}

Y la matriz de los autovalores σ_{zz} de la matriz varianza covarianza total σ_{xx} será:

$\mu_{\sigma^2 x'v1} = 0,3525 \cdot 10^{-7}$	0	0	0
0	$\mu_{\sigma^2 x'v2} = 0,9106 \cdot 10^{-7}$	0	0
0	0	$\mu_{\sigma^2 y'v1} = 0,8823 \cdot 10^{-6}$	0
0	0	0	$\mu_{\sigma^2 y'v2} = 0,1234 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.9: Matriz σ_{zz} de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{xx}

Siguiendo la figura 2.3, del epígrafe 2.1, la elipse no canónica está inscrita en un rectángulo de lados $2 \cdot \sigma_x$ y $2 \cdot \sigma_y$, y la elipse canónica inscrita en un rectángulo de lados $2 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'vi}}$ y $2 \cdot b = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'vi}}$.

En nuestro caso tenemos dos elipses no canónicas, para los vértices $V1$ y $V2$, y sus rectángulos son:

- Rectángulo circunscrito a elipse no canónica R_{V1} de lados:

$$l_{1-V1} = 2 \cdot \sigma_{xv1} = 2 \cdot 4,6771 \cdot 10^{-4} = 9,3541 \cdot 10^{-4} m$$

$$l_{2-V1} = 2 \cdot \sigma_{yv1} = 2 \cdot 9,3541 \cdot 10^{-4} m = 0,001870 m$$

- Rectángulo circunscrito a elipse no canónica R_{V2} de lados:

$$l_{1-V2} = 2 \cdot \sigma_{xv4} = 2 \cdot 2,7765 \cdot 10^{-4} m = 5,5530 \cdot 10^{-4} m$$

$$l_{2-V2} = 2 \cdot \sigma_{yv4} = 2 \cdot 3,6139 \cdot 10^{-4} m = 7,2278 \cdot 10^{-4} m$$

Y también dos elipses canónicas, para los vértices $V1$ y $V2$, y sus rectángulos son:

- Rectángulo circunscrito a elipse canónica R'_{V1} de lados:

$$l'_{1-V1} = 2 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v1}} = 2 \cdot 4,6771 \cdot 10^{-4} = 9,3541 \cdot 10^{-4} m$$

(siendo $4,6771 \cdot 10^{-4}$ el semilado corregido, según páginas anteriores)

$$l'_{2-V1} = 2 \cdot b = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v1}} = 2 \cdot 9,3931 \cdot 10^{-4} = 0,001879 \text{ m}$$

- Rectángulo circunscrito a elipse canónica R'_{V2} de lados:

$$l'_{1-V2} = 2 \cdot a = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v2}} = 2 \cdot 3,0176 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 6,0352 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$l'_{2-V2} = 2 \cdot b = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v2}} = 2 \cdot 3,5128 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 7,0256 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Si comparamos ambos rectángulos de error (con elipses canónicas y no canónicas) podemos ver que las diferencias son muy pequeñas. Y aplicando análisis multivariante, las fiabilidades asociadas a los lados del rectángulo R'_{V1} del vértice libre $V1$, y del rectángulo R'_{V2} del vértice libre $V2$, secciones del hiperparalelepípedo circunscrito al hiperelipsoide canónico de error, son:

- siendo $K = 3$, $n = 4 \implies$

$$\implies P_{RK\sigma zn} = 2^4 \cdot [(N(0,1)_0^3]^4 = (2 \cdot 0,4987)^4 = 0,9974^4 = 98,96 \%$$

$$l'_{1-V1} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v1}} \cdot K = 0,0028 \text{ m}$$

$$l'_{2-V1} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v1}} \cdot K = 0,0056 \text{ m}$$

$$l'_{1-V4} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 x'v2}} \cdot K = 0,0018 \text{ m}$$

$$l'_{2-V4} = 2 \cdot \sqrt{\mu_{\sigma^2 y'v2}} \cdot K = 0,0021 \text{ m}$$

Que podemos comparar con lados de los rectángulos secciones del hiperparalelepípedo circunscrito al hiperelipsoide no canónico de error, con la misma fiabilidad, calculados en el cuadro 3.7:

- siendo $K = 3$, $n = 4$

$$\implies P_{RK\sigma zn} = 2^4 \cdot [(N(0,1)_0^3]^4 = (2 \cdot 0,4987)^4 = 0,9974^4 = 98,96 \%$$

$$l_{1-V1} = 0,0028 \text{ m}$$

$$l_{2-V1} = 0,0057 \text{ m}$$

$$l_{1-V4} = 0,0017 \text{ m}$$

$$l_{2-V4} = 0,0022 \text{ m}$$

3.2.2. LA ZONA “B”

3.2.2.1. COORDENADAS DE LA ZONA “B”

Las coordenadas de la zona “B” son:

Vértice	Coordenadas
X_{V3}	167,5210 m
Y_{V3}	88,0114 m
X_{V4}	99,9999 m
Y_{V4}	99,9993 m

3.2.2.2. MATRIZ COFACTOR DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”

Conocidas las matrices M de la subred 1 y de la subred 2: M_{11} , M_{12} , M_{21} y M_{22} calculadas en el epígrafe 2.4 del artículo de referencia⁹, podemos obtener las matrices cofactor de los vértices de la zona “B” a partir de la conocida expresión:

$$Q_{x_b x_b} = (M_{22} - M_{21} \cdot M_{11}^{-1} \cdot M_{12})^+ = S_b^+$$

$$Q_{x_b x_b} = \begin{pmatrix} 0,0875 & -0,0875 \\ -0,0875 & 0,0875 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 1}$$

$$Q_{y_b y_b} = \begin{pmatrix} 0,0451 & -0,0451 \\ -0,0451 & 0,0451 \end{pmatrix}, \text{ matriz cofactor de la subred 2}$$

3.2.2.3. MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”

En la subred 1 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_b x_b} = \begin{pmatrix} 0,1470 & -0,1470 \\ -0,1470 & 0,1470 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

⁹ Cfr. M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET ALT “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre...”. Epígrafe 2.4. *Opus Cit.*

En la subred 2 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_b y_b} = \begin{pmatrix} 0,8419 & -0,8419 \\ -0,8419 & 0,8419 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

3.2.2.4. SEMILADOS DE LOS RECTÁNGULOS DE ERROR A PARTIR DE LAS MATRICES VARIANZA COVARIANZA DE LA ZONA “B”

A partir de la matriz varianza covarianza de las variables de la zona “B” σ_{xx} y σ_{yy} , se sigue:

$$\sigma_{xv3} = \sqrt{0,1470 \cdot 10^{-7}} = 2,90155 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{xv4} = \sqrt{0,1470 \cdot 10^{-7}} = 2,90155 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv3} = \sqrt{0,8419 \cdot 10^{-7}} = 1,2124 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{yv4} = \sqrt{0,8419 \cdot 10^{-7}} = 1,2124 \cdot 10^{-4} m$$

Que constituyen los semilados de los rectángulos canónicos de error a partir de las elipses no canónicas.

3.2.2.5. AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS VÉRTICES DE LA ZONA “B”

Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza σ_{xx} y σ_{yy} , se encuentran en cuadros sucesivos:

-0,7071	-0,7071
-0,7071	0,7071

Cuadro 3.10: Matriz de autovectores Γ_1 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{xx} de la subred 1

-0,7071	-0,7071
-0,7071	0,7071

Cuadro 3.11: Matriz de autovectores Γ_2 de la matriz varianza covarianza de las variables σ_{yy} de la subred 2

$\mu_{\sigma^2 xv3} = 0$	0
0	$\mu_{\sigma^2 xv4} = 0,2940 \cdot 10^{-7}$

Cuadro 3.12: Matriz $V_1 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{xx} de la subred 1

$\mu_{\sigma^2 yv3} = 0$	0
0	$\mu_{\sigma^2 yv4} = 0,1684 \cdot 10^{-6}$

Cuadro 3.13: Matriz $V_2 = \sigma_{zz}$ de autovalores de la matriz varianza covarianza σ_{yy} de la subred 2

3.2.2.6. SEMIEJES DE LAS FIGURAS DE ERROR A PARTIR DE LOS AUTOVALORES

Los semiejes del hiperelipsoide de error inscrito en el hiperparalelepípedo en el sistema canónico σ_{zz} . Así, a partir de las matrices V de autovalores obtenemos:

$$\sigma_{x'v3} = a_{v4} = \sqrt{0} = 0 \text{ m}$$

$$\sigma_{x'v4} = b_{v4} = \sqrt{0,2940 \cdot 10^{-7}} = 1,7146 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_{y'v3} = a_{v1} = \sqrt{0} = 0 \text{ m}$$

$$\sigma_{y'v4} = b_{v1} = \sqrt{0,1684 \cdot 10^{-6}} = 4,1037 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Como debía ser, el recinto de error definido por el hiperelipsoide canónico tiene dos semiejes nulos, que provienen de la solución pseudoinversa, degenerando así en un hipercilindro recto, según sabemos.

Ante esta situación, que se repetirá siempre que la solución sea la pseudoinversa, recurriremos en su momento a aplicar el epígrafe 2.3, que nos permitirá extraer conclusiones generales para la densificación a partir de los vértices de la zona "B".

Capítulo 4

DENSIFICACIÓN DE LA RED DE LA UPV

A partir de las coordenadas compensadas de la zona “A” de la red en estudio densificaremos con:

- los puntos correlativos,
- puntos pertenecientes al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$ sobre la alineación de los vértices $V1V2$,
- y cualquier punto que interese al proyectista.

A partir de las coordenadas compensadas de la zona “B” de la red en estudio densificaremos con:

- los puntos correlativos, sin información probabilística.

A partir de las coordenadas compensadas de la zona “A” y de la zona “B” conjuntamente densificaremos con:

- los puntos con abscisas procedentes de la zona “A” y ordenadas de la zona “B” y viceversa, sin información probabilística.

4.1. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “A”

Los puntos correlativos, según la teoría expuesta en el epígrafe 2.1 serán los vértices V_5 y V_6 de coordenadas:

Vértice	Coordenadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{V5}	100,0004 m
Y_{V5}	154,2495 m
X_{V6}	163,0152 m
Y_{V6}	166,5963 m

Cuadro 4.1: Vértices de la zona “A” V_1 y V_2 y vértices correlativos V_5 y V_6 .

4.1.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

En el cuadro 4.2 definimos los recintos de error de cada uno de los vértices en estudio¹.

La probabilidad asociada a los rectángulos de error de los vértices V_1 , V_2 , V_5 , y V_6 , para $n = 8$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ es:

$$P_{RK\sigma zn} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K]^n = (2 \cdot 0,4987)^8 = 0,9974^8 = 0,9794 = 97,94\%$$

97,94% es la probabilidad simultánea de que los vértices exactos V_1 , V_2 , V_5 y V_6 se encuentren en sus rectángulos de error, cuyos centros son las coordenadas compensadas de sus vértices respectivos.

¹Según los datos del ejemplo del epígrafe 2.4.2.8 de M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET AL., “Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas”, *Opus cit.*

Es evidente que la selección de los elementos de cruce de las q filas y q columnas elegidas en la matriz varianza covarianza cuadrada de orden n inicial σ_{xx} y σ_{yy} modifica la superficie de error de los vértices de que se trate, debido a la influencia de otros vértices. Al estudiar la probabilidad de ubicación del vértice exacto $V1$ en solitario en su recinto de error es diferente a la de ese mismo vértice considerando los vértices $V1$, $V2$, $V5$, y $V6$ simultáneamente, resultando que:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 2^q \cdot \left[(N(0,1))_0^K \right]^q$$

siendo $n = 2$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 0,9974^2 = 0,9948 = 99,48\%$$

4.2. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS PERTENECIENTES AL ARCO CAPAZ DE $\frac{\pi}{2}$ SOBRE LA BASE DEFINIDA POR LOS VÉRTICES $V1 V2$

Un punto perteneciente al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$ sobre la base definida por los vértices $V1$ y $V2$, según la teoría expuesta en el epígrafe 2.1 puede ser el vértices VM , de azimutes:

$$\text{Azimut de } V1 M = \theta_{V1M} = \frac{\pi}{2} - \delta = 100^g - 50^g = 50^g$$

$$\text{Azimut de } V2 M = \theta_{V2M} = 2 \cdot \pi - \delta = 400^g - 50^g = 350^g$$

por intersección directa virtual desde la base $V1V2$ de coordenadas conocidas, obtenemos el vértice V_M :

Semiejes/ semilados	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$	$x_5 = \sigma x_{v5}$	$y_5 = \sigma y_{v5}$	$x_6 = \sigma x_{v6}$	$y_6 = \sigma y_{v6}$
Semieje elipse	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$
Semilados	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$
Semilados corregidos	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$
Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$
$K = 3, n = 8, P = 97,94\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0028 m$	$0,0022 m$	$0,0017 m$	$0,0057 m$
$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0028 m$	$0,0022 m$	$0,0017 m$	$0,0057 m$

Cuadro 4.2: Recintos de error y fiabilidades asociadas de los vértices principales y correlativos, V1, V2, V5, y V6

Vértice	Coordenadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{VM}	125,33439 m
Y_{VM}	128,91550 m

Cuadro 4.3: Vértices de la zona "A" $V1$ y $V2$ y el vértice del arco capaz VM .

4.2.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

En la subred 1 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_a x_a} = \begin{pmatrix} 0,497454042398561 & 0,244315435251555 \\ 0,244315435251555 & 0,779209385343674 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

En la subred 2 la matriz varianza covarianza es:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_a y_a} = \begin{pmatrix} 0,875049760666387 & 0,073709532985295 \\ 0,073709532985295 & 0,130635982125522 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} m^2$$

La matriz varianza covarianza total será:

$$\sigma_{xyxy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_{V1}y_{V1}x_{V2}y_{V2}} = \begin{pmatrix} 0,4922 & 0 & 0,2417 & 0 \\ 0,2417 & 0 & 0,7709 & 0 \\ 0 & 8,750 & 0 & 0,737 \\ 0 & 0,737 & 0 & 1,306 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

La inversa de la matriz varianza covarianza total será:

$$\sigma_{xyxy}^{-1} = \begin{pmatrix} 2,4014 & -0,7529 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1999 & -0,6771 \\ -0,7529 & 1,5332 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6771 & 0,80391 \end{pmatrix} \cdot 10^7 m^2$$

Operando con todos los decimales posibles, en previsión de errores inaceptables de redondeo, la inversa de la matriz varianza covarianza total será:

$$\sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2,37250538823529 & -0,743881808235294 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1199817363490365 & -0,0676980232334050 \\ -0,743881808235294 & 1,514628055294118 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0676980232334050 & 0,8036835485010704 \end{pmatrix} \cdot 10^7 m$$

Aplicando la expresión (109):

$$[(x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \quad (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (x_M \cdot \text{sen } \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \quad (-x_M \cdot \text{sen } \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta]$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \cos \delta \\ (x_M \cdot \cos \delta + y_M \cdot \text{sen } \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (x_M \cdot \text{sen } \delta - y_M \cdot \cos \delta) \cdot \text{sen } \delta \\ (-x_M \cdot \text{sen } \delta + y_M \cdot \cos \delta) \cdot \cos \delta \end{pmatrix} = C^2$$

Con $\cos \delta = \text{sen } \delta$ se simplifica la expresión (109):

$$[(x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \quad (x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \quad (x_M - y_M) \cdot \cos^2 \delta \quad (-x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta]$$

$$\begin{pmatrix} 2,3725 & -0,7439 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1200 & -0,0677 \\ -0,7439 & 1,5146 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0677 & 0,8037 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{pmatrix} (x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \\ (x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \\ (x_M - y_M) \cdot \cos^2 \delta \\ (-x_M + y_M) \cdot \cos^2 \delta \end{pmatrix} =$$

$$= C^2$$

Y operando se sigue

$$(x_M^2 \cdot 3,4584 + y_M^2 \cdot 1,5416 + 2 \cdot x_M \cdot y_M \cdot 0,7572) \cdot 10^7 \cdot \cos^4 \delta = C^2$$

$$x_M^2 \cdot 3,4584 \cdot 10^7 \cdot 0,25 + y_M^2 \cdot 1,5416 \cdot 10^7 \cdot 0,25 + 2 \cdot x_M \cdot y_M \cdot 0,7572 \cdot 10^7 \cdot 0,25 = C^2$$

$$x_M^2 \cdot 0,8646 \cdot 10^7 + y_M^2 \cdot 0,3854 \cdot 10^7 - 2 \cdot x_M \cdot y_M \cdot (-0,1893) \cdot 10^7 = C^2$$

elipse con centro en el origen de coordenadas, como debía ser. Hemos comprobado que obtenemos la misma elipse aplicando la ecuación (224).

La ecuación de la elipse genérica es:

$$\frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \cdot (x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy}) = C^2$$

$$x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} - C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$$

Comparando la ecuación standard de la elipse

$$x^2 \cdot \sigma_y^2 + y^2 \cdot \sigma_x^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \sigma_{xy} - (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0$$

con la del punto M , proveniente de la ecuación (109), obtenemos los valores de las varianzas σ_y^2 , σ_x^2 , y la covarianza σ_{xy} , siendo el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas el que sigue:

$$\frac{0,8646 \cdot 10^7}{\sigma_y^2} = \frac{0,3854 \cdot 10^7}{\sigma_x^2} = \frac{-0,1893 \cdot 10^7}{\sigma_{xy}} = \frac{C^2}{C^2 \cdot (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} = \frac{1}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}$$

Cuya solución es:

$$\sigma_y^2 = 2,9074 \cdot 10^{-7} \implies \sigma_y = 5,3920 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_x^2 = 1,2960 \cdot 10^{-7} \implies \sigma_x = 3,6000 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sigma_{xy} = -0,63655 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Valores que guardan una perfecta relación con los de las elipses de error de los vértices $V1$ y $V2$.

En el cuadro 4.4 definimos los recintos de error de cada uno de los vértices en estudio.

La probabilidad asociada a los rectángulos de error de los vértices $V1$, $V2$ y VM , para $n = 6$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ es:

$$P_{RK\sigma zn} = 2^n \cdot [(N(0, 1)_0^K]^n = (2 \cdot 0,4987)^6 = 0,9974^6 = 0,9845 = 98,45 \%$$

99,45% es la probabilidad simultánea de que los vértices exactos $V1$, $V2$ y VM se encuentren en sus rectángulos de error, cuyos centros son las coordenadas compensadas de sus vértices respectivos.

La probabilidad de ubicación del vértice exacto $V1$ en solitario en su recinto de error es diferente a la de ese mismo vértice considerando los vértices $V1$, $V2$, y VM simultáneamente, resultando que:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 2^q \cdot \left[(N(0, 1))_0^K \right]^q$$

siendo $n = 2$ y con un coeficiente de homotecia $K = 3$ la probabilidad de un vértice en solitario es:

$$P_{RK\sigma_{zq}} = 0,9974^2 = 0,9948 = 99,48 \%$$

4.3. DENSIFICACIÓN CON UN PUNTO CUALQUIERA EN REFERENCIA AL CASO TEÓRICO DE EJES OBLICUOS

Definimos un punto próximo a los vértices conocidos $V1$ y $V2$, podría ser el punto VL , de coordenadas conocidas:

Vértice	Coordenadas
X_L	130 m
Y_L	160 m

4.3.1. RECINTOS DE ERROR Y FIABILIDADES COMPUESTAS

Siguiendo la metodología para el caso de densificación con ejes oblicuos, expuesto en el epígrafe 2.2, obtenemos los recintos de error y fiabilidades del vértice L , que se pueden encontrar en el cuadro 4.5. Asimismo podríamos conocer los recintos de error y fiabilidades de cualquier otro punto del plano del levantamiento.

Sean las coordenadas de los vértices $V1$, $V2$ y VL :

Semiejes/ semilados	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$	$x_M = \sigma x_{vM}$	$y_M = \sigma y_{vM}$
Semieje elipse	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$		
Semilados	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$3,5999 \cdot 10^{-4} m$	$5,3920 \cdot 10^{-4} m$
Semilados corregidos	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$3,5999 \cdot 10^{-4} m$	$5,3920 \cdot 10^{-4} m$
Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$	$7,0928 \cdot 10^{-4} m$	$0,0011 m$
$K = 3, n = 6, P = 98,45\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0021 m$	$0,0033 m$
$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0021 m$	$0,0033 m$

Cuadro 4.4: Recintos de error y fiabilidades asociadas de los vértices $V1$, $V2$ y del vértice VM perteneciente al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$

Vértice	Coordenadas
X_{V1}	100,0004 m
Y_{V1}	166,5963 m
X_{V2}	163,0152 m
Y_{V2}	154,2495 m
X_{VL}	125,33439 m
Y_{VL}	180 m

A partir de las coordenadas anteriores calculamos los ángulos δ , γ , y θ :

$$m_{V1-VL} = tg(\delta) = \frac{Y_{VL} - Y_{V1}}{X_{VL} - X_{V1}} = \frac{180 - 166,5963}{125,33439 - 100,0004} = \frac{13,4037}{25,3340} = 0,4866$$

$$\delta = \mathbf{30,980443^g}$$

$$m_{V2-VL} = tg(\gamma + \frac{\pi}{2}) = \frac{Y_{VL} - Y_{V2}}{X_{VL} - X_{V2}} = \frac{180 - 154,2495}{125,33439 - 163,0152} = \frac{25,750499}{-37,68081} = -0,6834 = -\frac{1}{tg\gamma}$$

$$-0,6834 = -\frac{1}{tg\gamma}$$

$$tg(\gamma) = \frac{1}{0,6834} = 1,4633$$

$$\gamma = \mathbf{61,835427^g}$$

El ángulo entre los ejes oblicuos será:

$$\theta = 100^g + 30,980443^g - 61,835427^g = 69,145015^g$$

$$\theta = \mathbf{69,145015^g}$$

Aplicando la expresión (224) obtendremos los semilados del recinto de error del vértice L :

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad - \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma) \cdot$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2$$

Siendo para el vértice L :

$$\Delta = x_L'' = x_L \cdot \cos \gamma + y_L \cdot \sen \gamma$$

$$\Gamma = y_L'' = -x_L \cdot \sen \gamma + y_L \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3725 & -0,7439 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1200 & -0,0677 \\ -0,7439 & 1,5146 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0677 & 0,8037 \end{pmatrix} \cdot 10^7$$

Desarrollamos la expresión (224):

$$((\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \quad (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \quad -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \quad \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma) \cdot$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & s_{ik} & s_{il} \\ s_{ij} & s_{jj} & s_{jk} & s_{jl} \\ s_{ik} & s_{jk} & s_{kk} & s_{kl} \\ s_{il} & s_{jl} & s_{kl} & s_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \cos \delta \\ (\Delta - \Gamma \cdot ctg \theta) \cdot \sen \delta \\ -\Gamma \cdot cosec \theta \cdot \sen \gamma \\ \Gamma \cdot cosec \theta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = C^2$$

Y después de un cálculo realmente prolijo, se obtiene

$$x_L^2 \cdot 1,8921 \cdot 10^7 + y_L^2 \cdot 5,1298 \cdot 10^7 + x_L \cdot y_L \cdot 1,2754 \cdot 10^7 - C^2 = 0$$

$$x_L^2 \cdot 1,8921 \cdot 10^7 + y_L^2 \cdot 5,1298 \cdot 10^7 - 2 \cdot x_L \cdot y_L \cdot (-0,63770 \cdot 10^7) - C^2 = 0$$

Que nos permite calcular el recinto de error del vértice VL , como hicimos en el epígrafe 4.2.1. Las varianzas y la covarianza son:

$$\sigma_y^2 = 3,3551 \cdot 10^{-7} \implies \sigma_y = 5,7923 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_x^2 = 1,90965 \cdot 10^{-7} \implies \sigma_x = 3,016 \cdot 10^{-4} m$$

$$\sigma_{xy} = -1,1308 \cdot 10^{-7} m$$

En la tabla 4.5 se recogen los recintos de error y sus fiabilidades, conjuntas y por separado.

4.4. DENSIFICACIÓN CON LOS PUNTOS CORRELATIVOS DE LA ZONA “B”

Los puntos correlativos $V7$ y el $V8$ carecen de información probabilística. Adjuntamos sus correcciones diferenciales y las raíces de sus varianzas, porque también pueden ser útiles en el proceso de densificación planimétrica.

Vértice	Coordenadas compensadas	Correcciones diferenciales dx	Semilados de los rectángulos de error
X_{V3}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V3}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V4}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V4}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V7}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V7}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V8}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V8}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$

Cuadro 4.6: Coordenadas de los vértices libres $V3$ y $V4$ y sus correlativos $V7$ y $V8$

Semiejes/ semilados	$x_1 = \sigma x_{v1}$	$y_1 = \sigma y_{v1}$	$x_2 = \sigma x_{v2}$	$y_2 = \sigma y_{v2}$	$x_L = \sigma x_{vL}$	$y_L = \sigma y_{vL}$
Semieje elipse	$1,8775 \cdot 10^{-4} m$	$9,3931 \cdot 10^{-4} m$	$3,0176 \cdot 10^{-4} m$	$3,5128 \cdot 10^{-4} m$		
Semilados	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$3,0160 \cdot 10^{-4} m$	$5,7923 \cdot 10^{-4} m$
Semilados corregidos	$4,6771 \cdot 10^{-4} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$	$3,0160 \cdot 10^{-4} m$	$5,7923 \cdot 10^{-4} m$
Lado del rectángulo	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$	$0,0019 m$	$5,5530 \cdot 10^{-4} m$	$7,2278 \cdot 10^{-4} m$	$6,0321 \cdot 10^{-4} m$	$0,0012 m$
$K = 3, n = 8, P = 98,45\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0018 m$	$0,0035 m$
$K = 3, n = 2, P = 99,48\%$	$0,0028 m$	$0,0057 m$	$0,0017 m$	$0,0022 m$	$0,0018 m$	$0,0022 m$

Cuadro 4.5: Recintos de error y fiabilidades asociadas de los vértices V1, V2 y VL

4.5. DENSIFICACIÓN CON PUNTOS CON ABSCISAS PROCEDENTES DE LA ZONA “A” Y ORDENADAS DE LA ZONA “B” Y VICEVERSA

A partir de las coordenadas compensadas de los vértices de la zona “A”: V_1 y V_2 y de la zona “B”: V_3 y V_4 , del cuadro 4.7:

Vértice	Coordenadas compensadas	Correcciones diferenciales dx	Semilados de los rectángulos de error
X_{V_1}	100,0004 m	$0,2960 \cdot 10^{-3} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V_1}	166,5963 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$
X_{V_2}	163,0152 m	$0,4405 \cdot 10^{-3} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V_2}	154,2495 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
X_{V_3}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V_3}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V_4}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V_4}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$

Cuadro 4.7: Coordenadas compensadas de la red

obtenemos las coordenadas de 8 vértices virtuales: V_9 , V_{10} , V_{11} , V_{12} , V_{13} , V_{14} , V_{15} , y V_{16} . Nuevamente adjuntamos sus correcciones diferenciales y las raíces de sus varianzas para tener más información sobre ellos.

Vértice	Coordenadas compensadas	Correcciones diferenciales dx	Semilados de los rectángulos de error
X_{V9}	100,0004 m	$0,2960 \cdot 10^{-3} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V9}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V10}	100,0004 m	$0,2960 \cdot 10^{-3} m$	$2,2186 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V10}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V11}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V11}	154,2495 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
X_{V12}	99,9999 m	$-0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V12}	166,5963 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$
X_{V13}	163,0152 m	$0,4405 \cdot 10^{-3} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V13}	88,0114 m	$0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V14}	163,0152 m	$0,4405 \cdot 10^{-3} m$	$2,7765 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V14}	99,9993 m	$-0,65378 \cdot 10^{-3} m$	$1,2124 \cdot 10^{-4} m$
X_{V15}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V15}	154,2495 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$3,6139 \cdot 10^{-4} m$
X_{V16}	167,5210 m	$0,1333 \cdot 10^{-3} m$	$2,90155 \cdot 10^{-4} m$
Y_{V16}	166,5963 m	$-0,7994 \cdot 10^{-3} m$	$9,3541 \cdot 10^{-4} m$

Cuadro 4.8: Coordenadas de los puntos con abscisas procedentes de la zona “A” y ordenadas de la zona “B” y viceversa

Puede ser ilustrativo trabajar con el hipercilindro que contenga la solución pseudoinversa de que se trate. Este será de la forma, según expresión (244):

$$x_p^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x_p = k_p^2 = \text{conocido}$$

siendo (245):

$$x_p = S^+ \cdot A^T \cdot P \cdot K = \text{solución pseudoinversa conocida}$$

Y en la subred 1 la matriz varianza covarianza recordamos que es σ_{xx} , y en la subred 2 σ_{yy} :

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{x_b x_b} = \begin{pmatrix} 0,1470 & -0,1470 \\ -0,1470 & 0,1470 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_0^2 \cdot Q_{y_b y_b} = \begin{pmatrix} 0,8419 & -0,8419 \\ -0,8419 & 0,8419 \end{pmatrix} \cdot 10^{-7} m^2$$

Resultando dos valores de k_p :

$$\begin{aligned}
 x_{p1}^T \cdot \sigma_{xx}^+ \cdot x_{p1} &= k_{p1}^2 = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,1333 \cdot 10^{-3} \\ -0,1333 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1470 & -0,1470 \\ -0,1470 & 0,1470 \end{pmatrix}^+ \cdot 10^{-7} \cdot \\
 &\quad \begin{pmatrix} 0,1333 \cdot 10^{-3} & -0,1333 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \\
 &= 1,2088
 \end{aligned}$$

$$k_{p1} = 1,0994$$

$$\begin{aligned}
 x_{p2}^T \cdot \sigma_{yy}^+ \cdot x_{p2} &= k_{p2}^2 = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,65378 \cdot 10^{-3} \\ 0,65378 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8419 & -0,8419 \\ -0,8419 & 0,8419 \end{pmatrix}^+ \cdot 10^{-7} \cdot \\
 &\quad \begin{pmatrix} 0,65378 \cdot 10^{-3} & 0,65378 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \\
 &= 5,0770
 \end{aligned}$$

$$k_{p2} = 2,2532$$

Y finalmente, siendo la sensibilidad de la red inferior al milímetro², con las fiabilidades anteriormente expresadas podrán aceptarse como exactas las cifras de los resultados obtenidos hasta la de los milímetros, inclusive.

² *Cfr.* M.J. JIMÉNEZ MARTÍNEZ ET AL., "Cuestiones básicas en interpretación de una red clásica libre ajustada por el método de incrementos de coordenadas". Pg. 59. *Opus cit.*

Capítulo 5

CONCLUSIONES

El presente trabajo completa la fase medular de la línea de investigación emprendida hace cuatro años por el equipo de técnicos pertenecientes a la Universidad Politécnica de Valencia publicada en cinco entregas sucesivas, contando la presente, en la revista digital de la Real Academia de Cultura Valenciana. Con el antecedente de otras publicaciones en papel editadas fundamentalmente en la mencionada Universidad debidamente reseñadas y citadas¹.

Y como es secularmente preceptivo, siempre hasta el momento presente y en el estado actual de doctrina y tecnología.

Se trata del permanente objetivo de acceder con la precisión adecuada a la métrica del espacio físico concernido por una red local y, esencialmente, interpretar los resultados obtenidos con el más alto poder de afirmación posible.

Y debe de establecerse como condición de partida que nos referimos a trabajos que requieren avanzar más allá de las tareas repetitivas de rutina que, cubriendo sin reproche gran parte de la práctica profesional usual, son asequibles con importante coeficiente de seguridad a la excelente calidad de la instrumentación moderna y al

¹En especial M. CHUECA PAZOS, A. B. ANQUELA JULIÁN, S. BASELGA MORENO “Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los problemas del Datum y Principal de Diseño”. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia 2007. De donde, previa autorización, hemos obtenido parte de la teoría que antecede.

automatismo ofrecido por aplicación reiterada del hardware y software actualmente disponibles.

Así pues, tratamos tan solo del grupo de proyectos que, por la razón o razones técnicas, económicas, de responsabilidad o de cualquier otro tipo, y consecuencias posibles que concurren en ellos, requieren además y necesariamente, directa y permanente vigilancia y decisoria intervención técnica humana altamente cualificada.

En síntesis, y en virtud de cuanto antecede concluimos que el método completo desarrollado en teoría y praxis ofrece esencialmente como avances que así mismo entendemos rigurosamente comprobados en la práctica:

- Un tratamiento novedoso del ajuste gaussiano que se ha denominado “por incrementos de coordenadas”. Con técnicas de homogeneización de observables, pesos, separación de tipos de coordenadas, eliminación de covarianzas, y en consecuencia, utilización rigurosa de observables GNSS.
- La metodología necesaria para la aplicación del Análisis Multivariante al vector de coordenadas compensadas, permitiendo la formulación de figuras de error simultaneas de alto poder de afirmación y cota de probabilidad arbitraria en cualquier grupo o grupos de vértices. Desde una sola coordenada hasta la totalidad de la red.
- Densificar la red de que se trate en cualquier caso y a cualquier punto o subespacio de puntos geoméricamente relacionable con vértices de la red por intersección directa virtual, con idéntico poder de afirmación que estos últimos y sin necesidad de trabajo de campo adicional. Hasta completar un Modelo Digital del Terreno de cobertura y densidad arbitraria.

Los dos primeros apartados son objeto de las cuatro publicaciones anteriores a la presente. Las páginas que anteceden se ocupan del tercer apartado.

A lo largo de todo el proceso se ha comprobado satisfactoriamente la doctrina con la praxis adecuada sobre la red monumentada en el Campus de Vera de

la Universidad Politécnica de Valencia. Creemos que por primera vez de forma completa y ordenada.

Y queda tan solo para la sexta y por el momento última parte de la línea de investigación programada, el estudio y praxis de la evolución en el tiempo de una red local y sus eventuales modificaciones o deformaciones. Actualmente en estado de elaboración muy avanzado.

Capítulo 6

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

- [1] ANQUELA, A.B.; CHUECA, M.; BERNÉ, J.L., *Aportación al problema general de redes locales de alta precisión: condicionantes específicos de fijación de criterios teóricos y prácticos, de calificación de parámetros intermedios y resultados finales*, Tesis Doctoral, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2001.
- [2] ASHKENAZI, V., *Models for control in National and continental Network*, *Bulletin Geodesique*, Vol. 55, 1981.
- [3] ASHKENAZI, V., *Criterion for optimisation Boletino di Geodesia e Scienze Affine*.
- [4] BAARDA, W., *Measures for the accuracy of geodetic networks*, Hungría, Sopron, 1977.
- [5] BAARDA, W., *S-transformations and Criterion Matrices*, *Netherlands Geodetic Commission*, Vol. 5, núm. 1, 1973.
- [6] BAARDA, W., *Statistical concepts in Geodesia*, Delft, Holanda, *Rijkscommissie voor geodesie*.1967.
- [7] BAARDA, W., *Statistical Transformations and Criterion Matrices*, Delft, Holanda, *Rijkscommissie voor geodesie*.
- [8] BANNISTER, A.; RAYMOND, S., *Técnicas modernas en topografía*, R. S. Méjico, 1984.

- [9] BASELGA, S., *Aplicación informática para el diseño y compensación de redes locales, Proyecto Fin de Carrera de Ingeniería en Geodesia y Cartografía*, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2000.
- [10] BASELGA, S.; CHUECA, M.; BERNÉ, J.L., *Cálculo, compensación e interpretación de resultados en redes locales de alta precisión observadas por GPS y Topografía Clásica con aplicación de análisis estadístico multivariante y técnicas de estimación robusta*, Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [11] BELAYEV, V., *Optimal weiyhting in linear function estimation*, *Journal of Geodesy*, 1996.
- [12] BERNÉ, J. L.; HERRÁEZ, J., *Instrumentos modernos en Topografía*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [13] BERNÉ, J. L.; BASELGA, S.; ANQUELA, A. B., *RedTop. Aplicación Informática para el Diseño, Análisis y Compensación de Redes Topográficas*, Valencia, Editorial de la Universidad Politécnica, 2000.
- [14] BJERHAMMAR, A., *Theory of errors and generalized matrix inverses*, *Elsevier*, 1973.
- [15] BEZOARI, G.; MARTÍ, C.; SELVINI, A., *Topografía. Cartografía*, Milán, *Hoepli*, 1994.
- [16] BLACHUT, T. J. A., CHRZANOWSKI, A., SAASTAMOINEM J.H., *Cartografía y levantamientos Urbanos*, Méjico, Librería del Congreso, 1980.
- [17] BLACKIE AND SON LTD. Lauf. G. B., *The method of least Squares*. Londres, *Oxford University Press*, 1971.
- [18] BOMFORD, G., *Geodesy*, Londres, *Oxford University Press*, 1971.
- [19] BURNSIDE, C. D., *Electromagnetic Distance measurements*, *Crosby Lockwood*, 1971.

- [20] CAMACHO, A.; MARTÍN, M., *Constreñimientos internos en la compensación de estaciones*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1986.
- [21] CASPARY, W. F., *Concepts of network and deformation analysis*, School of Surveying, Australia, The University of New South Wales, Monograph XI, 1987.
- [22] CHEN, Y. Q., *Analysis of deformations. Surveys A. generalized Method*, Canadá, Dep. Sur. Eng. Fredericton. University of New Brunswick , 1983.
- [23] CHUECA, M., *Topografía*, Madrid, Dossat. S.A., 1982.
- [24] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Análisis de errores*, Valencia, Tomo I, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [25] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Nivelación*, Valencia, Tomo II, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [26] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Poligonación*, Valencia, Tomo III, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [27] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Topografía. Triangulación*, Valencia, Tomo IV, Universidad Politécnica de Valencia, 1993.
- [28] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Redes topográficas y locales*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1994.
- [29] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Ampliación de redes topográficas y locales*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1995.
- [30] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia*, Madrid, Ed. Paraninfo, 1996.
- [31] CHUECA, M.; HERRÁEZ, J.; BERNÉ, J. L., *Métodos Topográficos*, Madrid, Ed. Paraninfo, 1996.

- [32] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L., *Ampliación de Redes Topográficas y locales. Cuestiones de Diseño*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [33] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Avances en la interpretación de resultados en Redes Locales*. Recintos de Error, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2001.
- [34] CHUECA, M.; BERNÉ, J. L.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Microgeodesia y Redes Locales: Complementos Docentes*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [35] CHUECA, M.; ANQUELA, A. B.; BASELGA, S., *Diseño de Redes y Control de Deformaciones. Los Problemas del Datum y Principal de Diseño*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 2007.
- [36] DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F., *Topografía general y aplicada*, Madrid, Dossat, 1978.
- [37] ESPIGA GÓMEZ LOBO, *El tratamiento matricial del método de los mínimos cuadrados*, Madrid, Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [38] FERRER TORIO, B.; PINA, B., *Métodos topográficos*, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, 1991.
- [39] FERRER TORIO, R.; PINA, B., *Introducción a la topografía*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1991.
- [40] FERRER TORIO, A., y otros, *Topografía aplicada a la Ingeniería Civil*, Cantabria, Universidad de Cantabria, 1992.
- [41] GRAFAREND, E. W., “*Optimisation of Geodetic Networks*”. Bollettino di Geodesia e Science Affini.
- [42] GROTEN. E.; STRAU, B., *GPS - Techniques Applied to Geodesy and Surveying*, Berlín, Springer Nerlag, 1988.

- [43] HEISKANEN y MORITZ, *Geodesia Física*, Madrid, IGN.
- [44] HIRVONEN, R. A., *Adjustment by least squares in Geodesy and Photogrammetry*, Ungar Pub, 1971.
- [45] HOFMAN-WELLWN HOF., *GPS. Theory and Practice*, New York, Lichtenegger and Collins, Springer-Verlay, 1994.
- [46] HOTINE, M., *Mathematical Geodesy*, Washington D.C., U. S. Department of Commerce, 1969.
- [47] ISAHÍ PRECISSION CO.LTC, “*Principios de la medición electrónica*”, Revista Topográfica y Cartográfica, núms. 28 y 29.
- [48] JIMÉNEZ MARTÍNEZ, M.J.; MARQUÉS MATEU, A.; PAREDES ASENCIO, J.M.; VILLAR CANO, M., “*Progreso en la práctica del ajuste gaussiano de una red local. Método de Triangulateración*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital), 2010.
- [49] JIMÉNEZ MARTÍNEZ, M.J.; QUESADA OLMO, N. ; VILLAR CANO, M.; PAREDES ASENCIO, J.M.; MARQUÉS MATEU, A., “*Ajuste Gaussiano de redes por el método de Incrementos de Coordenadas*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital), 2010.
- [50] JIMÉNEZ MARTÍNEZ M.J., GARCÍA GARCÍA, FR.; VILLAR CANO, M., “*Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con gnss y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital), 2011.
- [51] JIMÉNEZ MARTÍNEZ M.J., GARCÍA GARCÍA, FR.; VILLAR CANO, M., “*Recintos de error y su interpretación en el ajuste gaussiano de una red local observada con gnss y ajustada por incrementos de coordenadas. Teoría y Praxis*”, Valencia, Real Academia de Cultura Valenciana, Revista Digital: [www.racv.es/racv digital](http://www.racv.es/racv%20digital), 2011.

- [52] JORDAN, W., *Tratado general de topografía*, Barcelona, Gustavo Gilí, 1974.
- [53] KENNIE and G. PETRIE, *Engineering Surveying Technology*. Taylor & Francis, Oxon, England, 1990.
- [54] KINCAID, D.; CHENEY, W., *Análisis Numérico: las Matemáticas del Cálculo Científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (U.S.A.), 1994.
- [55] LEICK, A., *GPS. Satellite Surveying*, New York, John Wiley and Sons, 1990.
- [56] LEICK, A., *GPS. Satellite Surveying*, New York, John Wiley and Sons, 2004.
- [57] LEVALLOIS, *Geodesie Générale*, París, Eyrolles, 1970.
- [58] LÓPEZ CUERVO, *Topografía*, Madrid, Mundi Prensa, 1994.
- [59] MAESTRO, I., BASELGA, S., CHUECA, M., *Contribución al estudio microgeodésico de deformaciones: diseño de redes mediante el cálculo y modelización de la incertidumbre*, Tesis Doctoral, Valencia, E.T.S.I.G.C.T. de la Universidad Politécnica, 2005.
- [60] MARTÍN ASÍN, F., *Geodesia y Cartografía matemática*, Madrid, Paraninfo, 1989.
- [61] MARUSSI, A., *Intrinsic Geodesy*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1985.
- [62] MIKHAIL, E. M.; ACKERMAN, F., *Observations and least squares*, New York, IAP. Dun-Donneley Pub, 1976.
- [63] MIKHAIL and ACKERMANN, *Analysis and Adjustments of Survey Measurements*, Van Nostrand, New York, 1981.
- [64] MONTES DE OCA, M., *Topografía*, R. S. México, 1985.
- [65] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *Ajuste de redes geodésicas en un arco Tridimensional*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.

- [66] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *“Análisis de redes libres”*, Asamblea nacional de Geodesia y Geofísica, Madrid, 1987.
- [67] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A., *“Concepto de precisión y fiabilidad en redes Geodésicas”*. Boletín de Información del Servicio Geográfico del Ejército.
- [68] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO, A. y VALBUENA DURAN, J. L., *Determinación de movimientos pequeños por procedimientos de trilateración. Aplicación a la auscultación de presas. Particularización a la presa del Atazar, Santander*, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [69] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., *Distanciometría electrónica de precisión. Distanciómetros submilimétricos*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [70] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., *Medida electrónica de los parámetros topográficos*, Santander, E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos, 1992.
- [71] NÚÑEZ-GARCÍA DEL POZO. A., y VALBUENA DURAN, J. L., VII *Curso de Geodesia Superior. Instrumentos, teoría y funcionamiento*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1991.
- [72] OJEDA RUIZ, J. L., *Métodos topográficos y oficina técnica*, Madrid, El Autor, 1984.
- [73] OLLIVIER, F., *Instruments Topographiques*, París, Eyrolles, 1995.
- [74] POPE, A. J., *The statistics of the residuals and the detection of outliers*, Grenoble, IUGG XVIII, General Assembly, 1975.
- [75] RICHARDUS, P.; ALIMAN, J., *Project Surveying*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1966.
- [76] RICHARDUS. P., *Project Surveying*, Netherlands, A. Balkema, 1977.

- [77] RÜEGER, J.M., *Electronic Distance Measurement*, Berlin Heiderberg, Alemania Edit. Springer-Verlag, 1996.
- [78] RÜEGER, J.M., "*Precision of measurements and least squares*", 37th Australian Surveyors Congress, Perth, Western Australia, 13-19 April 1996.
- [79] RUIZ MORALES. M., *Manual de Geodesia y Topografía*, Granada, Proyecto Sur, 1991.
- [80] RUSSELL, C; WOLF, P.R., *Elementary Surveying*, Harper and Row Publishers, Inc., 1984.
- [81] SEVILLA, M. J.; NÚÑEZ, A., *Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geoide*, Madrid, Física de la Tierra, U. Complutense, 1980.
- [82] SEVILLA, M. J., *Colocación mínimos cuadrados*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1987.
- [83] SEVILLA, M. J., *Curso de Geodesia Superior*, Madrid, U.C., 1987.
- [84] SEVILLA, M. J.; MUÑOZ, P.VELASCO, J.; ROMERO, P., "*Calibración de un distanciómetro de infrarrojos en una base interferométrica*". Topografía y Cartografía, Vol. III, 1987.
- [85] SEVILLA, M. J., *Compensación de redes de nivelación trigonométrica*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [86] SEVILLA, M. J., *Soluciones progresivas en el método mínimos cuadrados*, Madrid, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [87] SEVILLA, M. J., *Física de la Tierra II*, Madrid, Universidad Complutense, 1990.
- [88] SEVILLA, M. J., "*Refracción atmosférica y su influencia en la medida electromagnética de distancias*", Madrid, VII Curso de Geodesia Superior, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1991.

- [89] STRANG, G., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Madrid, Addison-Wesley, 1990.
- [90] TORGE WOLFGANG, *Geodesia física*, Madrid, Diana, 1983.
- [91] VALBUENA DURAN. J. L., “*Distanciometría electrónica, calibración y puesta a punto*”, Topografía y Cartografía, Vol. IV, 1989.
- [92] VANICEK, P., y KRAKWSKY, E., *Geodesy*, Amsterdam, North Holland, 1986.
- [93] WELLACH, W., *A review of the adjustment of the free network*. Survey Review, XXV, 194, 1979.
- [94] ZAKATOV, *Curso de Geodesia Superior*, Moscú, Mir, 1981.
- [95] ZUND, Joseph, *Foundations*.